ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4151

К.А.Бронников, Э.А.Тагиров

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ИЗОТРОПНОМ МИРЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 4151

К.А.Бронников, Э.А.Тагиров

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ИЗОТРОПНОМ МИРЕ

§1. Введение

Есть определенная надежда, что анализ применимости основных понятий и методов квантовой теории поля в пространственно-временном многообразии, отличающемся от мира Минковского, может пролить свет на некоторые проблемы этой теории вообще. С другой стороны, неоднократно высказывалась мысль, см., например, /1,2,3/, что геометрия пространства-времени в целом может определять некоторые (или в некоторой степени) свойства микромира. Геометрия Вселенной, по-видимому, существенно отличается от псевдоевклидовой, и, коль скоро квантовая теория поля адекватна динамике элементарных процессов, естественно пытаться искать в ее структуре проявления этой фундаментальной (если она существует) связи космологии и микромира.

Именно с этих позиций в качестве первого шага в работах /4/,/5/ было предпринято исследование квантовой теории свободного скалярного поля в мире де Ситтера. В частности, там было показано, что понятие свободной частицы, обычно связываемое с неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, может быть аналогичным образом связано с группой де Ситтера лишь с привлечением некоторой конкретной формулировки принципа соответствия. В данной работе делается попытка распространить методы и результаты /5/ на общий случай изотропных моделей Вселенной. Детально рассматриваются закрытые модели (группа движений O(4)), в заключение приводится модификация основных результатов для квазиевклидовой модели (группа движений $O(4)\times T_3$).

Изотропная закрытая Вселенная F_4 может быть геометрически представлена как гиперповерхность вращения

$$x^a x^a \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = \rho^2 f^2\left(\frac{x^0}{\rho}\right);$$

$$f > 0, \quad |f'| < 1, \tag{1.1}$$

в пятимерном псевдоевклидовом пространстве E_5 с метрикой

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^a dx^a .$$

Удобно выбрать параметр ρ так, чтобы $f(0) = 1$.

В координатах y^μ $(y^0 \equiv \eta)$, определяемых соотношениями

$$x^0 = \rho \int_0^\eta \sqrt{b^2(\eta') + \dot{b}^2(\eta')}\, d\eta' ; \; x^a = \rho b(\eta) n^a (y^1, y^2, y^3); \; n^a n^a = 1,$$

где $b(\eta) = f\left(\frac{x^0}{\rho}\right)$ и $\dot{b}(\eta) \equiv \frac{db}{d\eta}$, метрическая форма F_4 имеет вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu dy^\nu = \rho^2 b^2(\eta)(d\eta^2 - h_{ij}\, dy^i dy^j), \tag{1.2}$$

где $h_{ij} = \partial_i n^a \partial_j n^a$, $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial y^i}$, греческие индексы принимают значения от 0 до 3, латинские i, j, k – от 1 до 3, a, b – от 1 до 4. Если метрика задана в виде (1.2), то можно прийти к уравнению (1.1), положив $\eta = \int_0^{x^0/\rho} \sqrt{1 - [f'(\alpha)]^2}\, \frac{d\alpha}{f(\alpha)}$.

Пространству де Ситтера соответствует $b(\eta) = \frac{1}{\cos\eta}$, для модели Фридмана, когда $p = \frac{\epsilon}{3}$ или $p = 0$ (ϵ – плотность энергии, p – давление), соответственно $b(\eta) = \cos\eta$ или $b(\eta) = \cos^2\eta/2$ /6/.

§2. Уравнение поля

Как следует из /7/ и /5/, уравнение скалярного поля в римановом пространстве имеет вид

$$(\Box + m^2 + \frac{R}{6})\phi = 0, \qquad (c = h = 1), \tag{2.1}$$

где $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ – скалярная кривизна, $R_{\mu\nu} = R^{a}_{\mu\, a\nu}$ – тензор Риччи; знак тензора кривизны выбран так, что

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\sigma = R^{a}_{\sigma\mu\nu} A_a$$

для любого вектора A_a ; $\Box = \nabla^a \nabla_a$ – оператор д'Аламбера; ∇_a – символ ковариантной производной.

