ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4177

Д.Ю.Бардин, В.Б.Семикоз, Н.М.Шумейко

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К πe^--РАССЕЯНИЮ

Часть I

1968

Р2 - 4177

Д.Ю.Бардин, В.Б.Семикоз, Н.М.Шумейко

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К πe^--РАССЕЯНИЮ

Часть I

1. Введение

Основной характеристикой электромагнитного взаимодействия π -мезона является электромагнитный формфактор $F_\pi(q^2)$, который в области малых переданных импульсов может быть представлен в виде

$$F_\pi(q^2) = 1 - \frac{q^2 r_\pi}{6}. \qquad (1)$$

Величина r_π носит название электромагнитного радиуса.

Существует ряд методов его определения: изучение электророждения π^+ -мезона/1÷3/, сравнение сечений упругого рассеяния π^+ - и π^- -мезонов α -частицами/4÷8/, измерение сечения упругого πe -рассеяния/9÷11/. В работах/12÷14/ предложены поляризационные методы, которые, однако, требуют проведения трудных измерений.

Из опытов по электророждению/3/ было получено значение электромагнитного радиуса π -мезона, равное 0,8 $\pm$0,1 ф, что в пределах двойной ошибки согласуется с предсказаниями ρ -доминантной модели/15/ ($r_\pi \approx 0,63$ ф). Следует, однако, иметь в виду, что определение электромагнитного формфактора пиона из данных по электророждению требует использования теоретических моделей.

В последних опытах по рассеянию заряженных π -мезонов α -частицами/8/ была получена верхняя граница для электромагнитного радиуса пиона $r_\pi < 0,9$ ф. С помощью некоторых модельных предположений о потенциале ядра He_4 авторам /7/ удалось учесть интерференцию кулоновского и сильного взаимодействий π -мезона с a -частицей. Все же метод оказывается слишком неточным, чтобы определить нижнюю границу электромагнитного радиуса.

Наиболее прямым методом определения радиуса r_π является изучение упругого πe -рассеяния.

При рассеянии π -мезона с массой μ и импульсом $\vec{p}$ (л.с.) на электроне с массой m максимальный переданный (электрону) импульс определяется формулой

$$q^2_{max} = \frac{4m^2|\vec{p}|^2}{\mu^2+2mE+m^2}, \qquad (2)$$

где

$$E = \sqrt{\mu^2+|\vec{p}|^2} .$$

Из формулы (2) видно, что для получения больших передач необходимо иметь пучки π -мезонов высоких энергий. В опытах Кассела и др./4/ при энергии пучка E_π = 20 Гэв импульс q_{max} равен 100 Мэв. Поэтому величина $\Delta = 1-F_\pi(q^2)$, определяющая отличие рассеяния физического пиона на электроне от рассеяния точечного пиона, оказывается слишком малой ($\approx$ 6%) для предполагаемого $r_\pi = 0{,}8$ ф /3/.
Для этого же электромагнитного радиуса r_π = 0,8 ф и, например, при энергии E = 60 Гэв величина Δ достигает 28%.

Однако измеренное в опыте сечение $\sigma_{\text{эксп.}}(\theta)$ оказывается меньше теоретически вычисленного $\sigma^{\text{точечн.}}_{\text{теор.}}(\theta)$ (когда π -мезон считается "точечным", т.е. $F_\pi = 1$) не только из-за наличия формфактора пиона, но и за счёт радиационных поправок.

Так как при высоких энергиях радиационные поправки оказываются значительными (см. таблицу в конце данной работы), то их необходимо учитывать при определении электромагнитного радиуса. При этом учет радиационных поправок к электронному току не препятствует введению электромагнитного формфактора в амплитуду πe -рассеяния, в то время как для радиационных поправок к мезонному току и для диаграмм с двухфотонным обменом такая факторизация неосуществима из-за наличия виртуальных состояний π -мезона.

Исключение составляет тормозное излучение пионом ненаблюдаемых фотонов, где оказывается достаточным ограничиться первым членом разложения амплитуды в ряд по энергии фотона. В этом приближении неупругая часть радиационных поправок пропорциональна сечению упругого πe -рассеяния в низшем порядке по константе тонкой структуры.

Расчёт радиационных поправок без учёта сильных взаимодействий показывает, что вклад диаграмм с двухфотонным обменом (комптоновский вклад) в сумме с вкладом, связанным с перенормировкой мезонной вершины, составляет менее 10% от всей радиационной поправки или менее 1% от сечения. Еще меньше не пропорциональные упругому сечению члены в тормозном излучении π -мезона и в интерференции излучения пиона с тормозным излучением электрона.

Если учёт сильных взаимодействий не увеличит этих вкладов, то ими можно пренебречь.

В результате сечение πe -рассеяния с точностью до членов порядка α^3 можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{d\sigma_0^{e\ell}}{d\Omega_{p'}} F_\pi^2(q^2)(1 + \frac{\alpha}{\pi}\delta_F), \tag{3}$$

где $\frac{d\sigma_0^{e\ell}}{d\Omega_{p'}}$ - сечение упругого рассеяния "точечного" пиона электроном в низшем порядке по константе тонкой структуры α ; величина δ_F не содержит комптоновского вклада δ_k , радиационной поправки $\delta_{e\ell}^{\pi}$, связанной с перенормировкой мезонной вершины, а также поправочных членов в тормозном излучении π -мезона (δ^{π} (1)) и в интерференции излучений электрона и пиона ($\delta^{e\pi}(1)$) . Здесь $\delta(1)$ - вклады, не пропорциональные упругому сечению.

