ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4115

А.И.Оксак, И.Т.Тодоров

О КОВАРИАНТНОЙ СТРУКТУРЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 4115

А.И.Оксак, И.Т.Тодоров

О КОВАРИАНТНОЙ СТРУКТУРЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

С о д е р ж а н и е

стр.

I. В в е д е н и е

Недавно[1] было предложено представление для произвольной инвариантной двухточечной функции в теории, включающей бесконечно-компонентные поля. Целью настоящей работы является строгий вывод и дальнейший анализ этого представления. Мы начнем с точной постановки задачи и приведем краткий обзор содержания работы.

Пусть τ —линейное представление $A \to T(A)$ квантово-механической группы Лоренца $SL(2,C)$ непрерывными операторами $T(A)$ в линейном топологическом пространстве $\mathfrak{D}$, и пусть далее $S(\mathbb{R}_4)$ - пространство бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих функций в четырехмерном пространстве. Релятивистское квантованное поле $\psi(u;f)$ $(u \in S(\mathbb{R}_4),$ $f \in \mathfrak{D})$ определяется как билинейное слабо непрерывное отображение пространства $S(\mathbb{R}_4)\times\mathfrak{D}$ в множество (неограниченных) операторов с общей областью определения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ векторов состояний[3].

Предполагается, что в $\mathcal{H}$ действует унитарное представление группы Пуанкаре $ISL(2,C)$, обладающее единственным инвариантным вакуумным вектором $|0\rangle$. Закон преобразования поля имеет вид

$$U(a,A)\psi(u;f)U^{-1}(a,A) = \psi(u_{\{a,A\}}; T(A)f), \tag{I.1}$$

где $u_{\{a,A\}} = u(\Lambda^{-1}(A)(x-a))$, а $\Lambda(A)$ - преобразование Лоренца, определяемое равенством

$$A\sigma_\mu A^* = \sigma_\nu \cdot \Lambda^\nu_\mu (A) \tag{I.2}$$

(σ_0 - 2 x 2 единичная матрица; σ_j, j = 1,2,3 - матрицы Паули).

В силу трансляционной инвариантности двухточечная функция (т.е. вакуумное ожидание произведения двух полей) может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(x;f)\cdot\psi(y;g)|0\rangle &= F_{\varphi\psi}(x-y;f;g) = \\ &= \int K_{\varphi\psi}(p;f;g)\, e^{-ip(x-y)}\, d^4p\,; \end{aligned} \tag{I.3}$$

спектральная функция $K_{\varphi\psi}(p;f;g)$ принадлежит $S'(\mathbb{R}_4)$. Мы будем предполагать[1], что оператор энергии-импульса удовлетворяет сильному условию спектральности (с массовой

[1] Примечания приведены в конце работы.

щелью [3], так что

$$\mathrm{supp}\ K(p;f;g) \subset \mathbb{V}_+ = \{p: \ p^0 > |\vec{p}|\}.$$

Мы всюду будем использовать для неприводимых представлений группы $SL(2,C)$ обозначение[2] $[k,c] \equiv \chi$, где k - целое или полуцелое число, c - произвольное комплексное число (для главной серии унитарных представлений c чисто мнимо[4]). Пусть поля $\varphi(x;f)$ и $\psi(x;g)$ преобразуются по неприводимым представлениям χ_1 и χ_2; тогда можно считать, что векторы $f \in \mathfrak{D}_{-\chi_1}$, $g \in \mathfrak{D}_{-\chi_2}$ преобразуются соответственно по представлениям $T_{-\chi_1}$ и $T_{-\chi_2}$.

Основным результатом работы является нахождение общего вида спектральной функции $K(u;f;g)$, рассматриваемой как непрерывный трилинейный функционал над[3] $D(\mathbb{V}_+) \times \mathfrak{D}_{-\chi_1} \times \mathfrak{D}_{-\chi_2}$, удовлетворяющий условию лоренц-инвариантности:

$$K(u_{\{0,A\}}; T_{-\chi_1}(A)f; T_{-\chi_2}(A)g) = K(u;f;g). \tag{I.4}$$

Средством в решении этой задачи явился установленный в дополнении А изоморфизм между $\mathfrak{D}'_{-\chi}$ -пространством непрерывных линейных функционалов над $\mathfrak{D}_{-\chi}$ - и пространством d_χ однородных (индекса χ) обобщенных функций в двумерной комплексной области $\widetilde{\mathbb{C}}_2 \equiv \mathbb{C}_2 \setminus \{0\}$. Этот изоморфизм позволяет находить разного рода полилинейные лоренц-инвариантные функционалы с помощью техники обобщенных функций.

Задача свелась к нахождению обобщенной функции $K(p;z;w) \in D'(\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющей выписанным ниже условиям (2.2), (2.3). Общее решение, вытекающее из теоремы 2,2, нетривиально при условии, если $k_1 - k_2$-целое число, и однозначно определяется функцией $g(\tau;\nu) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^+_1 \times [-1,1])$, зависящей от двух инвариантов, составленных из p, z, w:

$$\tau = (p)^2 \quad \text{и} \quad \nu = \frac{|z \underset{\sim}{p} \bar{w}|^2 - (p)^2 \cdot |z \varepsilon w|^2}{z \underset{\sim}{p} \bar{z} \cdot w \underset{\sim}{p} \bar{w}}; \ (\underset{\sim}{p} = p^\mu \sigma_\mu). \tag{I.5}$$

В разделе 3 мы изучаем более подробно двухточечные функции конечно-компонентных полей. Здесь мы обобщаем анализ Мите[6,7] на случай спинорных лоренц-инвариантных обобщенных функций $K(x)$. Оказывается, что такие функции представимы в виде конечной суммы ковариантных полиномов от x (или от $\frac{\partial}{\partial x}$), умноженных на $L_+^\uparrow$ -инвариантные скалярные обобщенные функции (в полной аналогии со случаем спинорных аналитических функций, рассмотренных в[8], § 4). Этот анализ позволяет свести проблему определения спинорных функций Грина посредством функций Уайтмана к соответствующей решенной задаче[9] для скалярных полей.

В § 4 мы выводим разложение двухточечной функции по ядрам с определенным спином и находим необходимые и достаточные условия на рост коэффициентов этого разложения. Условие положительной определенности (в случае эрмитово сопряженных полей) удовлетворяется автоматически элементарными ядрами.