Уравнение (2.1) получается вариацией по ϕ (которое мы считаем вещественным) интеграла действия

$$A = \int L \sqrt{-g}\, d^4 y = \frac{1}{2}\int [g^{a\beta} \partial_a \phi \partial_\beta \phi - (m^2 + \frac{R}{6})\phi^2]\sqrt{-g}\, d^4 y , \tag{2.2}$$

где $d^4 y = dy^0 dy^1 dy^2 dy^3$. Варьируя интеграл (2.2) по $g^{\mu\nu}$, получим (метрический) тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = T^{can}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi^2 , \tag{2.3}$$

где $T^{can}_{\mu\nu}$ – канонический тензор энергии-импульса:

$$T^{can}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} L.$$

Тензор (2.3) обладает свойствами:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} ; \quad T^{a}_{\cdot a} = m^2 \phi^2 ; \quad \nabla^a T_{a\mu} = 0.$$

Перейдем к квантовой теории поля, задавая перестановочные соотношения на некоторой пространственно-подобной гиперповерхности Σ в F_4 :

$$[\phi(M), \phi(M')] = 0, \ [\partial_\mu \phi(M)\, d\sigma^\mu(M), \partial_\nu \phi(M')\, d\sigma^\nu(M')] = 0,$$

$$\int_\Sigma [\phi(M), \partial_\mu \phi(M')]\, f(M')\, d\sigma^\mu(M') = i f(M), \tag{2.4}$$

где $M, M' \in \Sigma, f(M)$ – произвольная функция, $d\sigma^{\nu}(M)$ – векторный элемент площади на Σ. В представлении Гайзенберга (которое фиксируется выбором Σ) оператор ϕ удовлетворяет уравнению (2.1) и начальным условиям (2.4). Выберем в качестве Σ гиперповерхность $\eta = 0$, тогда $d\sigma^{\mu} = \delta^{\mu o} \rho^2 \sqrt{h}\, d^3 y$.

В F_4 в силу (1.2) уравнение (2.1) имеет вид

$$\left[\frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta} b^2 \frac{\partial}{\partial \eta} - \Delta + m^2 \rho^2 b^2 + \frac{b + \ddot{b}}{b} \right] \phi = 0,$$

где $\Delta = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (\sqrt{h}\, h^{ik} \partial_k)$ –оператор Лапласа на сфере $n^a n^a = 1$.

Разделяя переменные, получим ϕ в виде разложения по гармоническим полиномам на сфере $n^a n^a = 1$:

$$\phi(\eta, y) = \frac{1}{b(\eta)\,\rho} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} u_{s\sigma}(\eta)\, P^{s\sigma}(y), \tag{2.5}$$

$$[\Delta + s(s+2)]\, P^{s\sigma}(y) = 0,$$

$$P^{s\sigma}(y) = \frac{\sqrt{2^s (s+1)}}{\pi \sqrt{2}}\, P^{\sigma}_{a_1 \ldots a_s} n^{a_1} \ldots n^{a_s}, \tag{2.6}$$

где симметричные по всем a_i тензоры $P^{\sigma}_{a_1 \ldots a_s}$ с нулевым следом на одной паре индексов ортонормированы:

$$P^{\sigma}_{a_1 \ldots a_s} P^{\sigma'}_{a_1 \ldots a_s} = \delta^{\sigma\sigma'}, \quad \sigma, \sigma' = 1, \ldots, (s+1)^2,$$

так что

$$\int P^{s\sigma}(y)\, P^{s'\sigma'}(y)\, d\sigma(y) = \delta^{ss'} \delta^{\sigma\sigma'}.$$

Здесь и далее $y = (y^1, y^2, y^3)$.

Очевидно, оператор $u_{s\sigma}(\eta)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{u} + [(s+1)^2 + m^2\rho^2 b^2(\eta)]u = 0 \tag{2.7}$$

Введем два его линейно-независимых решения $u_s^{\pm}(\eta)$, определяя их начальными условиями

$$u_s^{\pm}(0) = \frac{1}{\sqrt{s_0}}; \quad u_s^{\pm}(0) = \pm i\sqrt{s_0}, \quad s_0 = \sqrt{(s+1)^2 + m^2\rho^2}. \tag{2.8}$$

Задача Коши (2.7) (2.8) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра

$$u_s^{\pm}(\eta) = w^{\pm}(s_0,\eta) + 2m^2\rho^2\int_0^{\eta}[1 - b^2(\eta')]\,g(\eta,\eta')\,u_s^{\pm}(\eta')\,d\eta', \tag{2.9}$$

где функции

$$w^{\pm}(s_0,\eta) = \frac{1}{\sqrt{s_0}}e^{\pm i s_0\eta} \tag{2.10}$$

суть решения уравнения

$$\ddot{w} + s_0^2 w = 0 \tag{2.11}$$

при начальных условиях (2.8); функция

$$g(\eta,\eta') = -\operatorname{sign}(\eta - \eta')\begin{vmatrix} w_1(\eta') & w_2(\eta') \\ \dot{w}_1(\eta') & \dot{w}_2(\eta') \end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} w_1(\eta') & w_2(\eta') \\ w_1(\eta) & w_2(\eta) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(\eta - \eta')}{2s_0}\sin s_0(\eta - \eta')$$