Отметим, что сравнение экспериментальных сечений упругого рассеяния π^+- и π^- -мезонов электронами позволило бы определить комптоновский вклад, так как интерференция тормозного излучения электрона с тормозным излучением пиона может быть вычислена.

Радиационные поправки к рассеянию "точечного" π -мезона свободным электроном вычислялись Каханом/16/ для эксперимента, в котором измеряются энергии конечных частиц[x/].

В данной работе вычисляются радиационные поправки для случая регистрации энергии и угла электрона отдачи.

Укажем использованные при расчёте приближения.

1. Мы пренебрегаем членами порядка $\frac{m}{E}$, $\frac{m}{\mathcal{E}'_{el}}$, $\left(\frac{\mu}{E}\right)^2$ по сравнению с единицей (ультрарелятивистское приближение). Здесь E -энергия первичного пучка пионов в л.с., $\mathcal{E}'_{el}$ - энергия электрона отдачи в упругом рассеянии, m - масса электрона, μ - масса пиона.

2. Не учитывается размазанность по энергии ΔE первичного пучка π -мезонов, поскольку при реальном $\Delta E/E \approx 0{,}2\%$ она приводит к такого же порядка величине ошибки измеряемой энергии электрона отдачи

$$\Delta_E \mathcal{E}'/\mathcal{E}'_{el} = \frac{\mathcal{E}'_{el}}{m+E} \frac{\Delta E}{E}(1+\mu^2/mE). \tag{4}$$

3. Вклад "жестких" фотонов в неупругую часть радиационных поправок подсчитан с точностью до членов порядка α/π, что составляет погрешность в сечении, равную 0,25%.

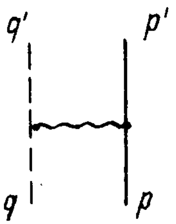
В разделе II подсчёт неупругой части радиационных поправок начинается с разбора кинематики и экспериментальных условий, которые накладывают дополнительные ограничения на разрешенную область энергий фотона. Далее излагается последовательный метод учёта ошибок в измерении угла и энергии частицы отдачи. До сих пор в работах по радиационным поправкам (см., например,/16- 18/) сталкивались с ситуацией, когда одной из указанных ошибок можно пренебречь.

[x/] Мы подтверждаем правильность результатов работы/16/. Кроме того, нами получены численные результаты при кинематических условиях, использованных в/16/, для тех энергий частиц и точностей приборов, которые указаны в разделе III данной работы.

В разделе III обсуждаются полученные результаты. Ввиду громоздкости численного материала в прилагаемой таблице приводятся лишь некоторые численные результаты.

II. Неупругая часть радиационных поправок

Процесс упругого πe - рассеяния в низшем порядке по константе тонкой структуры α описывается диаграммой



1)

Рис. 1

Здесь p и q (p' и q') начальные (конечные) 4-импульсы электрона и π -мезона соответственно. Нетрудно получить дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона на угол θ_{el}.

В л.с. имеем

$$\frac{d\sigma_0^{el}}{d\Omega_{p'}} = \frac{\alpha}{2m^2} \frac{T_0^{el} |\vec{p}\,'_{el}|^2}{|\vec{q}|^2 (p_3^{el}) \cos\theta_{el}}, \tag{5}$$

где

$$T_0^{el} = 2\,[\,4m^2 E\,(m + E - \mathcal{E}'_{el}\,) + \mu^2\,(p_3^{el})^2\,]\,,$$

$(p_3^{el})^2 = (p - p'_{el})^2 = (q - q'_{el})^2$ – квадрат переданного импульса[x/].

Упругая часть радиационных поправок, соответствующая вкладу диаграмм с дополнительными виртуальным фотоном, не зависит от выбора кинематических условий, вычислена нами точно и целиком совпадает с результатом работы/16/.

В этом разделе мы вычислим вклад тормозного излучения ненаблюдаемых фотонов, которое описывается следующими диаграммами:

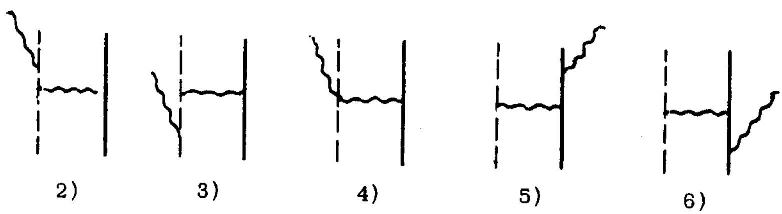


Рис. 2.

§1. Кинематика процесса $\pi e \to \pi e \gamma$

Полное сечение тормозного излучения в л.с. может быть представлено в виде

$$\sigma_{inel}\,(E) = \frac{a^3}{(2\pi)\,2m\,|\vec{q}\,|} \int \frac{d^3 p'}{\mathcal{E}'} \int \frac{d^3 k}{2\,\omega} \int \frac{d^3 q'}{E'}\,\delta^{(4)}(p + q - p' - q' - k)\,A\,. \tag{6}$$

Здесь k – 4-импульс фотона, $A = \frac{1}{2}\sum M M^{+}$ – результат суммирования по спинам электронов и поляризациям фотонов квадрата модуля

[x/] Мы используем метрику, в которой скалярное произведение 4-импульсов p и q имеет вид $pq = \vec{p}\,\vec{q} - p_0 q_0$.

матричного элемента M, соответствующего диаграммам (2)-(6). Мы не выписываем здесь величину A ввиду ее громоздкости и полного совпадения с аналогичной величиной работы/16/.

