ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4167

В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБ ОДНОМ НОВОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1968

P2 - 4167

В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

ОБ ОДНОМ НОВОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в ЯФ

1. Введение

Уравнения Чу-Лоу [1] для p-волн πN -рассеяния имеют вид

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Im}\, h_i(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{\sum A_{ij}\,\mathrm{Im}\, h_j(\omega')}{\omega'+\omega}\right) d\omega', \qquad (1.1)$$

где $\omega = \sqrt{q^2+\mu^2}$ - энергия мезона,

$$h_j(\omega) = \frac{e^{i\delta_j(\omega)}\sin\delta_j(\omega)}{q^3\, u^2(q^2)}$$

$\delta_j(\omega)$ - действительная фаза рассеяния в состоянии j, $u(q^2)$ -фурье-образ функции источника, A_{ij} -матрица перекрестной симметрии, а числа λ_i пропорциональны квадрату константы связи мезон-нуклонного взаимодействия и $\sum_j A_{ij}\lambda_j = -\lambda_i$.

Впервые уравнения (1.1) были получены из гамильтониана взаимодействия Чу-Лоу [2]. Однако их можно получить как статические пределы строго доказанных релятивистских дисперсионных соотношений [3]. Аналогичные уравнения могут быть установлены для высших волн πN -рассеяния и для других двухчастичных процессов. Все эти уравнения мы будем называть уравнениями типа уравнений Чу-Лоу. Они будут различаться по числу функций $h_i(\omega)$, виду матриц перекрестной симметрии, количеству вычитаний, наличию полюсных членов. Однако все эти уравнения определяют аналитические функции $S_i(\omega)$, где

$$S_i(\omega) = e^{2i\delta_i(\omega)} = 1 + 2iq^{2\ell+1} u^2(q^2) h_i(\omega)$$

со следующими основными свойствами[8]:

1) $S_i(\omega)$ –аналитические функции в комплексной плоскости ω с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$;

2) $S_i^*(\omega) = S_i(\omega^*)$; (1.2)

3) $|S_i(\omega + i0)|^2 = 1$ для $\omega > 1$ – условие унитарности;

4) $S_i(-\omega) = \sum_j A_{ij} S_j(\omega)$.

Здесь A– квадратная матрица $n \times n$ со свойствами[10,13]

$$A^2 = I, \quad \sum_j A_{ij} = 1.$$

Исследованию уравнений типа уравнений Чу–Лоу посвящено большое количество работ[4–16]. Однако в настоящее время полное решение этих уравнений найдено только для двухрядной матрицы перекрестной симметрии[6–8].

В работах[6,11] было показано, что конформное преобразование

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$$

приводит к униформизации функций $S_i(\omega)$. В переменной w условия (1.2) принимают следующий вид[10]:

1) $S(w)$ – столбец мероморфных в плоскости w функций;

2) $S^*(w) = S(w^*)$; (1.3)

3) $S(1-w) = I\,S(w)$ – условие унитарности;

4) $S(1+w) = IAS(w)$,

где через I мы обозначили такую нелинейную операцию, что

$$IS(w) = \begin{pmatrix} 1/S_1(w) \\ 1/S_2(w) \\ \dots \\ 1/S_n(w) \end{pmatrix}$$

Как известно /6,10/, условия (1.3) не определяют функции S_i однозначно. Если найдены функции S_i, удовлетворяющие условиям (1.3), то функции $S_i[w+\beta(w)]D(w)$, где

$$D(w)D(1-w)=1, \quad D(w)=D(-w), \quad D^*(w)=D(w^*)$$

$$\beta(w)=\beta(w+1), \quad \beta(w)=-\beta(-w), \quad \beta^*(w)=\beta(w^*)$$

также удовлетворяют этим условиям.

Отвлекаясь от β и D -произволов, мы будем говорить о "скелетных" решениях и их классификации.

