ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4175

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Н.Боголюбов (мл.)

О ПРИНЦИПЕ МИНИМАКСА ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1968

Р2 - 4175

Н.Н.Боголюбов (мл.)

О ПРИНЦИПЕ МИНИМАКСА ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в ЯФ

В работах [1-5] предложены подходы к изучению модельных задач как с положительным, так и с отрицательным парным взаимодействием. Были изучены глубокие связи между аппроксимирующими гамильтонианами, свободными энергиями, корреляционными функциями и функциями Грина. При этом выяснены существенные отличия между методами решения задач с положительным взаимодействием и задач с отрицательным взаимодействием.

Отметим, что в первом случае (задачи с положительным взаимодействием) константы C, входящие в аппроксимирующий гамильтониан $H_0(C)$, определялись из условия максимума свободной энергии, построенной на основе $H_0(C)$. Во втором случае (задачи с отрицательным взаимодействием) константы S, входящие в аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_0(S)$, определялись из условия абсолютного минимума свободной энергии, построенной на основе $\mathcal{H}_0(S)$.

В работах [2,4] предложены методы для получения асимптотически точных результатов для корреляционных функций свободных энергий как для задач первого, так и для задач второго типа. Однако ни один из развиваемых там методов не мог быть применен к модельным задачам более общего вида, содержащим сразу члены с положительным и отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием.

Поэтому здесь мы предложим методику для исследования этой гораздо более сложной проблемы.

Мы покажем, что такая модельная система также принадлежит к числу точно решаемых модельных задач и найдем для нее выражение для свободной энергии.

Исследуемая модельная система с положительным и отрицательным четырехфермионным парным взаимодействием характеризуется гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = T + 2V \sum_{\alpha=1}^{m} \mathcal{Z}_\alpha \overset{+}{\mathcal{Z}}_\alpha - 2V \sum_{\alpha=1}^{r} \mathcal{J}_\alpha \overset{+}{\mathcal{J}}_\alpha, \tag{1}$$

где $T = \sum_f T_f \overset{+}{a}_f a_f$ – оператор кинетической энергии,

$$\mathcal{Z}_\alpha = \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \lambda_f^\alpha \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f}, \qquad \mathcal{J}_\alpha = \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \Omega_f^\alpha \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} -$$

операторы взаимодействия $T_f = \frac{p^2}{2m} - \mu$, μ – химический потенциал, a_f, a_f – операторы, для которых справедливы обычные коммутационные соотношения статистики Ферми, $f = (p, s)$, $-f = (-p, -s)$ – совокупность импульса p и спина s. Импульс p принимает обычные квазидискретные значения при фиксированном значении объема системы V. Условия, накладываемые на функции λ_f^α и Ω_f^α, будут такими же, как и в работах /1-3/.

Вклад в энергию гамильтониана $\mathcal{H}$ (1) от взаимодействия фермионов с противоположными импульсами и спинами, обуславливающего притяжение фермионов в системе, определяется оператором

$$-2V \sum_{\alpha=1}^{r} \mathcal{J}_\alpha \overset{+}{\mathcal{J}}_\alpha.$$

Аналогично этому отталкивание фермионов в системе характеризуется оператором:

$$2V \sum_{\alpha=1}^{m} \mathcal{Z}_\alpha \overset{+}{\mathcal{Z}}_\alpha.$$

Запишем теперь гамильтониан $\mathcal{H}$ (1) в виде

$$\mathcal{H} = T' - 2V \sum_{\alpha=1}^{r} \mathcal{J}_\alpha \overset{+}{\mathcal{J}}_\alpha, \tag{1-a}$$

где

$$T' = T + 2V \sum_{a=1}^{m} \cdot \mathfrak{Z}_a \overset{+}{\mathfrak{Z}}_a .$$