2. Общий вид инвариантной двухточечной функции в импульсном пространстве

2.1. Дифференциальная форма условия ковариантности

В силу изоморфизма между $\mathfrak{D}'_{-\chi}$ (пространством, сопряженным к $\mathfrak{D}_{-\chi}$) и пространством d_χ однородных обобщенных функций в области $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ (см. дополнение А), множество (непрерывных) трилинейных функционалов над $\mathcal{D}(\mathbb{V}_+)\times\mathfrak{D}_{-\chi_1}\times\mathfrak{D}_{-\chi_2}$ изоморфно множеству однородных трилинейных функционалов $K(u\ ;F;G)$ над $\mathcal{D}(\mathbb{V}_+)\times\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)\times\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ с индексами однородности χ_1, χ_2. Мы можем сопоставить с функционалом К ядро

$$K(p;z;w)\in\mathcal{D}'(\mathbb{V}_+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2\times\widetilde{\mathbb{C}}_2), \tag{2.1}$$

обладающее свойством однородности

$$K(p;\sqrt{\rho_1}\cdot e^{i\alpha_1/2}z;\sqrt{\rho_2}\,e^{i\alpha_2/2}w)=\rho_1^{c_1-1}\cdot\rho_2^{c_2-1}\cdot e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\cdot K(p;z;w), \tag{2.2}$$

$$(\rho_j>0\ ,\quad \chi_j=[k_j,c_j])\ .$$

Условие лоренц-инвариантности функционала К с помощью ядра записывается:

$$K(\Lambda(A)p;zA^{-1};wA^{-1})=K(p;z;w)\ ,\qquad A\in SL(2,C) \tag{2.3}$$

(здесь $zA\equiv A^T\dot{z}$). Перепишем (2.3) в инфинитизимальной форме. Нам удобно вместо 4-вектора p ввести эрмитову матрицу $\underset{\sim}{p}$:

$$\underset{\sim}{p}=p^\mu\sigma_\mu=\begin{pmatrix}p^0+p^3 & p^1-ip^2\\ p^1+ip^2 & p^0-p^3\end{pmatrix}=(p^{a\dot{b}})\ ;\qquad a,\dot{b}::1,2\ . \tag{2.4}$$

Уравнение (1.2) означает

$$\underset{\sim}{\Lambda(A)p}=A\underset{\sim}{p}A^*. \tag{2.5}$$

С помощью матрицы $\underset{\sim}{p}$ будущий конус $\mathbb{V}_+$ записывается

$$\mathbb{V}_+=\{\underset{\sim}{p}:\ p^{11}>0\ ,\ p^{11}\cdot p^{22}-|p^{12}|^2>0\}.$$

Параметризуем комплексную матрицу А

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$$

в окрестности единицы А = I группы $SL(2,C)$ параметрами a_{11}, a_{12} и a_{21}. Дифференцируя (2.3) по этим параметрам и их комплексным сопряженным в точке А = I, получаем для К(p ; z; w) 6 дифференциальных уравнений. Выпишем 4 из них (полученные дифференцированием по a_{12}, a_{21}, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{21}$), поскольку они содержат всю информацию о лоренц-инвариантности:

$$\left(p^{a\dot{c}} \frac{\partial}{\partial p^{b\dot{c}}} - z_b \frac{\partial}{\partial z_a} - w_b \frac{\partial}{\partial w_a} \right) K = 0 \qquad (2.6)$$

(здесь a = I или 2, b = 3–а; суммирование идет по $\dot{c}$ от I до 2),

$$\left(p^{c\dot{a}} \frac{\partial}{\partial p^{c\dot{b}}} - \bar{z}_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\dot{a}}} - \bar{w}_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{\dot{a}}} \right) K = 0. \qquad (2.7)$$

2.2. Инвариантная функция из $D'(\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2)$-функция алгебраических инвариантов

Мы найдем сначала общее решение уравнений (2.6), (2.7) без использования условия однородности. Таким образом, результат этого пункта применим к некоторому классу приводимых представлений $SL(2,C)$.

Из $\mathfrak{p}$, z, w составим независимые инварианты группы преобразований $(\mathfrak{p}; z; w) \to (A\mathfrak{p}A^*; zA^{-1}; wA^{-1})$:

$$\begin{gathered} \tau = (p)^2 = \det \mathfrak{p} \quad , \quad v = w\mathfrak{p}\bar{w}, \\ s = \sqrt{\tau} \cdot z : w \equiv \sqrt{(p)^2} \cdot (z_1 w_2 - z_2 w_1) \quad , \quad t = z\mathfrak{p}\bar{w}. \end{gathered} \qquad (2.8)$$

Когда переменные (p ; z ; w) изменяются в $\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$, инварианты пробегают область $\{(\tau; v; s, t)\} = \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$ (это следует из положительной определенности матрицы $\mathfrak{p}$ и тождества $|s|^2 + |t|^2 = z\mathfrak{p}\bar{z} \cdot w\mathfrak{p}\bar{w}$). Чтобы произвести регулярную замену переменных в К(p ; z ; w), представим множество $\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$ в виде объединения областей O_I, в которой $w_2 \neq 0$, и O_2, в которой $w_1 \neq 0$. Введем преобразование J_1 :

$$(\mathfrak{p}; z; w) \to \left(\tau; v; s, t; p^{11}; p^{21}; \zeta = w_1 + \frac{p^{21}}{p^{11}} w_2 \ ; \ \varphi = \arg w_2\right) \qquad (2.9)$$

($\arg w_2$ –многозначная функция w_2), отображающее O_I на

$$\Omega_1 = \{(\tau; v; s,t; p^{11}; p^{21}; \zeta; \varphi): \quad \tau \in \mathbb{R}_1^+, v \in \mathbb{R}_1^+, (s,t) \in \mathbb{C}_2, p^{11} \in \mathbb{R}_1^+; \quad p^{21} \in \mathbb{C}_1, |p^{21}| < \sqrt{\tau}; \quad \zeta \in \mathbb{C}_1; \quad \varphi \in \mathbb{R}_1\}.$$

Аналогично, преобразование $\mathfrak{J}_2$

$$(\underset{\sim}{p}; z; w) \to (\tau; v; s,t; p^{22}; p^{12}; \zeta' = w_2 + \frac{p^{12}}{p^{22}} \cdot w_1; \varphi' = \arg w_1) \qquad (2.10)$$

отображает O_2 на соответствующее множество Ω_2 .

Л е м м а 2.1. Между пространством функций $K \in \mathcal{D}'(O_j)$ $(j = 1, 2)$ и пространством функций $K_j(\tau; v; s,t; p^{jj}; p^{21}; \zeta^{(\prime)}; \varphi^{(\prime)}) \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$, периодичных по φ (соответственно, φ') с периодом 2π , существует изоморфизм

$$K(\underset{\sim}{p}; z; w) = K_j(\tau; v; s,t; p^{jj}; p^{21}; \zeta^{(\prime)}; \varphi^{(\prime)}) \qquad (2.11)$$

(переменные в правой части (2.11) определены в (2.8)–(2.10)).