Поскольку измеряются энергия и угол электрона, целесообразно сначала провести интегрирование по фазовому объему ненаблюдаемых мезонов отдачи. В результате из (6) получим

$$\sigma_{inel} = \frac{\alpha^3}{(2\pi)^2 m |\vec{q}|} \int \frac{d^3p'}{\mathcal{E}'} \int \frac{d^3k}{2\omega} \frac{A \big|_{\vec{q}' = \vec{q} - \vec{k} - \vec{p}'}}{E'} \delta^{(1)}(E' - E_1 + \omega), \qquad (7)$$

где

$$E' = [\mu^2 + (\vec{q} - \vec{k} - \vec{p}')^2]^{1/2},$$

$$E_1 = m + E - \mathcal{E}'. \qquad (8)$$

Выделим кинематически разрешенную область энергий фотона, в которой

$$E' - E_1 + \omega = 0.$$

Отсюда находим:

$$\omega = \frac{r}{E_1 - \beta \cos\phi}, \qquad (9)$$

где ϕ - угол между вектором импульса фотона $\vec{k}$ и осью $\vec{q} - \vec{p}'$,

$$\beta = |\vec{q} - \vec{p}'|, \qquad (10)$$

$$r = m E_1 - E\mathcal{E}' + |\vec{p}'||\vec{q}| \cos\theta. \qquad (11)$$

Формула (9) представляет собой уравнение эллипса с эксцентриситетом $\gamma = \beta / E_1 < 1$.

Для удобства интегрирования введем замену переменных $\mathcal{E}'_{,}\theta \to r, \theta$, где r определяется соотношением (11). Величина r обращается в 0 при $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_{e\ell}$ и $\theta = \theta_{e\ell}$. Легко видеть, что в предположении малости отклонений $\delta\mathcal{E}'$ и $\delta\theta$ измеряемых параметров $\mathcal{E}'$ и θ от их "упругих" значений переменная r будет пропорциональна суммарному алгебраическому отклонению, а именно

$$r = \frac{mE}{\mathcal{E}'_{e\ell}} \Delta , \tag{12}$$

где

$$\Delta = \pm\delta\mathcal{E}' \pm |\delta_\theta \mathcal{E}'| , \tag{13}$$

причём

$$\frac{|\delta_\theta \mathcal{E}'|}{\mathcal{E}'_{e\ell}} = \frac{\mathcal{E}'_{e\ell}}{m} \operatorname{tg}\theta_{e\ell}\delta\theta . \tag{14}$$

Таким образом, в пределах кинематически и экспериментально разрешенной области (см. рис. 3)[x/] величина r меняется от $r_{min} = 0$ (линия MN) до $r(+) = r \,\Big|_{\substack{\theta_{e\ell} - \Delta\theta \\ \mathcal{E}'_{e\ell} - \Delta_m\mathcal{E}'}}$ (в точке K), где $\Delta\theta$ – погрешность прибора, измеряющего угол, $\Delta_m\mathcal{E}'$ – погрешность прибора, измеряющего энергию.

Заметим, что поскольку третий параметр – $\cos\phi$, от которого зависит энергия фотона ω (см. (9)), не фиксирован, то любой точке фигуры KMNF на рис. 3 соответствует множество неупругих событий с различными энергиями тормозного фотона.

[x/] Здесь ради определенности мы рассматриваем случай, когда $\Delta_m\mathcal{E}' > \Delta_\theta\mathcal{E}'$. Случай, когда $\Delta_m\mathcal{E}' < \Delta_\theta\mathcal{E}'$, рассматривается аналогично и приводит к тем же конечным выражениям.

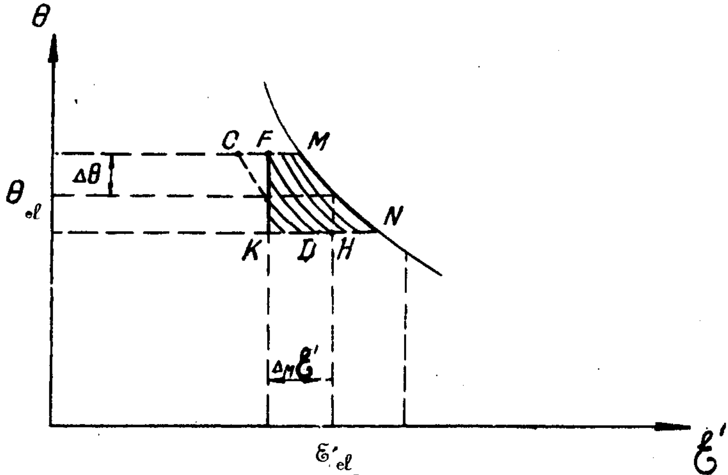


Рис. 3.

Граница $F'K'$ области интегрирования в переменных $\tau, \cos\theta$, изображенной на рис. 4, определяется подстановкой в соотношение

$$\cos\theta = \frac{\tau - (m - \mathcal{E}')(m+E)}{|\vec{p}\,'||\vec{q}\,|} \qquad (11')$$

значения

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_{el} - \Delta_m \mathcal{E}' .$$

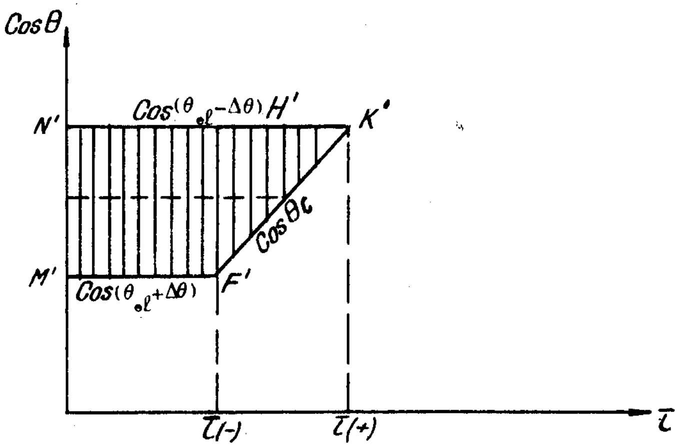


Рис. 4.