В ряде работ/6,8,9/ для трехрядной и четырехрядной матриц перекрестной симметрии был найден класс решений уравнений типа уравнений Чу-Лоу, для которых любое из отношений S_i/S_j обладает только конечным числом полюсов. В работах/10,12/ был развит метод построения решений этого класса для матрицы перекрестной симметрии произвольного порядка.

Представляет интерес выяснить, имеются ли решения иного класса, а именно, решения, для которых хотя бы одно $S_i(w)/S_j(w)$ обладает бесконечным числом полюсов. Ниже мы дадим положительный ответ на этот вопрос.

II. Исследование функциональных уравнений типа уравнений Чу-Лоу Неподвижные точки

Как следует из (1.3), задача сводится к решению системы нелинейных функциональных уравнений

$$IS(w) = S(1-w)$$

$$S(w+1)=IAS(w) \tag{2.1}$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w. Настоящее исследование относится к матрице A (1.1)

$$A(1,1)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Введем отношения

$$X_{ik}(w) = \frac{S_i(w)}{S_k(w)}$$

$$X_{jk}(w) = \frac{S_j(w)}{S_k(w)}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Тогда $X_{ik}(w)$ и $X_{jk}(w)$, как это следует из (2.1) и (2.2), подчиняются следующей системе функциональных уравнений

$$X_{ik}(w+1) = \frac{A_{ki} X_{ik}(w) + A_{kj} X_{jk}(w) + A_{kk}}{A_{ii} X_{ik}(w) + A_{ij} X_{jk}(w) + A_{ik}} \tag{2.3}$$

$$X_{jk}(w+1) = \frac{A_{ki} X_{ik}(w) + A_{kj} X_{jk}(w) + A_{kk}}{A_{ji} X_{jk}(w) + A_{jj} X_{jk}(w) + A_{jk}}$$

$$X_{ik}(w)\, X_{ik}(1-w) = 1$$

$$X_{jk}(w)\, X_{jk}(1-w) = 1.$$

Будем рассматривать эти уравнения как преобразование плоскости $X_{ik}(w), X_{jk}(w)$ в плоскость $X_{ik}(w+1), X_{jk}(w+1)$ /16/. Найдем неподвижные точки этого преобразования. Для матрицы A (1.1) они определяются из алгебраического уравнения 4-го порядка. Оно имеет двукратный корень $X_{jk} = 1$ (для любых j и k) и два различных вещественных корня $X_{jk,1}$ и $X_{jk,2}$, удовлетворяющих условиям

$$X_{jk,1} \cdot X_{jk,2} = 1 \tag{2.4}$$

$$X_{jk,1} + X_{jk,2} = \frac{(A_{kk} - A_{jj})(A_{kj} - A_{jk}) + A_{ji} A_{ki}}{A_{jj} A_{kk}} - 2.$$

---

x/ Здесь и далее не предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Система уравнений (2.3) позволяет получить нелинейное функциональное уравнение, содержащее только X_{jk}, зависящее от аргументов w, $w+1$, $w+2$;

$$\frac{A_{jj} X_{jk}(w+2) X_{jk}(w+1) + A_{jk} X_{jk}(w+2) - A_{kj} X_{jk}(w+1) - A_{kk}}{A_{kl} - A_{jj} X_{jk}(w+2)} = \tag{2.5}$$

$$= \frac{(A_{kl} X_{jk}(w) - A_{jl}) X_{jk}(w+1)}{A_{jj} - A_{kk} X_{jk}(w) X_{jk}(w+1) + A_{jk} X_{jk}(w+1) - A_{kj} X_{jk}(w)}$$

Общие методы решения таких уравнений нам не известны. Будем искать решения уравнения (2.5), для которых

$$X_{jk}(w+1) = f[X_{jk}(w)],$$

где $f[X_{jk}(w)]$ есть мероморфная функция $X_{jk}(w)$. Из условия унитарности следует, что, если такая связь существует, то преобразование $X_{jk}(w+1) \to X_{jk}(w)$ должно быть взаимно-однозначным. Единственным взаимно-однозначным преобразованием является дробно-линейное (см., например, /17/). Поэтому найдем все решения (2.5), для которых

$$X_{jk}(w+1) = \frac{a X_{jk}(w) - \beta}{X_{jk}(w) + a - \gamma} . \tag{2.6}$$

Из условия унитарности следует, что $\beta = 1$. Характер решения уравнения (2.6) существенно зависит от типа дробно-линейного преобразования (2.6). Выше было установлено, что для матрицы A (1.1) возможны два варианта:

две неподвижные точки совпадают $X_{jk} = 1$;

имеются две различные неподвижные точки, удовлетворяющие условиям (2.4).