Доказательство этой леммы дано в дополнении Б.

Подставим теперь (2.11) для случая области O_I в уравнения инвариантности (2.6),(2.7). Поскольку инварианты (2.8) автоматически удовлетворяют этим уравнениям, достаточно учитывать производные от K_I только по p^{11} , p^{12}, $\overline{p^{12}} \equiv p^{21}$, ζ, $\bar{\zeta}$, φ . Используя (2.11), перепишем (2.6) для $a = 1$ и (2.7) для $\dot{a} = 1$:

$$p^{11}\left(\frac{\partial K_1}{\partial p^{21}} + \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} \cdot \frac{w_2}{p^{11}}\right) - \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} w_2 = 0,$$

$$p^{11}\left(\frac{\partial K_1}{\partial p^{12}} + \frac{\partial K_1}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\bar{w}_2}{p^{11}}\right) - \frac{\partial K_1}{\partial \bar{\zeta}} \bar{w}_2 = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial K_1}{\partial p^{21}} = \frac{\partial K_1}{\partial \overline{p^{21}}} = 0. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.6) при $a = 2$ и учитывая (2.12), имеем:

$$p^{21}\left(\frac{\partial K_1}{\partial p^{11}} - \frac{\partial K_1}{\partial \zeta}\cdot\frac{p^{21}}{(p^{11})^2} - \frac{\partial K_1}{\partial \bar\zeta}\cdot\frac{\overline{p^{21}}}{(p^{11})^2}\,\bar w_2\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial K_1}{\partial \zeta}\cdot\frac{p^{21}}{p^{11}} + \frac{\partial K_1}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{2iw_2}\right)\left(\zeta - \frac{p^{21}}{p^{11}}w_2\right) = 0. \tag{2.13}$$

Так как K_I не зависит от p^{21}, $\overline{p^{21}}$, то выражения при различных степенях p^{21} и $\overline{p^{21}}$ в (2.13) равны нулю. Учитывая, что в рассматриваемой области $p^{11} \neq 0$, $w_2 \neq 0$, приходим к уравнениям:

$$\zeta\frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial K_1}{\partial \bar\zeta} = 0, \quad \frac{\partial K_1}{\partial p^{11}} - \frac{\zeta}{p^{11}}\cdot\frac{\partial K_1}{\partial \zeta} - \frac{i}{2p^{11}}\cdot\frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0. \tag{2.14}$$

Аналогично из (2.7) при $\dot\alpha = 2$ находим

$$\bar\zeta\frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial K_1}{\partial p^{11}} - \frac{\bar\zeta}{p^{11}}\cdot\frac{\partial K_1}{\partial \bar\zeta} + \frac{i}{2p^{11}}\cdot\frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0,$$

что вместе с (2,12), (2.14) дает

$$\frac{\partial K_1}{\partial p^{11}} = \frac{\partial K_1}{\partial p^{21}} = \frac{\partial K_1}{\partial \overline{p_{21}}} = \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial K_1}{\partial \bar\zeta} = \frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0. \tag{2.15}$$

Поскольку область Ω_1 выпукла по переменным p^{11}, p^{21}, ζ, φ (при фиксированных τ, v, s, t), условие (2.15) влечет за собой существование функции $\mathcal{K}_1(\tau; v; s,t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_1^+\times\mathbb{R}_1^+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ такой, что

$$K_1(\tau; v; s, t; p^{11}, p^{21}, \zeta, \varphi) = \mathcal{K}_1(\tau; v; s, t) \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

или, что то же, $\quad K(\underset{\sim}{p}; z; w) = \mathcal{K}_1(\tau; v; s, t)$ в O_1.

Аналогичное рассуждение приводит нас к функции $\mathcal{K}_2(\tau; v; s, t)$, которая совпадает с $K(\underset{\sim}{p}; z; w)$ в O_2. С другой стороны, каждая обобщенная функция $\mathcal{K}_j$ (j = I,2) определена однозначно "значениями" $K(\underset{\sim}{p}; z; w)$ в пересечении $O_1 \cap O_2$ (поскольку отображение (2.8) $(\underset{\sim}{p}; z; w) \to (\tau; v; s, t)$ переводит $O_1 \cap O_2$ на всю область $\mathbb{R}_1^+\times\mathbb{R}_1^+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2)$, значит, $\mathcal{K}_I = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ и мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА 2.1. Всякая обобщенная функция $K(p;z;w)\in\mathcal{D}'(V_+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2\times\widetilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющая условию (2.3), может быть записана в виде:

$$K(p;z;w)=\mathcal{K}(\tau;v;s,t), \tag{2.16}$$

где τ, v, s, t –инварианты (2.8) и $\mathcal{K}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}_1^+\times\mathbb{R}_1^+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2)$.

З а м е ч а н и е. Мы не переходим к симметричным относительно z, w переменным: $u=zp\bar{z}$, $v=wp\bar{w}$, $\frac{s}{\sqrt{\tau}}=z\varepsilon w$, $t=zp\bar{w}$, поскольку замена $(\tau, v, s, t)\to(u=\frac{1}{v}(|s|^2+|t|^2),\ v,\ \frac{s}{\sqrt{\tau}}, t)$ сингулярна (при $s=0$ якобиан ее равен нулю).

2.3. Случай неприводимых представлений $SL(2,C)$. Однородные инвариантные обобщенные функции

Представление (2.16) позволяет условие однородности (2.2) записать в виде:

$$\mathcal{K}(\tau;\rho_2 v;\sqrt{\rho_1\rho_2}\,e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/2}s,\ \sqrt{\rho_1\rho_2}\,e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2}t)=$$

$$=\rho_1^{c_1-1}\cdot\rho_2^{c_2-1}\cdot e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\,\mathcal{K}(\tau;v;s,t),$$

или, что то же,

$$\mathcal{K}(\tau;\rho_2 v;\rho e^{i\alpha}s,\rho e^{i\beta}t)=\rho^{c_1-1}\cdot\rho_2^{c_2-c_1}\cdot e^{i(k_+\cdot\alpha+k_-\cdot\beta)}\cdot\mathcal{K}(\tau;v;s,t), \tag{2.17}$$

где $k_\pm=k_1\pm k_2$. $\qquad$ (2.18)

Очевидно, что ненулевое решение (2.17) возможно лишь при условии: $k_\pm$ –целые числа (в силу однозначности $\mathcal{K}$).