Таким образом, интегралы в полном сечении (7) должны быть вычислены по двум областям:

область I $\quad 0 \le r \le r(-)\,,\quad \cos\theta_a \le \cos\theta \le \cos\theta_b\,;$

область II $\quad r(-) \le r \le r(+)\,,\ \cos\theta_c \le \cos\theta \le \cos\theta_b\,.$

Здесь

$$r(\pm) = r\Big|\begin{array}{l}\theta_{e\ell} \mp \Delta\theta \\ \mathcal{E}'_{e\ell} - \Delta_m \mathcal{E}'\end{array} \tag{15}$$

$$\cos\theta_a = \cos(\theta_{e\ell} + \Delta\theta) = \cos\theta_c \Big|_{r=r(-)}\,, \tag{16}$$

$$\cos\theta_b = \cos(\theta_{e\ell} - \Delta\theta) = \cos\theta_c \Big|_{r=r(+)}\,, \tag{17}$$

$$\cos\theta_c = \frac{r - (m - \mathcal{E}'_{e\ell} + \Delta_m\mathcal{E}')(m+E)}{|\vec{q}|\,(|\vec{p}\,'_{e\ell} - \Delta_m\vec{p}\,'|)}\,. \tag{18}$$

Отметим, что в линейном приближении по отклонениям $\Delta_m\mathcal{E}'$ и $\Delta_\theta\mathcal{E}'$ $r(+)$ и $r(-)$ имеют вид

$$r(\pm) = \frac{mE}{\mathcal{E}'_{e\ell}}\,|\Delta_m\mathcal{E}' \pm |\Delta_\theta\mathcal{E}'||\,. \tag{15'}$$

С учётом связи дифференциалов

$$d\,\mathcal{E}' = \frac{dr}{|\vec{q}|\cos\theta - m - E} \tag{19}$$

сечение (7) может быть представлено в виде

$$\sigma_{inel}(r(-), r(+), \cos\theta_{e\ell}) = a\Big[\int_0^{r(-)} dr \int_{\cos\theta_a}^{\cos\theta_b} d\cos\theta + \int_{r(-)}^{r(+)} dr \int_{\cos\theta_c}^{\cos\theta_b} d\cos\theta\Big]\,B(r, \cos\theta)\,, \tag{20}$$

где
$$a = \frac{\alpha^3}{2\pi\, m\, |\vec{q}\,|}\ ,$$

$$B = \int \frac{d^3k}{2\,\omega}\ \frac{m\,(m+E)-r}{(|\vec{q}\,|\ \cos\theta - E - m)^2}\ \frac{\frac{1}{2\pi}\ A\,\Big|_{\vec{q}\,' = \vec{q} - \vec{k} - \vec{p}\,'}}{E'}\ \delta^{(1)}(E' - E_1 + \omega)\ . \tag{21}$$

Дифференциальное сечение $\dfrac{d\sigma^{\,inel}}{d\cos\theta_{e\ell}}$ получается непосредственным дифференцированием равенства (20) по внешнему параметру $\cos\theta_{e\ell}$.

$$\frac{d\sigma^{\,inel}}{d\cos\theta_{e\ell}} = \left(\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial r(-)}\right)_{\substack{r(+)=const\\ \cos\theta_{e\ell}=const}} \frac{d r(-)}{d\cos\theta_{e\ell}} + \left(\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial r(+)}\right)_{\substack{r(-)=const\\ \cos\theta_{e\ell}=const}} \frac{d r(+)}{d\cos\theta_{e\ell}} + \left(\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial\cos\theta_{e\ell}}\right)_{\substack{r(-)=const\\ r(+)=const}}\ . \tag{22}$$

Здесь
$$\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial r(-)} = a\left[\left(\int\limits_{\cos\theta_a}^{\cos\theta_b} d\cos\theta - \int\limits_{\cos\theta_c}^{\cos\theta_b} d\cos\theta\right) B\,(r,\ \cos\theta)\right]_{r=r(-)} = 0\ ,$$

так как $\cos\theta_c\,\big|_{r=r(-)} = \cos\theta_a$ (см. Рис. 4);
$$\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial r(+)} = a\left[\int\limits_{\cos\theta_c}^{\cos\theta_b} d\cos\theta\ B\,(r\,,\cos\theta)\right]_{r=r(+)} = 0\ ,$$

поскольку
$$\cos\theta_c\,\big|_{r=r(+)} = \cos\theta_b\ ;$$

наконец,
$$\left(\frac{\partial\sigma^{\,inel}}{\partial\cos\theta_{e\ell}}\right)_{\substack{r(-)=const\\ r(+)=const}} = a\int\limits_0^{r(-)}\left[B(r,\cos\theta_b)\ \frac{d\cos\theta_b}{d\cos\theta_{e\ell}} - \right. \tag{23}$$
$$\left. - B(r\,,\cos\theta_a)\,\frac{d\cos\theta_a}{d\cos\theta_{e\ell}}\right] dr + a\int\limits_{r(-)}^{r(+)}\left[B(r\,,\cos\theta_b)\ \frac{d\cos\theta_b}{d\cos\theta_{e\ell}} - B(r\,,\cos\theta_c)\ \frac{d\cos\theta_c}{d\cos\theta_{e\ell}}\right] dr\ .$$