есть фундаментальное решение уравнения (2.11); w_1 и w_2 - его любые линейно независимые решения. Очевидно,

$$(u_s^+(\eta))^* = u_s^-(\eta),$$

$$W(u_s^+, u_s^-) = u_s^+\dot{u}_s^- - \dot{u}_s^+ u_s^- = -2i \ .$$

Из уравнения (2.9) следует, что функцию $u_s^{\pm}$ можно аппроксимировать с любой точностью членами равномерно сходящейся последовательности итераций:

$$\underset{0}{u}{}_s^{\pm}(\eta) = w^{\pm}(s_0, \eta),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.12)$$

$$\underset{n+1}{u}{}_s^{\pm}(\eta) = w^{\pm}(s_0, \eta) + 2m^2\rho^2 \int_0^{\eta} [1-b^2(\eta)]\, g(\eta,\eta')\, \underset{n}{u}{}_s^{\pm}(\eta')\, d\eta' .$$

Этот метод удобен для отыскания асимптотических выражений при $s \gg m\rho$. Например, легко убедиться, что

$$u_s^+ u_s^- = \frac{1}{s+1}\left[1 - \frac{m^2\rho^2 b^2}{2(s+1)^2} + o\left(\frac{m^2\rho^2}{s^2}\right)\right]. \qquad (2.13)$$

Ясно, что при $m = 0$

$$u_s^{\pm}(\eta) = w^{\pm}(s+1, \eta) = \frac{e^{\pm i(s+1)\eta}}{\sqrt{s+1}} .$$

Оператор $u_{s\sigma}(\eta)$ в (2.5) может быть представлен в виде

$$u_{s\sigma}(\eta) = \frac{\sqrt{s_0}}{2} q_{s\sigma}(u_s^+ + u_s^-) + i\,\frac{p_{s\sigma}}{2\sqrt{s_0}}(u_s^- - u_s^+), \qquad (2.14)$$

где $q_{s\sigma} = u_{s\sigma}(0)$, $p_{s\sigma} = \dot{u}_{s\sigma}(0)$. Вследствие полноты системы гармонических полиномов на сфере $n^a n^a = 1$ и ввиду (2.5)

$$u_{s\sigma}(\eta) = \rho\, b(\eta) \int \phi(\eta, y)\, P^{s\sigma}(y)\, d\sigma(y)$$

$$\dot{u}_{s\sigma}(\eta) = \rho\, b(\eta) \int \left[\partial_0 \phi(\eta, y) + \frac{\dot{b}}{b}\phi(\eta, y)\right] P^{s\sigma}(y)\, d\sigma .$$

Из (2.4) следует:

$$[q_{s\sigma}, q_{s'\sigma'}]=0, \quad [p_{s\sigma}, p_{s'\sigma'}]=0,$$

$$[q_{s\sigma}, p_{s'\sigma'}] = i\delta_{ss'}\, \delta_{\sigma\sigma'} . \tag{2.15}$$

Пользуясь этими соотношениями, выражениями (2.5),(2.14) и теоремой сложения гармонических полиномов /8/, можно представить коммутатор полевых операторов $\phi(M)$, взятых в двух произвольных точках M_1, $M_2 \subset F_4$, в виде следующего ряда:

$$D(\eta_1, y_1; \eta_2, y_2) = i[\phi(M_1), \phi(M_2)] =$$

$$= \frac{i}{2b(\eta_1)b(\eta_2)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s+1}{2\pi^2} C_s^1 (n^a(y_1), n^a(y_2)) D_s(\eta_1, \eta_2),$$

где C_s^1 - полином Гегенбауэра и

$$D_s(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{i}[u_s^-(\eta_1) u_s^+(\eta_2) - u_s^+(\eta_1) u_s^-(\eta_2)].$$

Как известно, знание перестановочной функции D позволяет решить задачу Коши для уравнения (2.1) с начальными условиями на произвольной Σ.

Интересно отметить, что согласно /5/ в пространстве де Ситтера функция D при $m=0$ сосредоточена на световом конусе. С другой стороны, любое F_4 конформно пространству де Ситтера и, поскольку конформное отображение сохраняет световой конус, то, очевидно, и в любом F_4 функция D при $m=0$ также сосредоточена на конусе. Это естественное для поля с нулевой массой покоя свойство будет иметь место лишь при выборе уравнения поля в виде (2.1).