Из условий, накладываемых на функции λ_f^a и Ω_f^a, а также из формы операторов $\mathfrak{J}_a, \mathfrak{Z}_a$ следует, что операторы T', $\mathfrak{J}_a$, $\overset{+}{\mathfrak{J}}_a$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям:

$$|\mathfrak{J}_a| \leq K_1 , \quad |T'\mathfrak{J}_\beta - \mathfrak{J}_\beta T'| \leq K_2$$

$$|\overset{+}{\mathfrak{J}}_a \mathfrak{J}_\beta - \mathfrak{J}_\beta \overset{+}{\mathfrak{J}}_a| \leq \frac{K_3}{V}, \quad \mathfrak{J}_a \mathfrak{J}_\beta - \mathfrak{J}_\beta \mathfrak{J}_a = 0 \tag{3}$$

$$(1 \leq a \leq r), \quad (1 \leq \beta \leq r),$$

где K_1, K_2, K_3 – некоторые постоянные при $V \to \infty$ [x].

Перед тем как мы непосредственно приступим к доказательству близости свободных энергий, построенных на основе модельного гамильтониана (1) и соответствующего аппроксимирующего, рассмотрим вспомогательную задачу с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(S) = T + 2V \sum_{1 \leq a \leq m} \mathfrak{Z}_a \overset{+}{\mathfrak{Z}}_a - 2V \sum_{1 \leq a \leq r} (S_a \overset{+}{\mathfrak{J}}_a + \overset{*}{S}_a \mathfrak{J}_a) + 2V \sum_{1 \leq a \leq r} S_a \cdot \overset{*}{S}_a .$$

Здесь S_a, $(a = 1, 2, 3, \ldots, r)$ – некоторые постоянные. Ясно, что при $S_a = 0$, $\mathcal{H}(0) = T'$. Этот гамильтониан тождественным образом перепишем в виде

$$\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}_0(C, S) + 2V \sum_{a=1}^{m} (\mathfrak{Z}_a - C_a)(\overset{+}{\mathfrak{Z}}_a - \overset{*}{C}_a), \tag{4}$$

---

x) Отметим также, что из вышеприведенных дополнительных условий следует, что свободная энергия, вычисленная на единицу объема для гамильтониана T' (2), конечна, т.е.

$$\mathcal{F}_{T'} = -\frac{\theta}{V} \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{T'}{\theta}} < \infty .$$

где аппроксимирующий гамильтониан

$$\mathcal{H}_0(C,S) = T + 2V\sum_{a=1}^{m}(C_a \overset{+}{\mathcal{Z}}_a + \overset{*}{C}_a \mathcal{Z}_a) -$$
$$- 2V\sum_{a=1}^{m} C_a \overset{*}{C}_a - 2V\sum_{a=1}^{r}(S_a \overset{+}{\mathcal{J}}_a + \overset{*}{S}_a \mathcal{J}_a) + 2V\sum_{a=1}^{r} S_a \overset{*}{S}_a. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\mathcal{H}(S) \geq \mathcal{H}_0(C,S),$$

так как

$$2V\sum_{a=1}^{m}(\mathcal{Z}_a - C_a)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_a - \overset{*}{C}_a) \geq 0.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} \geq \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)} . \tag{6}$$

Это неравенство показывает, что свободная энергия, вычисленная на единицу объема для вспомогательной модельной системы (4), больше или равна свободной энергии на единицу объема, построенной на основе аппроксимирующего гамильтониана (5).

Чтобы сделать аппроксимацию возможно более хорошей, в неравенстве (6) следует выбрать наибольшее значение $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}$ из всех возможных. Это наибольшее значение функции $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}$ при фиксированных значениях постоянных $S_1,\dots S_r$ будем называть

$$\max_{(C)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}.$$

В точке максимума функции $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}}{\partial C_a} = 0.$$