Формула (23) упрощается, если воспользоваться ультрарелятивистским приближением, с учётом которого получаем:

$$\cos\theta_a = \cos\theta_{e\ell}\,(1 - \frac{m}{\mathcal{E}'_{e\ell}}\,\frac{\Delta_\theta \mathcal{E}'}{\mathcal{E}'_{e\ell}}) \approx \cos\theta_{e\ell}\ ;$$

аналогичные соотношения имеют место для $\cos\theta_b$ и $\cos\theta_c$. Поэтому

$$B(r, \cos\theta_a) \approx B(r, \cos\theta_b) \approx B(r, \cos\theta_c) \approx B(r, \cos\theta_{e\ell}) \tag{24}$$

и равенство (23) принимает вид

$$\frac{d\sigma^{inel}}{d\cos\theta_{e\ell}} = a\Big[\int_0^{r(-)} g_1(r)\,B(r, \cos\theta_{e\ell})\,dr + \int_{r(-)}^{r(+)} g_2(r)\,B(r, \cos\theta_{e\ell})\,dr\Big]. \tag{25}$$

Весовые множители $g_1(r)$ и $g_2(r)$ в (25) характеризуют вклад различных значений r. Учитывая, что частная производная $\dfrac{\partial\sigma^{inel}}{\partial\cos\theta_{e\ell}}$ в соотношении (23) вычисляется при постоянных значениях $r(-)$ и $r(+)$, для g_1 и g_2 получим:

$$g_1(r) = \frac{d\cos\theta_b}{d\cos\theta_{e\ell}} - \frac{d\cos\theta_a}{d\cos\theta_{e\ell}} = \frac{r(+) - r(-)}{|\vec{q}|}\,\frac{d}{d\cos\theta_{e\ell}}\Big(\frac{1}{|\vec{p}\,'_{e\ell} - \Delta_m \vec{p}\,'|}\Big), \tag{26}$$

$$g_2(r) = \frac{d\cos\theta_b}{d\cos\theta_{e\ell}} - \frac{d\cos\theta_c}{d\cos\theta_{e\ell}} = \frac{r(+) - r}{|\vec{q}|}\,\frac{d}{d\cos\theta_{e\ell}}\Big(\frac{1}{|\vec{p}\,'_{e\ell} - \Delta_m \vec{p}\,'|}\Big). \tag{27}$$

Неупругая часть радиационной поправки определяется следующим образом:

$$\frac{a}{\pi}\,\delta_{inel} = \frac{d\sigma^{inel}}{d\cos\theta_{e\ell}}(\text{по области MNKF}) \Big/ \frac{d\sigma^{e\ell}}{d\cos\theta_{e\ell}}(\text{по линии MN}). \tag{28}$$

Сечение упругого процесса $\frac{d\sigma^{e\ell}}{d\cos\theta_{e\ell}}$, вычисленное вдоль линии MN, равно

$$\frac{d\sigma_{e\ell}}{d\cos\theta_{e\ell}} = g_1(r)\,\frac{d\sigma^{e\ell}}{d\cos\theta_{e\ell}} . \qquad (29)$$

С учётом (26) и (27) из (28) легко найти тогда, что

$$\delta_{inel} = \frac{m\,|\vec{q}\,|\,(p_3^{e\ell})^4\cos\theta_{e\ell}}{2\pi\,|\,\vec{p}\,'_{e\ell}\,|^2\,T_0^{e\ell}}\left[\int_0^{r(-)} dr + \int_{r(-)}^{r(+)} g(r)\,dr\right] B(r,\cos\theta_{e\ell}), \qquad (30)$$

где

$$g(r) = \frac{r(+) - r}{r(+) - r(-)} . \qquad (31)$$

Формула (30) является общим выражением для вклада тормозного излучения ненаблюдаемых фотонов во всех случаях, когда в упругом рассеянии регистрируются энергия и угол какой-либо из конечных частиц. Нетрудно аналогичным образом получить весовой множитель $g(\omega)$ для случая регистрации энергий конечных частиц (см./16/, стр. 981). В случае ep -рассеяния/17,18/ в знаменателе формулы (14) стоит большая масса рассеивателя и величиной $\Delta_\theta\mathcal{E}'$, связанной с ошибкой в измерении угла, пренебрегают по сравнению с погрешностью $\Delta_m\mathcal{E}'$ прибора, измеряющего энергию. Но если одна из ошибок ($\Delta_\theta\mathcal{E}'$ или $\Delta_m\mathcal{E}'$) много больше другой, то $r(-) \to r(+)$, так что фигура MNFK (Рис. 3) может быть заменена фигурой MNCD, и весовой множитель становится единичным. Именно таким приближением пользовались авторы работ/16,17,18/.

§2. "Мягкие" фотоны

Перепишем равенство (30) в виде

$$\delta_{inel} = b\left[\int_0^{\tau(+)} d\tau + \int_{\tau(-)}^{\tau(+)} d\tau\,(g(\tau)-1)\right] B(\tau,\cos\theta_{el}), \tag{32}$$

где

$$b = \frac{m\,|\vec{q}\,|\,(p_3^{el})^4\cos\theta_{el}}{2\pi\,|\vec{p}\,'_{el}|^2\,T_0^{el}}.$$

Чтобы разделить вклады "мягких" и "жестких" фотонов, рассмотрим рис. 5, на котором изображена плоскость переменных интегрирования τ, ω.