Используем условие однородности (2.17) по отношению к ρ, ρ_2; с этой целью введем $H\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}_1^+\times\mathbb{R}_1^+\times\widetilde{\mathbb{C}}_2)$:

$$\mathcal{K}(\tau;v;s,t)=u^{c_1-1}\cdot v^{c_2-1}\cdot H(\tau;s,t), \tag{2.19}$$

где $u=\frac{|s|^2+|t|^2}{v}$ (напомним, что в рассматриваемой области τ, v положительны, так что функция H действительно определена (2.19); она не зависит от v в силу (2.17)). С помощью H условие однородности имеет простую форму:

$$H(\tau;\rho e^{i\alpha}s,\rho e^{i\beta}t)=e^{ik_+\alpha}\,e^{ik_-\beta}\,H(\tau;s,t). \tag{2.20}$$

Действуя далее формально (как с обычной функцией), мы получим для $H(\tau; s, t)$ в переменных

$$s = \tau\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\, e^{i\alpha}, \quad t = \tau\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\, e^{i\beta}, \qquad (\tau > 0, -1 \le \nu \le 1) \tag{2.21}$$

представление

$$H(\tau; s\, t) = e^{ik_+\alpha} \cdot e^{ik_-\beta} \cdot \check{H}(\tau; \nu) . \tag{2.22}$$

Для того, чтобы придать точный смысл уравнению (2.22) для обобщенной функции $H(\tau; s, t)$, мы должны будем от шварцовских обобщенных функций (связанных с открытой областью эвклидова пространства)перейти к новому классу обобщенных функции. Чтобы упростить задачу, вначале рассмотрим случай, когда $H(\tau; s, t)$ не зависит от τ. Именно: опишем структуру пространства $\mathfrak{X}_{k_+k_-}$ обобщенных функций $\Phi(s,t) \in \mathcal{D}'(\tilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющих условию однородности типа (2.20). Для этого введем непрерывное отображение $\mathcal{R}_{k_+k_-}$

$$F(s,t) \to u_{k_+k_-}(\nu) = (\mathcal{R}_{k_+k_-} F)(\nu) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \tau^3 d\tau \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta\; e^{ik_+\alpha} \cdot e^{ik_-\beta} \cdot F\left(\tau\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\, e^{i\alpha}, \tau\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\, e^{i\beta}\right) \tag{2.23}$$

пространства $\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{C}}_2)$ на пространство $X_{k_+k_-}$ основных функций $u_{k_+k_-}(\nu)$ вида

$$u_{k_+k_-}(\nu) = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{|k_+|/2} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{|k_-|/2} v(\nu), \tag{2.24}$$

где $v(\nu)$ –бесконечно-дифференцируемая функция на отрезке $[-1,1]$. Топология в $X_{k_+k_-}$ естественным образом определяется счетной системой полунорм

$$\| u_{k_+k_-} \|_n = \sup_{-1 \le \nu \le 1} \left| \frac{d^n v(\nu)}{d\nu^n} \right| .$$

Можно доказать (аналогично тому, как устанавливался изоморфизм $\mathfrak{D}'_\chi$ и $d_{-\chi}$ в дополнении А), что каждая функция $\Phi(s,t) \in \mathfrak{X}_{k_+k_-}$ представима в виде

$$\Phi\left(\tau\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\, e^{i\alpha}, \tau\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\, e^{i\beta}\right) = e^{ik_+\alpha} e^{ik_-\beta} f_{k_+k_-}(\nu) \tag{2.25}$$

с $f_{k_+k_-} \in X'_{k_+k_-}$. Равенство понимается в следующем смысле:

$$(\Phi(s,t), F(s,t)) = (f_{k_+k_-}(\nu), (\mathcal{R}_{k_+k_-} F)(\nu)) . \tag{2.26}$$

В свою очередь легко видеть, что пространство $X'_{k_+k_-}$ изоморфно $\mathfrak{D}'$ - пространству, сопряженному с пространством $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{D}([-1,1])$ бесконечно-дифференцируемых функций на отрезке $[-1,1]$ (это пространство описано в дополнении II); именно: каждой $g(\nu) \in \mathfrak{D}'$ сопоставляется $f_{k_+k_-}(\nu) \in X'_{k_+k_-}$ по правилу: если $u_{k_+k_-}(\nu) \in X_{k_+k_-}$ представлена в виде (2.24), то:

$$(f_{k_+k_-}(\nu), u_{k_+k_-}(\nu)) = (g(\nu), v(\nu)). \tag{2.27}$$

Определенную таким образом $f_{k_+k_-}(\nu)$ будем записывать в виде:

$$f_{k_+k_-}(\nu) = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{-|k_+|/2} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{-|k_-|/2} \cdot g(\nu). \tag{2.28}$$

Применяя этот результат к $\mathcal{K}(\tau; s, t) \in D'(\mathbb{R}_1^+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющей (2.20), мы (с учетом (2.I6),(2.I9)) приходим к следующей теореме, дающей общий вид ядра инвариантного непрерывного трилинейного функционала над $D(\mathbb{V}_+) \times \mathfrak{D}_{-\chi_1} \times \mathfrak{D}_{-\chi_2}$.

<u>ТЕОРЕМА 2.2.</u> Инвариантная $K(p; z; w) \in D'(\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющая условию однородности (2.I7), отлична от нуля лишь при целом $k_1 - k_2$ и имеет вид

$$K(p; z; w) = (zp\bar{z})^{c_1-1} \cdot (wp\bar{w})^{c_2-1} \cdot e^{ik_+\alpha} \cdot e^{ik_-\beta} \times \\ \times \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{-|k_+|/2} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{-|k_-|/2} \cdot g(\tau, \nu), \tag{2.29}$$

где α, β, ν определены в (2.2I), (2.8):

$$\alpha = \arg(z\varepsilon w), \quad \beta = \arg(zp\bar{w}), \quad \nu = \frac{|zp\bar{w}|^2 - (p)^2 \cdot |z\varepsilon w|^2}{zp\bar{z} \cdot wp\bar{w}}; \tag{2.30}$$

$g(\tau;\nu) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}_1^+ \times [-1,1])$ - это пространство, сопряженное с $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_1^+ \times [-1,1]) \equiv D(\mathbb{R}_1^+) \otimes \mathfrak{D}([-1,1])$ - пространством бесконечно дифференцируемых функций в полосе $\mathbb{R}_1^+ \times [-1,1]$ с компактным носителем, снабженным естественной топологией;

$f(\tau;\nu) \equiv \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{-|k_+|/2} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{-|k_-|/2} \cdot g(\tau;\nu)$ -непрерывный линейный функционал над $D(\mathbb{R}_1^+) \otimes X_{k_+k_-}$.