§3. Представления Фока

Следующим шагом в квантовании должно быть построение представления коммутационных соотношений. Для этого введем операторы /9/:

$$z^-_{s\sigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}(p_{s\sigma} - \sum_{t,r} T_{s\sigma,tr}\, q_{tr}), \quad z^+_{s\sigma} = (z^-_{s\sigma})^*, \tag{3.1}$$

где $T = S + iQ$ – произвольная симметричная матрица ($T_{s\sigma,tr} = T_{tr,s\sigma}$ с положительно определенной мнимой частью Q. Из (2.15) следует

$$[z^+_{s\sigma}, z^+_{tr}] = 0, \quad [z^-_{s\sigma}, z^+_{tr}] = Q_{s\sigma,tr}.$$

Обращая равенство (3.1), имеем

$$q_{s\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{z}^-_{s\sigma} + \tilde{z}^+_{s\sigma}), \quad p_{s\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} | (T^*_{s\sigma,tr}\, \tilde{z}^-_{tr} + T_{s\sigma,tr}\, \tilde{z}^+_{s\sigma,tr}), \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{z}^\pm_{s\sigma} = \sum_{tr} Q^{-1}_{s\sigma,tr}\, z^\pm_{tr}.$$

Вектор состояния $|0>$, определяемый равенствами

$$z^-_{s\sigma}|0> = 0, \qquad <0|0> = 1,$$

назовем квазивакуумом. При каждом **T** состояния $|s_1\sigma_1 \ldots s_N\sigma_N> = z^+_{s\sigma_1} \ldots z^+_{s_N\sigma_N}|0>$ (N – квазичастичные состояния) образуют базис некоторого представления Фока. Далее мы будем искать среди этих представлений такое, в котором $|s_1\sigma_1, \ldots, s_N\sigma_N>$ можно было бы считать состояниями с определенным числом частиц, равным N.

§4. Сохраняющиеся величины и инвариантные квазивакуумные состояния

Прежде всего, очевидно, квазивакуум такого представления должен быть инвариантным относительно группы движений пространства F_4. Ею, как легко видеть, является группа $0(4)$ с шестью генераторами

$$Z_{(ab)} = i\,\zeta^a_{(ab)}\,\partial_a, \quad \zeta^a_{(ab)} = \delta^a_j\,(n^b\partial_i n^a - n^a\partial_i n^b)\, h^{ij}$$

соответствующими вращениями в плоскостях (ab) объемлющего пространства E_5. Каждый вектор Киллинга $\zeta^{a}_{(ab)}$ определяет сохраняющуюся (не зависящую от выбора пространственно-подобной гиперповерхности Σ) величину

$$M_{(ab)} = \int_{\Sigma} \zeta^{a}_{(ab)} T_{a\beta} d\sigma^{\beta} .$$

Вычисляя эти интегралы согласно /5/, имеем:

$$M_{(ab)} = \sum_{s,\sigma,\tau} (s+1) q_{s+1,\sigma} \mathcal{P}^{\sigma\tau}_{(ab)\, s+1} p_{s+1,\tau} ,$$

где $\mathcal{P}_{(ab)\, s+1}$ — антисимметричные матрицы с элементами

$$\mathcal{P}^{\sigma\tau}_{(ab)\, s+1} = P^{\sigma}_{a_1..a_s a} P^{\tau}_{a_1..a_s b} - P^{\tau}_{a_1..a_s a} P^{\sigma}_{a_1...a_s b} .$$

Требование инвариантности квазивакуума относительно изометрий, выражаемое условиями

$$M_{(ab)} |0> = \mu_{(ab)} |0>$$

где μ—с— числа, приводит к равенствам

$$T_{s\sigma,t\tau} = \delta_{st}\, \delta_{\sigma\tau} T_s \qquad \mu_{(ab)} = 0 .$$

$T_s = S_s + iQ_s$, $Q_s > 0$ — произвольные числа.