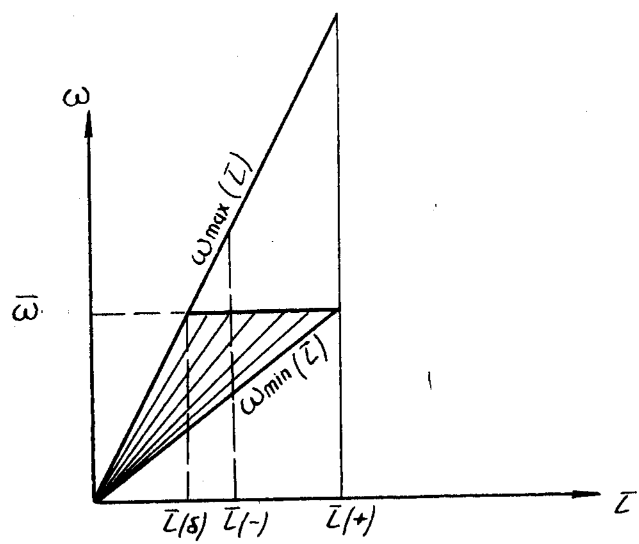


Рис. 5

На этом рисунке линии $\omega_{min}(r)$ и $\omega_{max}(r)$ описываются уравнениями, полученными из (9) подстановками $\phi = \pi$ и $\phi = 0$ соответственно. Учитывая, что в 1-м интеграле формулы (32) вес $g(r)$ равен единице, удобно выделить область "мягких" фотонов именно в нем. Из рис. 5 видно, что указанный интеграл можно разбить на два слагаемых

$$\int_0^{r(+)} dr B(r, \cos\theta_{e\ell}) = \left[\int_0^{r(+)} dr \int_{\omega_{min}(r)}^{\bar{\omega}} \frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}|}{2\omega} + \int_{r(\delta)}^{r(+)} dr \int_{\bar{\omega}}^{\omega_{max}(r)} \frac{\omega d\omega}{2} \right] \int d\Omega_k \left(1 - \frac{r}{mE}\right) \times \tag{33}$$
$$\times \frac{\mathcal{E}'^2_{e\ell}}{mE} \frac{1/2\pi \quad A|_{\vec{q}\,' = \vec{q} - \vec{k} - \vec{p}\,'} \, \delta(E' - E_1 + \omega)}{E'},$$

где

$$\bar{\omega} = \frac{r(+)}{E_1 + \beta(+)}, \quad r(\delta) = \frac{\mu^2}{2\beta_{e\ell}} \bar{\omega}, \tag{34}$$

а

$$\beta(+) = E - \mathcal{E}'_{e\ell} \left(1 - \frac{r(+)}{mE}\right). \tag{35}$$

Во втором интеграле формулы (32) пределами интегрирования по энергии фотона будут

$$\omega_{min}(r) = \frac{r}{E_1 + \beta} \quad \text{и} \quad \omega_{max}(r) = \frac{r}{E_1 - \beta}, \tag{36}$$

причём

$$\beta = E - \mathcal{E}'_{e\ell} \left(1 - \frac{r}{mE}\right). \tag{37}$$

В первом слагаемом выражения (33) энергия фотона $\omega \ll m$. Поэтому достаточно ограничиться первым членом разложения амплитуды в ряд по ω.

В таком приближении вся зависимость от выбора кинематики проявляется в различных значениях предела $\bar{\omega}$. Аналитический вид формул, соответствующих этому вкладу, ничем не отличается от аналогичного результата работы/16/.

Инфракрасная расходимость, содержащаяся во вкладе "мягких" фотонов, выделяется однозначно и полностью сокращается при сложении с упругой частью радиационных поправок.

§3. "Жесткие" фотоны

Из равенств (32) и (33) для вклада "жестких" фотонов получаем следующее выражение

$$\delta_{hard} = \frac{(p_3^{e\ell})^4}{2\,T_0^{e\ell}} \Big[\int_{\tau(\delta)}^{\tau(+)} d\tau \int_{\bar{\omega}}^{\omega_{max}(\tau)} \omega\, d\omega + \int_{\tau(-)}^{\tau(+)} (g(\tau)-1)\, d\tau \int_{\omega_{min}(\tau)}^{\omega_{max}(\tau)} \omega\, d\omega \Big] \times \tag{38}$$

$$\times \int d\Omega_k \left(1 - \frac{\tau}{mE}\right) \frac{1}{2\pi} A \Big|_{\vec{q}\,' = \vec{q} - \vec{k} - \vec{p}\,'} \delta^{(1)}(E' - E_1 + \omega).$$

Интегрирование по полярному углу ϕ выполняется с помощью энергетической δ -функции. В результате из (38) находим:

$$\delta_{hard} = \frac{(p_3^{e\ell})^4}{2T_0} \Big[\int_{\tau(\delta)}^{\tau(+)} \frac{d\tau}{\beta} \int_{\bar{\omega}}^{\omega_{min}(\tau)} d\omega + \int_{\tau(-)}^{\tau(+)} \frac{d\tau}{\beta} (g(\tau)-1) \int_{\omega_{min}(\tau)}^{\omega_{max}(\tau)} d\omega \Big] \times \tag{39}$$

$$\times \left(1 - \frac{\tau}{mE}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} A \Big|_{\substack{\vec{q}\,' = \vec{q} - \vec{k} - \vec{p}\,' \\ \cos\phi = a_1}},$$