З а м е ч а н и е. Представление (2.29) формально тождественно выражению (I.I4) в [I], выписанному для $k_1 \geq |k_2|$: $K(p;z;w) = (zp\bar{z})^{c_1-k_1-1} \cdot (wp\bar{w})^{c_2-k_1-1} (z\varepsilon w)^{k_+} (zp\bar{w})^{k_-} h(p^2,\nu)$, и соответствует $h(\tau,\nu) = \left(\frac{1-\nu}{2\tau}\right)^{-k_+} \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{-k_-} g(\tau;\nu)$;

$\nu = \cos\theta$, где θ -угол между $z \vec{\sigma} \bar{z}$ и $w \vec{\sigma} \bar{w}$ в системе покоя для p.

3. Двухточечные функции конечно-компонентных полей

3.I. Инвариантные обобщенные функции $F(x;\zeta)$

Случай конечномерных представлений $SL(2,C)$ является специальным случаем нашего рассмотрения предыдущего раздела. Именно: если $c-|k|$ -целое положительное число, то представление $\chi=[k,c]$ приводимо (см. /2/), причем множество однородных полиномов от z , $\bar{z}$ образует инвариантное конечномерное подпространство E_χ в d_χ. Очевидно, что предыдущие результаты (включая представление (2.29)) справедливы и для этого инвариантного подпространства. Цель этого раздела - дать более детальный анализ двухточечной функции в этом случае, используя то обстоятельство, что $F_{\varphi\psi}(x;z;w)$ и $K_{\varphi\psi}(p;z;w)$ -полиномы по z , $\bar{z}$, w , $\bar{w}$. Мы не будем использовать условия спектральности и найдем общий вид инвариантного функционала над $D(\mathbb{R}_4)\times E_{\chi_1}\times E_{\chi_2}$. Тем самым будет описана ковариантная структура двухточечных функций как в p - , так и в x -пространстве, что позволит нам определить причинные функции Грина по двухточечным функциям Уайтмана (3.3).

Обычно конечномерные представления $SL(2,C)$ обозначают парой целых или полуцелых неотрицательных чисел (i,j) , связанных с парой $[k,c]$ посредством

$$2i = c+k-1\ , \qquad 2j = c-k-1. \tag{3.I}$$

Хорошо известно, что прямое произведение двух (неприводимых) конечномерных представлений (i_1,j_1) и (i_2,j_2) разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$(i_1,j_1)\times(i_2,j_2) = \sum_{i=|i_1-i_2|}^{i_1+i_2}\ \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (i,j)\,. \tag{3.2}$$

Поэтому изучение двухточечной функции $F(x;z;w)$ конечно-компонентных полей сводится к нахождению функции $F(x;\zeta) \equiv F_{(i,j)}(x;\zeta)$ со свойствами:

а) $F(x;\zeta)\in D'(\mathbb{R}_4)$ по переменной x ,

б) $F(x;\zeta)$ - однородный полином степени $(2i,2j)$ по параметрам $\zeta,\bar{\zeta}$ $(\zeta\in\mathbb{C}_2)$,

в) $F(A\underset{\sim}{x}A^*;\zeta) = F(\underset{\sim}{x};\zeta A)$, $\quad A\in SL(2,C)$. $\quad$ (3.3)

Действуя как в п. 2.1, находим для $F(x;\zeta)$ 6 дифференциальных уравнений:

$$(x^{a\dot{c}} \frac{\partial}{\partial x^{\ell\dot{c}}} - \xi_\ell \frac{\partial}{\partial \xi_a}) F(x;\xi) = 0 , \qquad (3.4)$$

$$(x^{c\dot{a}} \frac{\partial}{\partial x^{c\dot{\ell}}} - \bar{\xi}_{\dot{\ell}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_{\dot{a}}}) F(x;\xi) = 0 ,$$

(индексы в (3.4) пробегают те же значения, что и в (2.6),(2.7) ;

$$\left[x^{a\dot{\ell}} \cdot (\tau_3)_a{}^c \cdot \frac{\partial}{\partial x^{c\dot{\ell}}} - \xi_a (\tau_3)_\ell{}^a \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\right] F(x;\xi) = 0 ,$$

$$\left[x^{a\dot{\ell}} (\tau_3)_{\dot{\ell}}{}^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial x^{a\dot{c}}} - \bar{\xi}_{\dot{a}} (\tau_3)_{\dot{\ell}}{}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_{\dot{\ell}}}\right] F(x;\xi) = 0 \qquad (3,5)$$

(по всем индексам в уравнениях (3.5) производится суммирование от I до 2; τ_3 — 2×2-матрица: $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Ковариантная структура $F(x;\xi)$ может быть описана следующим образом.

<u>Теорема 3.I.</u> Любая инвариантная обобщенная функция $F(x;\xi)$, удовлетворяющая условиям а)-в), может быть записана

$$F(x;\xi) = \delta_{ij} \ (\xi \underset{\sim}{x} \bar{\xi})^{2j} F(x) = \qquad (3.6)$$

$$= \delta_{ij} \ (\xi \underset{\sim}{\partial_x} \bar{\xi})^{2j} \, T(x) , \qquad (3.7)$$

где $F(x)$ (соотв. $T(x)$)-лоренц-инвариантная скалярная обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_4)$. Для данной $F(x;\xi)$ функция $F(x)$ (равно как и $T(x)$) определена с точностью до $(2j - 1)$ произвольной постоянной. Более точно, если $F_0(x)$ -частное решение (3.6), то общее решение имеет вид

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{K=0}^{2j-1} c_K \, (\Box_x)^K \, \delta(x). \qquad (3.8)$$

Доказательство этой теоремы дано в дополнении В.

3.2. <u>Ковариантная структура двухточечной функции для конечномерных представлений</u>

Пусть ковариантная двухточечная функция $F(x;z;w)$ является однородным полиномом по $z,\bar{z}$ и $w,\bar{w}$ степени $(2i_1, 2j_1)$ и $(2i_2, 2j_2)$ соответственно. Используя разложение (3.2) и теорему 3.I, мы можем написать

$$F(x;z;w) = \sum_n \mathcal{P}_n^{(i_1 j_1; i_2 j_2)} (x;z;w) \cdot F_n(x), \qquad (3.9)$$

где $\mathcal{P}_n$ -инвариантный полином степени n по x и той же степени, что и F, по остальным переменным и соответствующий слагаемому (i,j) в правой части (3.2) при $i=j=$ $=n/2$; $F_n(x)$-лоренц-инвариантные обобщенные функции. Суммирование в (3.9) производится по множеству

$$n_0 = 2\max\{|i_1-i_2|, |j_1-j_2|\} \leq n = n_0+2k \leq 2\min\{i_1+i_2,\ j_1+j_2\}, \qquad (3.10)$$

где $k = 0, 1, \ldots, k_{max}$, так что n принимает либо только четные, либо только нечетные значения. (Напомним: F может быть нетривиально только в том случае, если i_1-i_2 и j_1-j_2 либо одновременно целые, либо полуцелые).