Отсюда получаем m уравнений для определения постоянных $C_a (1 \le a \le m)$, входящих в аппроксимирующий гамильтониан

$$< \mathcal{Z}_a >_{\mathcal{H}_0(C,S)} = C_a, \quad (1 \le a \le m). \tag{7}$$

Итак, в отличие от хорошо известного приема /3/, постоянные C_a, входящие в аппроксимирующий гамильтониан (5) вспомогательной задачи, определяются из условия абсолютного максимума свободной энергии, построенной на основе (5). Покажем теперь, что положительная разность свободных энергий на единицу объема

$$\{ \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)} \}$$

ограничена сверху корреляционной функцией

$$2 \sum_{a=1}^{m} < (\mathcal{Z}_a - C_a)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_a - \overset{*}{C}_a) >_{\mathcal{H}_0(C,S)}.$$

Для этого введем промежуточный гамильтониан

$$\mathcal{H}_t(S) = \mathcal{H}_0(C,S) + t \cdot 2V \cdot \sum_{a=1}^{m} (\mathcal{Z}_a - C_a)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_a - \overset{*}{C}_a), \tag{8}$$

который при $t = 0$ совпадает с $\mathcal{H}_0(C,S)$, а при $t = 1$,

$$\mathcal{H}_t(S) /_{t=1} = \mathcal{H}(S).$$

Рассмотрим конфигурационный интеграл

$$Q_t = \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{\mathcal{H}_t(S)}{\theta}}$$

и свободную энергию для промежуточного гамильтониана

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(S)} = -\frac{\theta}{V} \ln Q_t. \tag{9}$$

Вычисляя вторую производную по параметру t от выражения (9), можно показать, что

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(s)}}{\partial t^2} \le 0 .$$

В силу этого первая производная

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(s)}}{\partial t} = 2 \sum_{\alpha=1}^{m} \langle (\mathcal{Z}_\alpha - C_\alpha)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_\alpha - \overset{*}{C}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_t(s)}$$

уменьшается с увеличением параметра t. Далее

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(s)}}{\partial t} dt = \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,s)} ,$$

но для

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(s)}}{\partial t} dt$$

имеем оценку

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t(s)}}{\partial 5t} dt \le \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,s)}}{\partial t} dt = 2 \sum_{\alpha=1}^{m} \langle (\mathcal{Z}_\alpha - C_\alpha)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_\alpha - \overset{*}{C}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_0(C,s)} .$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,s)} \le 2 \sum_{\alpha=1}^{m} \langle (\mathcal{Z}_\alpha - C_\alpha)(\overset{+}{\mathcal{Z}}_\alpha - \overset{*}{C}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_0(C|s)} . \qquad (10)$$

Отметим, что поскольку аппроксимирующий гамильтониан (5) – квадратичная форма из ферми-операторов, то ее можно диагонализовать, и по известным правилам К. Блоха, Вика и С. Доминициса вычислить корреляционную функцию, стоящую в правой части неравенства (10).

В результате после несложных вычислений с учетом неравенств (6) и (10) имеем оценки:

$$0 \le \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c,s)} \le \frac{Q}{V}, \qquad (11)$$

где $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c,s)}$ – максимальное значение при фиксированных значениях s, Q – некоторая постоянная.

В связи с нашей дальнейшей программой сделаем некоторые замечания по поводу неравенств (11). Из уравнений (7) C можно найти как функцию от s

$$C = C(S)$$

или в подробной записи: $(1 \le a \le m)$.

$$C_a = C_a(S_1, \dots S_r).$$

Подставляя найденные значения C_a в функцию $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c,s)}$ неравенства (11), получим

$$0 \le \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)} \le \frac{Q}{V}. \qquad (12)$$

Неравенства (12) справедливы при любых значениях s, $\{s_1, \dots s_r\}$, а также для тех $\{s_1, \dots s_r\}$, при которых функция $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)}$ припимает минимальное значение.