При совпадающих неподвижных точках преобразование (2.6) называется параболическим[18] и сводится к виду ($\gamma = 2$)

$$\frac{1}{X_{jk}(w+1)-1} = \frac{1}{X_{jk}(w)-1} + \frac{1}{a-1}. \tag{2.7}$$

Введем функцию $\phi_{jk}(w) = \dfrac{1}{X_{jk}(w)-1}$. Тогда $\phi_{jk}(w)$ подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} &\phi_{jk}(w+1) = \phi_{jk}(w) + \frac{1}{a-1} \\ &\phi_{jk}(1-w) + \phi_{jk}(w) = -1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Общее решение этих двух уравнений есть

$$\phi_{jk}(w) = \frac{1}{a-1}\left(w - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \beta(w),$$

где $\beta(w) = \beta(w+1)$, $\beta(-w) = -\beta(w)$. Подставляя $X_{jk}(w) = \dfrac{1+\phi_{jk}(w)}{\phi_{jk}(w)}$ в уравнение (2.5) с учётом первого из уравнений (2.8) легко показать (определяя параметр a), что единственными решениями параболического типа для матрицы A (1,1) являются найденные в[10] решения с конечным числом полюсов.

При наличии двух различных неподвижных точек преобразование (2.6) называется гиперболическим[18] и приводится к виду ($\gamma = \dfrac{X^2_{jk,1}+1}{X_{jk,1}}$ (см. (2.4)):

$$\frac{X_{jk,1}X_{jk}(w+1)-1}{X_{jk}(w+1)-X_{jk,1}} = \frac{1}{X_{jk,1}} \frac{X_{jk,1}a-1}{a-X_{jk,1}} \cdot \frac{X_{jk,1}X_{jk}(w)-1}{X_{jk}(w)-X_{jk,1}}. \tag{2.9}$$

Введем функцию

$$\Phi_{jk}(w) = \frac{X_{jk,1}X_{jk}(w)-1}{X_{jk}(w)-X_{jk,1}}. \tag{2.10}$$

Тогда $\Phi_{jk}(w)$ подчиняется уравнениям

$$\Phi_{jk'}(w+1) = \lambda\,\Phi_{jk}(w) \qquad\qquad (2.11)$$

$$\Phi_{jk}(1-w)\,\Phi_{jk}(w) = 1,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{X_{jk,1}}\;\frac{X_{jk,1}\,a-1}{a-X_{jk,1}}.$$

Общее решение системы (2.11) есть

$$\Phi_{jk}(w) = \pm\, e^{\ln\lambda\,(w+\beta(w)-\frac{1}{2})}, \qquad (2.12)$$

где $\beta(w+1)=\beta(w)$, $\beta(-w)=-\beta(w)$ – известный β – произвол. Подставляя

$$X_{jk}(w) = \frac{X_{jk,1}\,\Phi_{jk}(w)-1}{\Phi_{jk}(w)-X_{jk,1}} \qquad (2.13)$$

в (2.5) с учётом первого из уравнений (2.11), находим, что решение гиперболического типа для матрицы А (1.1) реализуется в единственном случае, а уравнение (2.6) имеет вид ($a = -1$, а $\lambda = \frac{1}{X_{jk,1}}$)

$$X_{12}(w+1) = \frac{-X_{12}(w)-1}{X_{12}(w)-8}. \qquad (2.14)$$

Решения этого типа содержат бесконечное число полюсов. Прежде чем перейти к заключительной стадии построения $S_1(w)$ в этом случае, заметим, что подобное исследование для трехрядной матрицы $A^{\text{Ч-Л}}$ приводит к выводу, что единственным решением, подчиняющимся, хотя бы для одного $S_1(w)/S_j(w)$, преобразованию (2.6), является известное решение с конечным числом полюсов/6,10/. Отметим также. что подобное рассмотрение можно провести для матрицы перекрестной симметрии произвольного порядка.