Введем новые параметры λ_s вместо T_s:

$$T_s = i s_0 \frac{1-\lambda_s}{1+\lambda_s} , \quad |\lambda_s| < 1$$

и образуем новые операторы

$$c^{-}_{s\sigma} = \frac{1+\lambda_s}{\sqrt{1-|\lambda_s|^2}} \frac{z^{-}_{s\sigma}}{\sqrt{s_0}} ; \quad c^{+}_{s\sigma} = (c^{-}_{s\sigma})^{*},$$

подчиняющиеся каноническим перестановочным соотношениям

$$[c^{+}_{s\sigma}, c^{+}_{t\tau}] = 0, \quad [c^{-}_{s\sigma}, c^{+}_{t\tau}] = \delta_{st}\, \delta_{\sigma\tau} .$$

Естественно называть их операторами рождения и уничтожения квазичастиц. Выражения (3.2) значительно упрощаются:

$$q_{s\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2s_0(1-|\lambda_s|^2)}}\left[(1+\lambda^*_s)c^-_{s\sigma} + (1+\lambda_s)c^+_{s\sigma}\right],$$

$$p_{s\sigma} = -i\sqrt{\frac{s_0}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-|\lambda_s|^2}}\left[(1-\lambda^*_s)c^-_{s\sigma} - (1-\lambda_s)c^+_{s\sigma}\right], \tag{4.1}$$

и мы получаем окончательно для $M_{(ab)}$:

$$M_{(ab)} = i\sum_{s,\sigma,\tau} s\, c^+_{s\sigma}\, \mathcal{P}^{\sigma\tau}_{(ab)s}\, c^-_{s\tau}.$$

Итак, требование инвариантности квазивакуума относительно движений приводит к выделению класса представлений Фока, каждое из которых задается конкретным выбором последовательности параметров $\{\lambda_s\}$.

Далее, F_4 допускает конформные преобразования, из которых нам достаточно рассмотреть однопараметрическую подгруппу, определяемую генератором $Z_{(0)} = i\zeta^a_{(0)}\partial_a$, где вектор $\zeta^a_{(0)} = \delta^{a0}$ удовлетворяет обобщенному уравнению Киллинга $\nabla_\mu\zeta_\nu + \nabla_\nu\zeta_\mu = 2\frac{\dot b}{b}g_{\mu\nu}$. При $m = 0$, $T^a_a = 0$, а потому сохраняется интеграл

$$M_{(0)} = \int_\Sigma \zeta^a_{(0)} T_{a\beta}\, d\sigma^\beta.$$

Квазивакуум инвариантен относительно этих преобразований,

$$M_{(0)}|0\rangle = \mu_{(0)}|0\rangle, \tag{4.2}$$

только при $\lambda_s = 0$. Таким образом, при $m = 0$ мы получаем единственное представление Фока с инвариантным квазивакуумом, который поэтому можно называть вакуумом. При этом

$$M_{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{s,\sigma}(s+1)\left(c^-_{s\sigma}c^+_{s\sigma} + c^+_{s\sigma}c^-_{s\sigma}\right).$$

Наконец, для полевого оператора в общем случае равенства (2.5), (2.14) и (4.1) дают выражение:

$$\phi(\eta, y) = \frac{1}{\sqrt{2}\, b(\eta)\, \rho} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} P^{s\sigma}(y) \{ u_s(\eta) c^+_{s\sigma} + u^*_s(\eta) c^-_{s\sigma} \}, \tag{4.3}$$

где

$$u_s(\eta) = \frac{u_s^+ + \lambda_s u_s^-}{\sqrt{1 - |\lambda_s|^2}}.$$

§5. Принцип соответствия. Квазиклассический предел

Теперь мы рассмотрим ограничения, накладываемые на последовательность $\{\lambda_2\}$ принципом соответствия в следующей формулировке. Если амплитуды x)

$$\psi_{s\sigma}(\eta, y) = \langle 0 | \phi(\eta, y)\, c^+_{s\sigma} | 0 \rangle = \frac{u^*_s(\eta)\, P^{s\sigma}(y)}{\sqrt{2}\, \rho\, b(\eta)} \tag{5.1}$$

являются релятивистскими волновыми функциями частицы, они должны при больших s быть квазиклассическими. Это, конечно, лишь необходимое условие, вытекающее из интерпретации квантового числа s как квадрата пространственного импульса /5/. Оно означает, что при $s \to \infty$ среди $\psi_{s\sigma} = \sqrt{a}\, e^{iS}$ должны быть такие, что $a = |\psi_{s\sigma}|^2$ и $S = \arg \psi_{s\sigma}$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu}\, \partial_\mu S\, \partial_\nu S = m^2$$

и уравнению непрерывности

---

x) $\psi_{s\sigma}$, очевидно, ортонормированы относительно скалярного произведения в пространстве решений уравнения Клейна-Гордона (2.1)

$$(\phi, \psi) = i\rho^2 \int_{\eta=\mathrm{const}} (\phi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \phi^* \psi)\, d\sigma$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(a\partial_\nu S)=0$$

(подробности в [5]). Разделяя переменные

$$a=A(\eta)C(y), \qquad S=T(\eta)+U(y),$$

получаем четыре уравнения для функций A, C, T, U:

$$\dot{T}^2=m^2\rho^2b^2+\kappa^2, \quad \left(\frac{\dot{A}}{A}+2\frac{\dot{b}}{b}\right)\dot{T}+\ddot{T}=\xi; \tag{5.2}$$

$$h^{ij}\partial_i U\partial_j U=\kappa^2, \quad \frac{1}{C}h^{ij}\partial_i C\partial_j U+\Delta U=\xi, \tag{5.3}$$

где κ и ξ – вещественные константы разделения.