Стандартными методами приведения прямого произведения конечномерных представлений (например, процедурой симметризации и антисимметризации Янга) получаем выражение для полинома $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n^{(i_1 j_1;\, i_2 j_2)}(x;z;w) = (z\varepsilon w)^{i_1+i_2-n/2}\,(\overline{z\varepsilon w})^{j_1+j_2-n/2}\left(z\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{n/2+i_1-i_2}\times$$

$$\times\left(w\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{n/2-i_1+i_2}\left(\bar z\frac{\partial}{\partial\bar\xi}\right)^{n/2+j_1-j_2}\left(\bar w\frac{\partial}{\partial\bar\xi}\right)^{n/2-j_1+j_2}(\xi\underset{\sim}{x}\bar\xi)^n = (z\varepsilon w)^{i_1+i_2-n/2}(\overline{z\varepsilon w})^{j_1+j_2-n/2}\times$$

$$\times(n/2+i_1-i_2)!\,(n/2-i_1+i_2)!\,(n/2+j_1-j_2)!\,(n/2-j_1+j_2)!\,n!\sum\frac{(z\underset{\sim}{x}\bar z)^{p_1}(z\underset{\sim}{x}\bar w)^{q_1}(w\underset{\sim}{x}\bar z)^{p_2}(w\underset{\sim}{x}\bar w)^{q_2}}{p_1!\;q_1!\;p_2!\;q_2!};$$

суммирование здесь производится по всем целым неотрицательным p_1, p_2, q_1, q_2, для которых

$$p_1+q_1 = n/2+i_1-i_2, \qquad p_2+q_2 = n/2-i_1+i_2,$$

$$p_1+p_2 = n/2+j_1-j_2, \qquad q_1+q_2 = n/2-j_1+j_2.$$

Пусть $I = i_1-i_2$ и $J = j_1-j_2$, и мы предположим для определенности, что $I \geq |J|$ (другие возможности рассматриваются аналогично). Положим далее $q_2 = q$, $(q_1 = n/2-J-q$, $p_1 = I+J+q$, $p_2 = n/2-I-q)$; разделив и умножив выражение для $\mathcal{P}_n$ на $((x)^2|z\varepsilon w|^2)^{n/2-I}$ и использовав (3.9), мы получим

$$\mathcal{P}_n^{(i_1 j_1;\, i_2 j_2)}(x;z;w) = ((x)^2)^{n/2-I}\,(z\varepsilon w)^{2i_2}\,(\overline{z\varepsilon w})^{j_1+j_2-I}\times$$

$$\times(z\underset{\sim}{x}\bar z)^{I+J}\,(z\underset{\sim}{x}\bar w)^{I-J}\;P_{n/2-I}^{(I-J,\,I+J)}(K), \qquad (3.11)$$

где $$\chi = \frac{z\underset{\sim}{x}\bar{z}\cdot w\underset{\sim}{x}\bar{w} + |z\underset{\sim}{x}\bar{w}|^2}{(x)^2\ |z\varepsilon w|^2} \equiv \frac{z\underset{\sim}{x}\bar{z}\cdot w\underset{\sim}{x}\bar{w} + |z\underset{\sim}{x}\bar{w}|^2}{z\underset{\sim}{x}\bar{z}\cdot w\underset{\sim}{x}\bar{w} - |z\underset{\sim}{x}\bar{w}|^2}, \tag{3.12}$$

а $P_n^{(\alpha,\beta)}$ – полином Якоби:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\chi) = \sum_{q=0}^{n} \binom{n+\alpha}{q}\binom{n+\beta}{n-q}\left(\frac{\chi-1}{2}\right)^q\left(\frac{\chi+1}{2}\right)^{n-q}. \tag{3.13}$$

Отметим, что справедлива формула, аналогичная (3.9), если заменить x на $\frac{\partial}{\partial x}$. (Подчеркнем, что $F(x;z;w)$ тривиальна, если множество $\{n\}$ в (3.10) пусто.)

3.3. Приложение к определению причинных функций Грина для произвольных спинорных полей

Пусть φ и ψ -локальные конечно-компонентные поля, преобразующиеся соответственно по представлениям (i_1, j_1) и (i_2, j_2) группы Лоренца (чтобы не рассматривать тривиальные двухточечные функции, будем считать, что разность между $I = i_1 - i_2$ и $J = j_1 - j_2$ есть целое число). Наша задача - показать существование лоренц-инвариантной причинной функции, определенной так:

$$\left.\begin{aligned} &G_{\varphi\psi}(x;z;w) = F_{\varphi\psi}(x;z;w) \equiv \langle 0|\varphi(x/2;z)\cdot\psi(-x/2;w)\rangle \quad \text{при } x^0>0,\\ &G_{\varphi\psi}(x;z;w) = \eta\cdot F_{\psi\varphi}(-x;z;w) \quad \text{при } x^0<0, \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где $$\eta = (-1)^{2k_1}\ (= (-1)^{2k_2}), \qquad k_\alpha = i_\alpha - j_\alpha,\ \alpha = 1,2. \tag{3.15}$$

Мы воспользуемся редукцией (3.2), (3.9) и рассмотрим сначала приведенную задачу.