где

$$\cos\phi \equiv a_1 = \frac{p' \cdot q - mE_1}{\beta\omega}. \tag{40}$$

Интегрирование в (39) выполняется непосредственно, хотя и чрезвычайно громоздко. Окончательный результат удобно представить в виде

$$\delta_{hard} = \delta^{e}_{hard} + \delta^{\pi}_{hard} + \delta^{e\pi}_{hard} . \tag{41}$$

Здесь

$$\delta^{e}_{hard} = 1 - \frac{\Delta_-}{\Delta_{min}} \ln \frac{\Delta_+}{\Delta_-} + 2 \ln \frac{2\mathcal{E}'_{e\ell}}{m} \left(\frac{\Delta_-}{2\Delta_{min}} \ln \frac{\Delta_+}{\Delta_-} - 1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln W \ln \frac{4WE^2 \mathcal{E}'^2_{e\ell}}{m^2 \beta^2_{e\ell}} - \ln W - \ln \frac{T_0^{e\ell}}{8m^2 E\beta_{e\ell}} \ln \frac{\mu^2 \mathcal{E}'_{e\ell}}{2mE\beta_{e\ell}} - \tag{42}$$

$$- \phi \left(\frac{\mu^2 \mathcal{E}'_{e\ell}}{2mE\beta_{e\ell}} \right) + \frac{2\Delta_{max}}{\mathcal{E}'_{e\ell}} \left[\frac{E}{\beta_{e\ell}} \ln \frac{2\beta_{e\ell}}{\mu} - \frac{4m^2 E \mathcal{E}'_{e\ell}}{T_0^{e\ell}} \ln \frac{2mE\beta_{e\ell}}{\mu^2 \mathcal{E}'_{e\ell}} - \ln \frac{2E}{\mu} \right],$$

$$\delta^{\pi}_{hard} = \left(1 - \frac{1+k'}{a'} \ln \frac{a'+k'}{a'-k'}\right)\left(1 - \frac{\Delta_-}{\Delta_{min}} \ln \frac{\Delta_+}{\Delta_-} - 4\ln \frac{2\beta_{e\ell}}{\mu}\right) + \ln \frac{\beta_{e\ell}}{E}, \tag{43}$$

$$\delta^{e\pi}_{hard} = 4\ln \frac{\beta_{e\ell}}{E} \left[\ln W + \frac{\Delta_-}{2\Delta_{min}} \ln \frac{\Delta_+}{\Delta_-} - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2mE\beta_{e\ell}}{\mu^2 \mathcal{E}'_{e\ell}} \right] + 1 + 2\phi\left(\frac{\mathcal{E}'_{e\ell}}{E}\right), \tag{44}$$

где $W = \dfrac{\mathcal{E}'_{e\ell} \quad r(+)}{mE\,\sigma}$, $\beta_{e\ell} = E - \mathcal{E}'_{e\ell}$, $\phi(x)$ – функция Спенса,

$\Delta_{min} = \min \{ \Delta_m \mathcal{E}', |\Delta_\theta \mathcal{E}'| \}$, $\Delta_{max} = \max \{ \Delta_m \mathcal{E}', |\Delta_\theta \mathcal{E}'| \}$.

При вычислении δ_{hard} мы всюду производили разложение в ряд по величине $\Delta_+ / \mathcal{E}'_{e\ell}$. Был подсчитан главный член, а также та часть вклада, пропорционального $\Delta_+/\mathcal{E}'_{e\ell}$, которая содержит логарифмы типа $\ln\frac{4E^2}{\mu^2}$, $\ln\frac{4\beta^2_{e\ell}}{\mu^2}$. Однако во вкладах δ^{π}_{hard} и $\delta^{e\pi}_{hard}$ последние члены оказываются порядка единицы, так что ими можно пренебречь.

Укажем, наконец, что при получении формул (42)-(44) оказалось достаточным использовать для веса $g(r)$ приближенное выражение, в котором $r(+)$ и $r(-)$ заменены на $r(\Delta_+)$ и $r(\Delta_-)$ соответственно.

III. Обсуждение результатов

Сечение упругого рассеяния "точечного" π -мезона электроном с точностью до членов порядка a^3 может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{p'}} = \frac{d\sigma_0^{e\ell}}{d\Omega_{p'}}\left(1+\frac{a}{\pi}\delta\right), \tag{45}$$

где

$$\delta = \delta^{\pi}_{e\ell} + \delta^{e}_{e\ell} + \delta_k + \delta^{e}_{inel} + \delta^{\pi}_{inel} + \delta^{e\pi}_{inel} \tag{46}$$

$$(\delta^{e}_{inel} = \delta^{e}_{soft} + \delta^{e}_{hard}, \text{ и т.д.}).$$

Величина $\frac{a}{\pi}\delta$ называется радиационной поправкой, а слагаемые $\delta^{\pi}_{e\ell}, \delta^{e}_{e\ell}, \delta_k, \delta^{e}_{soft}, \delta^{\pi}_{soft}, \delta^{e\pi}_{soft}$ определяются формулами (II. 30), (II. 31), (III. 18 - III. 27) работы /16/, причём нужно подставить в δ_{soft} величину $\bar{\omega}$, определяемую формулой (34). Вклады $\delta^{e}_{hard}, \delta^{\pi}_{hard}, \delta^{e\pi}_{hard}$ даются соотношениями (42), (43), (44) соответственно.