Рассмотрим сначала уравнения (5.2). Поскольку для функции (5.1)

$$\dot{T}=-\frac{1}{|u_s|^2}, \qquad A=\frac{|u_s|^2}{b^2\rho^2},$$

второе из уравнений (5.2) удовлетворяется, если положить $\xi=0$. Запишем первое, используя асимптотическое выражение (2.13):

$$\frac{\{(1-|\lambda_s|^2)(s+1)[1+\frac{m^2\rho^2b^2}{2(s+1)^2}+o(\frac{1}{s^2})]\}^2}{\{1+|\lambda_s|^2+2[1+\frac{m^2\rho^2b^2}{2(s+1)^2}+o(\frac{1}{s^2})]\,\mathrm{Re}[\lambda_s e^{-2is_0\eta}(1+o(1))]\}^2}= \tag{5.4}$$

$$=\kappa^2+(m\rho b)^2.$$

Отбрасывая все члены порядка меньше $(s+1)^2$, получаем

$$\kappa^2=(s+1)^2[1+o(1)], \qquad \lambda_s\underset{s\to\infty}{\to}0.$$

Поэтому можно разложить левую часть (5.4) по степеням λ_s:

$$(s+1)^2\{1+\frac{m^2\rho^2b^2}{(s+1)^2}+o(\frac{1}{s^2})-4[1+\frac{m^2\rho^2b^2}{2(s+1)^2}+o(\frac{1}{s^2})]\,\mathrm{Re}[\lambda_s e^{-2is_0}(1+o(1))+o(\lambda)\}=$$

$$= (s+1)^2 [1 + o(1)] + m^2 \rho^2 b^2 .$$

Это уравнение удовлетворяется лишь при $\kappa^2 = (s+1)^2 + o(1)$ и

$$\lim_{s \to \infty} (s+1)^2 \lambda_s = 0. \qquad (5.5)$$

Далее, легко убедиться, что существуют гармонические полиномы, которые точно удовлетворяют уравнениям (5.3) с $\kappa^2 = (s+1)^2$ и $\xi = 0$.

Таким образом, сформулированный здесь принцип соответствия выделяет среди представлений Фока с 0(4) – инвариатным квазивакуумом такие, что характеризующие их последовательности $\{\lambda_s\}$ сходятся к нулю быстрее, чем $\{ \frac{1}{(s+1)^2} \}$.

Отметим, что эти выделенные представления унитарно эквивалентны. Чтобы доказать это, достаточно установить их эквивалентность представлению, в котором все $\lambda_s = 0$. Вполне аналогично соответствующему вычислению в /5/ можно показать, что это имеет место, если сходится произведение

$$\prod_{s=0}^{\infty} (1 - |\lambda_s|^2)^{-\frac{(s+1)^2}{2}} .$$

Для его сходимости достаточно, чтобы $|\lambda_s| \leq \mathrm{const}\ s^{-(\frac{3}{2}+\epsilon)}$, где $\epsilon > 0$ любое, и выделенное принципом соответствия множество последовательностей $\{\lambda_s\}$ в силу (5.5) этому требованию заведомо удовлетворяет.

§6. Предельный переход к пространству Минковского

Очевидно, мы должны еще потребовать, чтобы при $\rho \to \infty$, когда искривление пространства исчезает, выражение полевого оператора (4.3) превращалось в обычное разложение по положительно- и отрицательно-частотным экспонентам.

Чтобы рассмотреть этот предельный переход, введем координаты

$$t=\rho\eta\ ,\quad y^1=\frac{r}{\rho}\ ,\quad y^2=\theta\ ,\quad y^3=\chi\ ,$$

причем

$$n^1=\sin\frac{r}{\rho}\ \sin\theta\cos\chi\ ,\qquad n^3=\sin\frac{r}{\rho}\cos\theta\ ,$$

$$n^2=\sin\frac{r}{\rho}\ \sin\theta\sin\chi\ ,\qquad n^4=\cos\frac{r}{\rho}\ .$$