Пусть $F_1(x;\zeta)$ и $F_2(x;\zeta)$ - две обобщенные функции, удовлетворяющие условиям а)-в) п. 3.1. при $i = j = n/2$, и пусть

$$F_1(x;\zeta) = F_2(x;\zeta) \qquad \text{при} \quad (x)^2<0. \tag{3.16}$$

Покажем, что существует инвариантная функция $F(x;\zeta)$, также удовлетворяющая а)-в), такая, что

$$\left.\begin{aligned} F(x;\zeta) &= F_1(x;\zeta) \qquad \text{при } x\in\mathcal{V}_{..} \equiv \mathbb{R}_4\setminus\overline{\mathbb{V}}_-\\ F(x;\zeta) &= F_2(x;\zeta) \qquad \text{при } x\in\mathcal{V}_- \equiv -\mathcal{V}_+ \end{aligned}\right\}. \tag{3.17}$$

С этой целью используем представление (3.6) для $F_\alpha(x;\zeta)$:

$$F_\alpha(x;\zeta) = (\zeta \underset{\sim}{x} \bar{\zeta})^n \cdot F_\alpha(x) \;, \qquad \alpha = 1, 2 \;, \tag{3.18}$$

где $F_\alpha(x)$ –лоренц-инвариантные скалярные обобщенные функции,
причем

$$F_1(x) = F_2(x) \qquad \text{при} \quad (x)^2 < 0 . \tag{3.19}$$

Таким образом, задача свелась к решенной[9] проблеме существования функции $F(x)$, удовлетворяющей

$$F(x) = F_1(x) \ \text{при} \ x \in \mathcal{V}_+ \,, \qquad F(x) = F_2(x) \ \text{при} \ x \in \mathcal{V}_- \,; \tag{3.20}$$

существование такой инвариантной функции $F(x)$, видно из того, что (3.20), благодаря (3.19), определяют инвариантную обобщенную функцию в $\widetilde{\mathbb{R}}_4 \equiv \mathbb{R}_4 \setminus \{0\}$; в силу предложения В.I (дополнение В) она может быть продолжена лоренц-инвариантным образом до функции в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_4)$.

Рассмотрим подробнее случай, когда $F_\alpha(x;\zeta) \in S'(\mathbb{R}_4)$ (по переменной x) и

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \ \widetilde{F}_1(p;\zeta) &\subset \overline{V}_+^\mu \equiv \{ p : \ p^0 > 0 \,, \ (p)^2 \geq \mu^2 > 0 \} \,, \\ \operatorname{supp} \ \widetilde{F}_2(p;\zeta) &\subset \overline{V}_-^\mu \equiv -\overline{V}_+^\mu . \end{aligned} \tag{3.21}$$

В этом случае для $F_\alpha(x;\zeta)$ и $F(x;\zeta)$ удобно представление (3.7):

$$\begin{aligned} F_\alpha(x;\zeta) &= (\zeta \underset{\sim}{\partial_x} \bar{\zeta})^n \, T_\alpha(x) \qquad , \ \alpha = 1, 2 \,, \\ F(x) &= (\zeta \underset{\sim}{\partial_x} \bar{\zeta})^n \, T(x) . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Функции $T_\alpha(x)$ и $T(x)$ определены представлениями (3.22) с точностью до произвольного полинома от $(x)^2$ степени $n-1$. Нетрудно убедиться, что $T_\alpha(x)$ и $T(x)$ можно подобрать так, что

$$T(x) = T_1(x) \ \text{при} \ x \in \mathcal{V}_+ \,, \qquad T(x) = T_2(x) \ \text{при} \ x \in \mathcal{V}_- \,. \tag{3.23}$$

Условие (3.21) позволяет устранить полиномиальную неопределенность в выборе функций T_α и T в представлении (3.22) с помощью условия экспоненциального убывания функций $T_\alpha(x)$ при больших пространственно-подобных аргументах:

$$T_\alpha(x) = h\,((x)^2) \quad \text{при } (x)^2 < 0\ ; \qquad h(\tau) \to 0 \quad \text{при } \tau \to -\infty\ . \tag{3.24}$$

Действительно, $\widetilde{F}_\alpha(p;\zeta) = (-i\,\zeta\,\not{p}\,\bar{\zeta})^n\, \widetilde{T}_\alpha(p)$. В силу (3.21) $\widetilde{T}_\alpha(p)$ можно выбрать так, что $supp\ \widetilde{T}_{1,2} \subset \overline{\mathbb{V}}^\mu_\pm$. Тогда выполнится условие (3.24). (Это следует из теоремы Араки, Хеппа, Рюэлля[10], а также из представления для аналитичной при $\tau \equiv (x)^2 < 0$ функции $h(\tau)$:

$$h\,((x)^2) = \int \Delta^{(+)}(x;\lambda)\,\rho_\alpha(\lambda)\,d\lambda \quad ; \quad (x)^2 < 0\ ;\ supp\ \rho \subset [\mu,\infty)\ .).$$

Нетрудно показать, что достичь убывания (уже не экспоненциального) можно, если наложить на $\widetilde{F}_\alpha(p;\zeta)$ более слабые, чем (3.21), условия на носитель:

$$supp\ \widetilde{F}_{1,2}(p;\zeta) \subset \overline{\mathbb{V}}_\pm \tag{3.25}$$

при дополнительном предположении: $\widetilde{F}_\alpha(p;\zeta)$ — меры в $\mathbb{R}_4$, которые равны нулю для точки $p = 0$ (последнее может быть нарушено только при $n=0$).

Теперь нетрудно решить общую задачу определения инвариантной функции Грина, удовлетворяющей (3.14). Используя (3.9) с помощью вышеприведенных аргументов, получаем:

$$G_{\varphi\psi}(x;z;w) = \sum_n \mathcal{P}_n^{(i_1 j_1;\, i_2 j_2)}\left(\frac{\partial}{\partial x};z;w\right)\ G_n(x)\ , \tag{3.26}$$

где $G_n(x)$ — $L_+^\uparrow$ - инвариантные скалярные обобщенные функции. Уравнения (3.14) определяют $G_{\varphi\psi}$ с точностью до произвольной инвариантной обобщенной функции с носителем в нуле. Даже если этот произвол зафиксирован, соотношение (3.26) не определяет однозначно функции $G_n(x)$ (G_n определена с точностью до полинома от $(x)^2$ степени n - I). Как и выше, мы можем устранить эту неоднозначность (в теории с условием спектральности), потребовав, чтобы $G_n(x)$ стремились к нулю при $(x)^2 \to -\infty$.