Из неравенств (12), как нетрудно показать, будет следовать, что [x)]

---

x) Поскольку

$$0 \le \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)} \le \frac{Q}{V},$$

то из этого неравенства следует (13). В самом деле, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} \le \frac{Q}{V} + \min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)}$.
Но функция $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)}$ всегда больше своего минимума $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} \ge \min \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)}$,
поэтому

$$\min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)} - \min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)} \le \frac{Q}{V}.$$

Аналогичным путем можно доказать неравенство

$$\min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(c(s),s)} \le \min_{(s)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(s)}.$$

$$0 \leq \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} - \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C(S),S)} \leq \frac{Q}{V}. \tag{13}$$

Задачу о гамильтониане (1-а) решим по известному методу /3/. Здесь по построению аппроксимирующий гамильтониан для задачи (1-а) является основным гамильтонианом вспомогательной задачи $\mathcal{H}(S)$ – (4).

В результате получим неравенства

$$0 \leq \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \leq \epsilon\left(\frac{1}{V}\right). \tag{14}$$

В этом неравенстве $\min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)}$ означает абсолютный минимум функции $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)}$. $\epsilon\left(\frac{1}{V}\right)$ – мажорационное выражение, которое при $V \to \infty$ стремится к нулю. Принимая во внимание неравенства (13) и (14), получим

$$\left|\mathcal{F}_{\mathcal{H}} - \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C(S),S)}\right| \leq \left|\min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} - \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C(S),S)}\right| +$$

$$+ \left|\min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}(S)} - \mathcal{F}_{\mathcal{H}}\right| \leq \epsilon\left(\frac{1}{V}\right) + \frac{Q}{V}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $V \to \infty$. Следовательно, мы показали, что разность свободных энергий на единицу объема V, построенных на основе модельной системы (1) и соответствующей аппроксимирующей (5), при дополнительных коммутационных соотношениях (3) стремится к нулю при $V \to \infty$. Из этого следует, что при $V \to \infty$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} - \min_{(S)} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C(S),S)} \to 0.$$

Таким образом, мы доказали, что для системы (1) можно построить асимптотически точное решение и найти выражение для свободной энергии.

В заключение подчеркнем, что при построении доказательства для нахождения асимптотически точного решения для модельной системы (1) мы основывались на аппроксимирующем гамильтониане (5), который зависел от параметров $C_1, \dots C_m$ и $S_1, \dots S_r$. Решая вспомогательную задачу, мы строим свободную энергию $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_0(C,S)}$ на основе аппроксимирующего гамильтониана $\mathcal{H}_0(C,S)$ – (5). Из условия абсолютного максимума этой свободной энергии по параметрам $C_1, C_2, \dots C_m$ при фиксированных значениях параметров $S_1, S_2, \dots S_r$ получаем m уравнений (7) для определения $C = C(S)$. Далее подставляем эти значения $C(S)$ в аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_0(C,S)$ и записываем его как

$$\mathcal{H}_0(C(S),S).$$

Рассматривая основную задачу, строим свободную энергию $\mathcal{F}\,\mathcal{H}_{0(C(S),S)}$ на основе этого гамильтониана и в окончательных мажорационных неравенствах берем абсолютный минимум свободной энергии уже по параметрам $S_1, \dots S_2$, т.е.

$$\min_{(S)} \mathcal{F}\,\mathcal{H}_0(C(S),S).$$

Таким образом, при построении асимптотически точного решения для модельной задачи статистической физики мы пришли к принципу минимакса.

Пользуясь случаем, выражаю свою признательность Н.Н. Боголюбову за ценные замечания.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов (мл.). Препринт ИТФ 68-65, 1968, Киев.
2. Н.Н. Боголюбов (мл.). Препринт ИТФ 68-67, 1968. Киев.
3. N.N.Bogolubov. Jr. Physica 32, 1966, 933-944.
4. Н.Н. Боголюбов (мл.). ДАН СССР, том 168, №4, 1966.
5. N.N.Bogolubov.Jr. Препринт ИТФ, Киев, ИТФ-67-1, The Correlation Functions in the Theory of Superconductivity. (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1968 года.