Тогда

$$ds^2=b^2\Big(\frac{t}{\rho}\Big)\Big[\,dt^2-dr^2-\rho^2\sin^2\frac{r}{\rho}\,(d\theta^2+\sin^2\theta)\,d\chi^2\,\Big],$$

и при $\rho\to\infty$ получаем метрику пространства Минковского в сферических координатах

$$ds^2=dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\chi^2).$$

Разложение (4.3) в этих координатах можно представить в виде

$$\phi(\eta,y)=\frac{1}{\sqrt{2}\,b(\eta)\,\rho}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{s}\sum_{n=-\ell}^{\ell}\{\,Y_{s\ell n}(y)\,u_s(\eta)c^{+}_{s\ell n}+Y^{*}_{s\ell n}(y)\,u^{*}_s(\eta)\,c^{-}_{s\ell n}\,\}\,,$$

где

$$Y_{s\ell n}(y)=\sqrt{\frac{\Gamma(s+\ell+\frac{3}{2})(s+1)}{\Gamma(s-\ell+\frac{1}{2})\sin\frac{r}{\rho}}}\;P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{s+\frac{1}{2}}\Big(\cos\frac{r}{\rho}\Big)\,Y_{\ell n}\,(\theta,\chi),$$

P^{ν}_{μ} – функции Лежандра, $Y_{\ell n}$ – нормированные сферические функции. Если положить $\frac{s}{\rho}=k_s$, $\frac{1}{\rho}=\Delta k_s$, $\sqrt{\rho}\,c^{\pm}_{s\ell n}=\phi^{\pm}_{\ell n}(k)$, то

$$\phi=\frac{1}{b\sqrt{2}}\sum_{\ell,n}\sum_{k_s}\Delta k_s\sqrt{\frac{\Gamma(s+\ell+\frac{3}{2})}{\Gamma(s-\ell+\frac{1}{2})}}\Big(\sin\frac{r}{\rho}\Big)^{-1/2}P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{s+\frac{1}{2}}\cos\Big(\frac{k_s r}{s+1}\Big)\sqrt{k_s}\ \times$$

$$\times\{\,Y_{\ell n}(\theta,\chi)\,u_s\Big(\frac{t}{\rho}\Big)\phi^{+}_{\ell n}(k_s)+Y^{*}_{\ell n}(\theta,\chi)\,u^{*}_s\Big(\frac{t}{\rho}\Big)\phi^{-}_{\ell n}(k_s)\,\}$$

В силу (2.10), (2.12), условия $b(0)=1$ и известного равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^{\mu} P_{\nu}^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right) = J_{\mu}(x),$$

где J_{μ} - функции Бесселя, при $\rho\to\infty$ и $k_{s}\to k\geq 0$ получим

$$\phi(t,r,\theta,\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} dk \left\{ \frac{e^{ik^0 t}}{\sqrt{k^0}} V_{\ell n}(k,y)\phi_{\ell n}^{+}(k) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-ik^0 t}}{\sqrt{k^0}} \overset{*}{V}_{\ell n}(k,y)\phi_{\ell n}(k) \right\},$$

$$k^0=\sqrt{k^2+m^2}, \quad V_{\ell n}(k,y)=\sqrt{\frac{k}{r}}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\, Y_{\ell m}(\theta,\chi),$$

если $\lambda_s \to 0$ при $m\rho\to\infty$.

Мы не можем априори считать, что λ_s не зависит от m и ρ, но из соображений размерности следует, что если такая зависимость и имеет место, то только в виде $\lambda_s = \lambda'_s(m\rho)$. Очевидно, $\phi^{\pm}_{\ell n}(k)$ подчиняются обычным для операторов рождения и уничтожения правилам коммутации

$$[\phi_{\ell n}^{+}(k), \phi_{\ell' n'}^{+}(k')] = 0, \quad [\phi_{\ell n}^{-}(k), \phi_{\ell' n'}^{+}(k')] = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{nn'}\, \delta(k-k').$$

§7. Квазиевклидова изотропная модель

Рассмотрим теперь коротко частный случай открытой модели - квазиевклидову изотропную Вселенную. Метрика в этом случае может быть представлена в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)\,(d\eta^2 - d\xi^{1^2} - d\xi^{2^2} - d\xi^{3^2})$$

и инвариантна относительно группы $O(3)\times T_3$. Решение уравнения Клейна-Гордона имеет вид

$$\phi(\eta,\vec{\xi}) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{a}\int u(\eta,\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{\xi}}\,d\vec{k}\ ;$$

$$\vec{k} = \{k_1, k_2, k_3\},\ \vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\},\quad \vec{k}\vec{\xi} = k_i\,\xi^i .$$

Квантовые числа k_i, очевидно, являются собственными числами генераторов Z_i подгруппы T_3. Изменения в формулах §2 очевидны, и мы не будем на них останавливаться.