III. Решения с бесконечным числом полюсов для матрицы A (1.1)

Как было показано выше, для матрицы A (1.1) имеется решение $X_{12}(w)$ (в дальнейшем мы опускаем индексы 12), подчиняющееся дробно-линейному преобразованию гиперболического типа (2.14) с двумя неподвижными точками (см. (2.4))

$$X_{1,2} = \frac{1}{2}\,(7 \pm 3\sqrt{5}\,).$$

Система (2.11) имеет два решения $\left(a = -1,\ \lambda = \frac{1}{X_1}\right)$

$$\begin{aligned} &1. \quad \Phi(w) = +\,e^{-c(w-1/2)} \\ &2. \quad \Phi(w) = -\,e^{-c(w-1/2)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $c = \ln X_1$. Здесь мы опускаем известный β-произвол, так как всегда можно заменить w на $w+\beta(w)$. Тогда для $X(w)$ с помощью (2.13) получаем соответственно 2 решения

$$\begin{aligned} &1. \quad X(w) = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{2}\left(w-\frac{3}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{c}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)} \\ &2. \quad X(w) = \frac{\operatorname{ch}\frac{c}{2}\left(w-\frac{3}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{c}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Перейдем к построению самих $S_1(w')$, соответствующих этим двум решениям. Легко заметить, что уравнение (2.14) вместе с уравнением (2.3) приводит к нахождению инвариантной относительно операций A и I связи

$$X_{32}(w) = -1 \quad \text{т.е.} \quad S_3(w) = -S_2(w).$$

Как известно (см., например, /10/), $S_1(w)$ выражается следующим образом через свои нечётную и чётную части

$$S_1(w) = \left\{ \begin{array}{l} 2a(w) - \frac{3}{2} s_1(w) + \frac{5}{2} s_2(w) \\ a(w) + s_1(w) \\ -a(w) + s_2(w), \end{array} \right\},$$

где a -нечётная, а s_1 и s_2 – чётные функции w. С учётом инвариантной связи $S_3(w) = -S_2(w)$, т.е. $s_1(w) = -s_2(w) = s(w)$ имеем

$$S_1(w) = \left\{ \begin{array}{l} 2a(w) - 4s(w) \\ a(w) + s(w) \\ -a(w) - s(w) \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

Поскольку

$$X(w) = \frac{S_1(w)}{S_2(w)} = \frac{2 - 4\frac{s(w)}{a(w)}}{1 + \frac{s(w)}{a(w)}}, \tag{3.4}$$

то $\frac{s(w)}{a(w)}$ для искомых двух решений есть

$$1. \quad \frac{s(w)}{a(w)} = \operatorname{th}\frac{c}{4} / \operatorname{th}\frac{c}{2} w,$$

$$(3.5)$$

$$2. \quad \frac{s(w)}{a(w)} = \operatorname{th}\frac{c}{4} \operatorname{th}\frac{c}{2} w.$$

Функция $\phi(w)=a(w)+s(w)$ удовлетворяет унитарности $\phi(w)\phi(1-w)=1$. Кроме того, $a(w)=\dfrac{\phi(w)}{1+s(w)/a(w)}$ является нечётной функцией w. Окончательно приходим к следующим системам функциональных уравнений на $\phi(w)$:

$$\phi(w)\phi(1-w)=1$$

1.
$$\frac{\phi(w)}{\operatorname{th}\frac{c}{4}/\operatorname{th}\frac{c}{2}w+1}=-\frac{\phi(-w)}{-\operatorname{th}\frac{c}{4}/\operatorname{th}\frac{c}{2}w+1}, \tag{3.6}$$