В случае π^+e -рассеяния величины δ_k и $\delta^{e\pi}_{inel}$ меняют знак, и радиационные поправки оказываются больше, поскольку главные вклады δ^{e}_{inel} и $\delta^{e\pi}_{inel}$ теперь складываются, а не вычитаются, как в π^-e -рассеянии. Подобный кулоновский эффект известен и в классической физике: при рассеянии частиц с противоположными зарядами интенсивность излучения больше, чем при рассеянии одинаково заряженных частиц.

Численные расчёты показывают, что комптоновский вклад δ_k незначительно меняется с ростом энергии первичного пучка и с ростом передачи. Интерференция тормозного излучения π -мезона с тормозным излучением электрона увеличивается с ростом переданного импульса и падает при увеличении энергий пучка (50 ÷ 60 Гэв).

Заметим, что комптоновский вклад, вообще говоря, должен даже уменьшаться с ростом энергии, если учесть незначительность времени взаимодействия быстрых пионов с электронами, когда частицы практически не "успевают" обменяться двумя и более γ -квантами.

Если пренебречь комптоновским вкладом δ_k вместе с поправкой δ^{π}_{el}, связанной с перенормировкой мезонной вершины, а также той частью вклада тормозного излучения π -мезона и интерференции, которая не пропорциональна сечению упругого πe -рассеяния, то сечение (45) можно факторизовать следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{d\sigma_0^{el}}{d\Omega_{p'}} F^2_{\pi}[(p_3^{el})^2](1+\frac{\alpha}{\pi}\delta_F). \qquad (47)$$

Радиационная поправка δ_F равна

$$\delta_F = \delta^{e}_{el} + \delta_{soft} + \delta^{\pi}_{hard}(\frac{1}{\omega}) + \delta^{e\pi}_{hard}(\frac{1}{\omega}) + \delta^{e}_{hard}. \qquad (48)$$

Здесь вклады $\delta^{\pi}_{hard}(\frac{1}{\omega})$ и $\delta^{e\pi}_{hard}(\frac{1}{\omega})$ происходят от первого, пропорционального $1/\omega$ члена в разложении амплитуды в ряд по энергии фотона ω.

Величина $\frac{\delta-\delta_F}{\delta}$ составляет менее 1% в сечении. Если разность экспериментальных сечений рассеяния π^+ - и π^- -мезонов электронами (за вычетом вычисляемой аналитически интерференции $\delta^{e\pi}_{inel}(\frac{1}{\omega})$) окажется величиной того же порядка, то ею можно пренебречь.

Таким образом, сравнение экспериментального сечения с сечением, вычисленным по формуле (47), позволит определить электромагнитный радиус пиона с учётом радиационных поправок.

В прилагаемой таблице приводятся некоторые численные результаты. Расчёты проводились для энергий пионного пучка 50 - 60 Гэв. При варьировании переданного импульса ($|p_3^{el}|^2 = 2m\,\mathcal{E}'_{el}$) значения энергии электрона отдачи $\mathcal{E}'_{el}$ не превышали $0{,}9\,\mathcal{E}'^{\,max}_{el}$. Это объясняется тем, что неупругая часть радиационных поправок нормируется на сечение упругого πe -рассеяния, которое близко к нулю, когда $\mathcal{E}'_{el}$ стремится к $\mathcal{E}'^{\,max}_{el}$.

Погрешность в измерении энергии электрона отдачи $\frac{\Delta_m \mathcal{E}'}{\mathcal{E}'_{el}}$ менялась в пределах 1 ÷ 7%.

В заключение мы выражаем благодарность Г.В.Мицельмахеру за советы и помощь в проведении численных расчётов на ЭВМ.

Мы благодарны также С.М., Биленькому, В.Г.Гришину, Г.И. Копылову, М.И.Подгорецкому за ценные критические замечания и полезные дискуссии.

Литература

1. A.S. Fubini, Y. Nambu, V. Watagin, Phys.Rev., 111, 329, 1958.
2. C.W. Akerlof et al., Phys.Rev.Lett., 16, 147, 1966.
3. C.W. Akerlof et al., Phys.Rev., 163, 1482, 1967.
4. M. Sternheim, R. Hofstadter, Nuovo Cim., 38, 1854, 1965.
5. L.I. Shiff, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 400, 1965.
6. M.E. Nordberg, K.F. Kinsey, Phys.Lett., 20, 692, 1966.
7. M.M. Block, Phys.Lett., 25B, 604, 1967.
8. M.M. Block et al., Phys.Rev., 169, 1074, 1968.
9. F.S. Crowford, Phys.Rev., 117, 1119, 1960.
10. В.Г.Гришин, Э.П.Кистенев, Му Цэюнь, ЯФ, 2, 886, 1965.
11. I. Allan et al., Nuovo Cim., 32, 1144, 1964.
12. Л.Б.Окунь, И.Б.Хриплович, ЯФ, 6, 821, 1967.
13. С.М.Биленький, В.Б.Семикоз, ЯФ, 7, 107, 1968.
14. В.Г.Горячкин, В.Б.Семикоз, ЯФ, 8, 776, 1968.
15. C. Mistretta et al., Vienna Conference, 489, 1968.
16. J. Kahane, Phys.Rev., 135, 4B, 975, 1964.

17. Y.S. Tsai, Phys.Rev., 120, 269, 1960.
18. A.S. Krass, Phys.Rev., 125, 2172, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 ноября 1968 года.