Вместо (3.1) имеем теперь

$$z^-(\vec{k}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\{p(\vec{k}) - \int d\vec{k}'\,T(\vec{k},\vec{k}')q(\vec{k}')\}$$

$$z^+(\vec{k}) = (z^-(\vec{k}))^*,\quad T(\vec{k},\vec{k}') = T(\vec{k}',\vec{k}),$$

$$-\int \mathrm{Im}\,T(\vec{k},\vec{k}')f(\vec{k})f(\vec{k}')d\vec{k}\,d\vec{k}' > 0$$

для любой функции $f(\vec{k}) \not\equiv 0$.

Условие инвариантности квазивакуума относительно T_3 дает

$$T(\vec{k},\vec{k}') = T(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

и относительно O(3) -

$$T(\vec{k}) = T(k) \qquad k = \sqrt{k_i k^i}.$$

Квазиклассические решения при больших k существуют, если

$$k^2\lambda(k) = k^2\,\frac{i\sqrt{k^2+m^2} - T(k)}{i\sqrt{k^2+m^2} + T(k)} \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (7.1)$$

С другой стороны, представление перестановочных соотношений с данной функцией $T(k)$ эквивалентно представлению с $\lambda(k) = 0$, если $\int_0^\infty |\lambda(k)|^2 k^2 dk < \infty$, что выполняется, если имеет место (7.1).

§8. Заключение

Таким образом, в отличие от пространства де Ситтера, в котором условие инвариантности квазивакуума относительно движений и принцип соответствия выделяют единственное представление Фока $\{\lambda_s = 0\}$, в нашем более общем, а, следовательно, менее симметричном случае, по-видимому, нельзя продвинуться дальше выделения класса представлений эквивалентных представлению, в котором все $\lambda_s = 0$ или $\lambda(k) \equiv 0$. Однако представления, удовлетворяющие всем сформулированным в §§ 5,6 требованиям, не заполняют этого класса целиком. Интерпретация этого факта требует, видимо, дополнительного исследования.

Отметим еще некоторые частные случаи закрытой модели. Случай пространства де Ситтера $\left(b = \frac{1}{\cos\eta}\right)$, как уже упоминалось, подробно рассмотрен в /5/. Весьма прост случай статистической модели Эйнштейна $(b \equiv 1)$. Очевидно, в этой модели

$$u_s^{\pm}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{s_0}} e^{\pm i s_0 \eta}$$

Величина $\underset{(0)}{M}$ сохраняется при любой массе покоя и может быть интерпретирована как энергия

$$\underset{(0)}{M} = \frac{1}{2} \sum_{s,\sigma} \sqrt{m^2 + \frac{(s+1)^2}{\rho^2}} \left(c^-_{s\sigma} c^+_{s\sigma} + c^+_{s\sigma} c^-_{s\sigma}\right).$$

Требование (4.2) приводит сразу к условию $\lambda_s = 0$. Далее, уравнение (2.7) имеет решения в виде цилиндрических функций в случае метрики, полученной Станюковичем /10/ $(b = e^{a\eta}$, $a = \mathrm{const} > 0$ (в теории гравитации с переменной во времени "константой" κ). Именно, общее решение (2.7) имеет вид

$$u_s(\eta) = Z_{\pm\frac{i(s+1)}{a}}\left(\frac{m\rho}{a} e^{a\eta}\right),$$

где $Z_\nu(x)$ – любое решение уравнения Бесселя. Функции $u^{\pm}$ определяются отсюда с помощью начальных условий (2.8).

Авторы признательны Н.А. Черникову за внимание и советы.

Литература

1. P.Roman, Nuovo Cim., 37, 396 (1965).
2. W.Thirring. "Special Problems in High Energy Physics." Wien-New York, -1967.
3. J. P. Vigier. В Трудах международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р2-3590, Дубна, 1968 г.
4. Э.А. Тагиров, Е.Д. Федюнькин, Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р2-3392, Дубна, 1967.
5. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann. Inst. Henri Poincaré, 9, 109 (1968). Препринт ОИЯИ Р2-3777, Дубна, 1968.
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
7. Р. Пенроуз. В сб. "Гравитация и топология". Москва, 1965.
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.2. Наука, М., 1966.
9. Н.А. Черников. В Трудах Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ, Р2-3590, Дубна, 1968.
10. К.П. Станюкович. Гравитационное поле и элементарные частицы. Наука, М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел

12 ноября 1968 года.