2.
$$\phi(w)\phi(1-w)=1$$
$$\frac{\phi(w)}{\operatorname{th}\frac{c}{4}\operatorname{th}\frac{c}{2}w+1}=-\frac{\phi(-w)}{-\operatorname{th}\frac{c}{4}\operatorname{th}\frac{c}{2}w+1}. \tag{3.6}$$

Для решения функциональных уравнений в системах (3.6,1) и (3.6,2) их достаточно прологарифмировать, тогда первое из уравнений в этих системах дает, что $\phi(w)=\exp\left[g\left(w-\frac{1}{2}\right)\right]$, где $g(w)$ – любая нечётная функция w. Из вторых уравнений (3.6) получаем уравнения для $g(w)$

1. $$g(w+1)+g(w)=\ln-\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{2}(w+1)}{\operatorname{sh}\frac{c}{2}w},$$

$$\tag{3.7}$$

2. $$g(w+1)+g(w)=\ln-\frac{\operatorname{ch}\frac{c}{2}(w+1)}{\operatorname{ch}\frac{c}{2}w}.$$

Решение этих двух функциональных уравнений есть (см. Приложение):

1. $$g(w)=\ln\phi_{-}\left(w+\frac{1}{2}\right)+\alpha(w),$$

2. $$g(w)=\ln\phi_{+}\left(w+\frac{1}{2}\right)+\alpha(w). \tag{3.8}$$

$$\phi_{\pm}\left(w+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1\pm\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w-\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{k}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\right]}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1\pm\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w+\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{k}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\right]}$$

где

$$\alpha(w+1)=-\alpha(w)$$

$$\alpha(-w)=-\alpha(w).$$

Окончательно для $S_1(w)$ имеем два решения с бесконечным числом полюсов

$$1.\quad S(w)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\mathrm{sh}\,\frac{c}{2}\left(w-\frac{3}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\frac{c}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)}\\[2ex] 1\\[1ex] -1\end{matrix}\right\}\phi_{-}(w)$$

$$2.\quad S(w)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(w-\frac{3}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)}\\[2ex] 1\\[1ex] -1\end{matrix}\right\}\phi_{+}(w) \qquad (3.9)$$

$$\phi_{\pm}(w)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}w\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1\pm\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w-1-\frac{1}{2}(-1)^{k}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\right]}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1\pm\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w-1+\frac{1}{2}(-1)^{k}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k-\frac{1}{2}\right)}\right]}$$

Здесь мы опустили известный D –произвол

$$D(w)=e^{\alpha\left(w-\frac{1}{2}\right)}.$$

Обсуждение результатов

Остановимся на свойствах полученных решений. Полюса (нули) функций $\phi_{\pm}(w)$ для решений 1 и 2 расположены на линиях $\operatorname{Re} w = \pm k + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}((-1)^k \pm 1)$ $(\operatorname{Re} w = \pm k + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}((-1)^k \mp 1))$ с периодом $i\frac{2\pi}{c}$ и имеют точку сгущения на бесконечности. Система полюсов (нулей) в $S_2(w)$ и $S_3(w)$ общая, а отношение $S_1(w)/S_2(w)$ имеет бесконечное число полюсов (нулей) на линии $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$ $(\operatorname{Re} w = \frac{3}{2})$ с периодом $i\frac{2\pi}{c}$. Легко видеть, что нули и полюса, содержащиеся в отношении $S_1(w)/S_2(w)$, не дают вклада в $S_1(w)$, так как они компенсируются соответствующими полюсами и нулями функции $\phi(w)$. Вследствие этого функции $S_i(w)$ для двух найденных решений не имеют полюсов в полосе $-\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} w \le \frac{1}{2}$, то есть на физическом листе. Однако на нефизических листах число нулей и полюсов бесконечно.

Заметим, что на физическом листе функции $S_i(w)$ ограничены константой.

Таким образом, мы показали, что уравнения типа уравнений Чу-Лоу допускают решения, в которых хотя бы одно $S_i(w)/S_j(w)$ имеет бесконечное число полюсов в комплексной плоскости w. Общим свойством найденных решений и известных решений с конечным числом полюсов /6,9,10/ является то, что вдоль любого направления, параллельного вещественной оси, отношение $S_i(w)/S_j(w)$ имеет конечное число полюсов.

Авторы благодарны А.В.Ефремову, П.С.Исаеву, А.Т.Филиппову и Д.В.Ширкову за критические замечания и полезное обсуждение.

Приложение

Будем искать решение (3.7) 1)

$$g(w+1) + g(w) = \ln - \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{2}(w+1)}{\operatorname{sh}\frac{c}{2}w}$$

в виде $g(w) = g_n(w) + a_n(w)$, где

$$g_n(w) = \ln \frac{\prod_{k=1}^{n}\left[1 - \dfrac{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w-(-\frac{1}{2})(-1)^k)}{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2k-\frac{1}{2})}\right]}{\prod_{k=1}^{n}\left[1 - \dfrac{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w+(\frac{1}{2})(-1)^k)}{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2k-\frac{1}{2})}\right]} + \ln \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(w+\frac{1}{2})$$

Тогда для $a_n(w)$ получаем уравнение

$$a_n(w+1) + a_n(w) = \ln \frac{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2n+\frac{1}{2}) - \mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w+\frac{3}{2})}{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2n+\frac{1}{2}) + \mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w+\frac{1}{2})}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(w) = a(w)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$a(w+1) + a(w) = 0 \quad (a(-w) = -a(w)).$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(w) = \ln \frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \dfrac{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w-(\frac{1}{2})(-1)^k)}{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2k-1/2)}\right]}{\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \dfrac{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2w+(\frac{1}{2})(-1)^k)}{\mathrm{ch}\frac{c}{2}(2k-\frac{1}{2})}\right]} + \ln \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(w+\frac{1}{2})$$

существует и является мероморфной функцией в плоскости w с существенно особой точкой на бесконечности (см./17/, стр. 278).

Уравнение (3.7)2) решается аналогично и мы приходим к формуле (3.8)2).

Литература

1. F. Low. Phys.Rev., 97, 1392 (1955). G.C. Wick.Rev.Mod.Phys. 27, 339 (1955).
2. G. Chew, F. Low. Phys.Rev. 101, 1570 (1956).
3. G. Chew, M. Goldberger, F. Low, Y. Nambu. Phys.Rev. 106, 1337(1957).
4. L. Castillejo, R. Dalitz, F. Dyson. Phys.Rev. 101, 453 (1956).
5. G. Wanders. Nuovo Cimento 23, 816 (1962).

6. T. Rothelutner. Zs.Phys., 177, 287 (1964).
7. A. Martin, W.D. McGlinn. Phys.Rev. 136, B1515 (1964).
8. В.А.Мещеряков. ЖЭТФ 52, 648 (1966).
9. K. Huang and F.E. Low. Jor. Math.Phys. 6, 795 (1965).
10. В.А.Мещеряков. Препринт ОИЯИ, Р-2369, Дубна , 1965.
11. В.А.Мещеряков Phys.Lett., 24B, 63(1967) ДАН 174, 1054 (1967).
12. В.А.Мещеряков. "Метод решения статического предела дисперсионных уравнений рассеяния". Докторская диссертация, Дубна, 1967.
13. P.B. Fairlie. J. Math.Phys. 7, 811 (1966).
14. R.L. Warnock. Argonne preprint, 1967.
15. H.Mc Daniel, R.L. Warnock. CERN preprint TH. 905 (1968).
16. H.K. Kaiser. Preprint PHE 68-2, Berlin, (1968).
17. А.И.Маркушевич. Теория аналитических функций. т.1 "Наука", Москва, 1967.
18. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. "Высшие трансцендентные функции", т.3, "Наука", Москва, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1968 года.