4. Разложение двухточечных функций по спину

Пусть $\mathcal{H}_{\varphi^*}$ и $\mathcal{H}_\psi$ -подпространства в гильбертовом пространстве состояний, являющиеся замыканием линейной оболочки векторов типа

$$\varphi(u;f)^*|0\rangle \quad \text{и} \quad \psi(v;g)|0\rangle \tag{4.I}$$

соответственно, где $u,v \in S(\mathbb{R}_4)$, $f \in \mathcal{D}_{-\chi_1}, g \in \mathcal{D}_{-\chi_2}$. Пусть $\mathcal{H}_1$ – их пересечение:

$$T_\alpha(x) = h\,((x)^2) \quad \text{при } (x)^2 < 0\ ; \qquad h(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty\,. \qquad (3.24)$$

Действительно, $\widetilde{F}_\alpha(p;\xi) = (-i\,\xi\,\not{p}\,\bar{\xi})^n\,\widetilde{T}_\alpha(p)$. В силу (3.2I) $\widetilde{T}_\alpha(p)$ можно выбрать так, что $supp\ \widetilde{T}_{1,2} \subset \overline{V}_\pm^\mu$. Тогда выполнится условие (3.24). (Это следует из теоремы Араки, Хеппа, Рюэлля/IO/, а также из представления для аналитичной при $\tau \equiv (x)^2 < 0$ функции $h(\tau)$:

$$h\,((x)^2) = \int \Delta^{(+)}(x;\lambda)\,\rho_\alpha(\lambda)\,d\lambda\ ; \quad (x)^2 < 0\ ;\ supp\ \rho \subset [\mu,\infty)\,.).$$

Нетрудно показать, что достичь убывания (уже не экспоненциального) можно, если наложить на $\widetilde{F}_\alpha(p;\xi)$ более слабые, чем (3.2I), условия на носитель:

$$supp\ \widetilde{F}_{1,2}(p;\xi) \subset \overline{V}_\pm \qquad (3.25)$$

при дополнительном предположении: $\widetilde{F}_\alpha(p;\xi)$ – меры в $\mathbb{R}_4$, которые равны нулю для точки $p = 0$ (последнее может быть нарушено только при $n=0$).

Теперь нетрудно решить общую задачу определения инвариантной функции Грина, удовлетворяющей (3.I4). Используя (3.9) с помощью вышеприведенных аргументов, получаем:

$$G_{\varphi\psi}(x;z;w) = \sum_n \mathcal{P}_n^{(i_1 j_1;\, i_2 j_2)}\left(\frac{\partial}{\partial x};z;w\right)\ G_n(x)\,, \qquad (3.26)$$

где $G_n(x)$ – $L_+^\uparrow$ – инвариантные скалярные обобщенные функции. Уравнения (3.I4) определяют $G_{\varphi\psi}$ с точностью до произвольной инвариантной обобщенной функции с носителем в нуле. Даже если этот произвол зафиксирован, соотношение (3.26) не определяет однозначно функции $G_n(x)$ (G_n определена с точностью до полинома от $(x)^2$ степени n - I). Как и выше, мы можем устранить эту неоднозначность (в теории с условием спектральности), потребовав, чтобы $G_n(x)$ стремились к нулю при $(x)^2 \to -\infty$.

4. Разложение двухточечных функций по спину

Пусть $\mathcal{H}_{\varphi^*}$ и $\mathcal{H}_\psi$ –подпространства в гильбертовом пространстве состояний, являющиеся замыканием линейной оболочки векторов типа

$$\varphi(u;f)^*|0\rangle \quad \text{и} \quad \psi(v;g)|0\rangle \qquad (4.I)$$

соответственно, где $u, v \in S(\mathbb{R}_4)$, $f \in \mathcal{D}_{-\chi_1}$, $g \in \mathcal{D}_{-\chi_2}$. Пусть $\mathcal{F}_1$ – их пересечение:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{\varphi^*} \cap \mathcal{H}_\psi . \tag{4.2}$$

Унитарное представление $U(a, A)$ квантовомеханической группы Пуанкаре (удовлетворяющее (I.I)), вообще говоря приводимо в $\mathcal{H}_1$. Разложение $\mathcal{H}_1$ на неприводимые инвариантные подпространства влечет за собой спектральное представление для двухточечной функции, обобщающее хорошо известное представление /II/.

Пусть φ и ψ преобразуются соответственно по представлениям $[k_1, c_1]$ и $[k_2, c_2]$ $SL(2,C)$ (считаем $k_1 - k_2$ целым числом). Тогда представление $U(a, A)$ просто приводимо в $\mathcal{H}_1$, так что

$$\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{s \geq k} \int^{\infty} \mathcal{H}_{ms} \; d\rho_s(m) , \tag{4.3}$$

где $k = max\{|k_1|, |k_2|\}$, и $\rho_s(m)$ - положительные меры на $(0,\infty)$. Каждое неприводимое подпространство $\mathcal{H}_{ms}$ изоморфно пространству квадратично интегрируемых (по выписанной ниже мере) функций $\Psi_{ms}(p ; \xi)$ на гиперболоиде $\{p : (p)^2 = m^2, p^0 > 0\}$, которые являются однородными полиномами по $\xi \in \mathbb{C}_2$ степени $2s$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}_{ms}$ задано так:

$$< \Phi_{ms} , \Psi_{ms} > = \int \left(\frac{\partial}{\partial \bar\xi} \tilde{p} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{2s} \overline{\Phi_{ms}(p;\xi)} \Psi_{ms}(p;\xi) \, \delta^+_m(p) \, d^4 p , \tag{4.4}$$

где

$$\delta^+_m(p) = \theta(p^0)\, \delta((p)^2 - m^2) , \quad \tilde{p} = \varepsilon \underline{p}^T \varepsilon^{-1} , \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.5}$$

Разложение (4.3) вводит соответствие каждого вектора $\Phi \in \mathcal{H}_1$ вектор-функции, (зависящей от m, s)

$\Phi(m,s) \equiv E_{ms} \Phi \in \mathcal{H}_{ms}$, так что

$$<\Phi, \Psi> = \sum_{s \geq k} \int < E_{ms}\Phi , E_{ms}\Psi >_{ms} \; d\rho_s(m) . \tag{4.6}$$

В частности, мы будем писать

$$E_{ms}\, \varphi(u; f)^* |0\rangle = \Phi_{ms}(p ; \xi ; u ; f) , \tag{4.7}$$

$$E_{ms}\, \psi(v; g) |0\rangle = \Psi_{ms}(p ; \xi ; v ; g) . \tag{4.8}$$

Из трансляционной инвариантности находим

$$\Phi_{ms}(p ; \xi ; u ; f) = \overline{u(p)} \cdot \overline{\mathcal{X}^{(1)}_{ms}(p ; \bar\xi ; f)} , \tag{4.9}$$

$$\Psi_{ms}(p;\xi;v;g) = \tilde{v}(p)\,\mathcal{X}^{(2)}_{ms}(p;\xi;g). \tag{4.10}$$

Функционалам $\mathcal{X}^{(j)}_{ms}(p;\xi;f_j)$ соответствуют инвариантные ядра $\mathcal{X}^{(j)}_{ms}(p;\xi;z)$, которые являются обобщенными функциями по z, однородными индекса $[k_j, c_j]$. Учитывая, что $\mathcal{X}^{(j)}_{ms}$ – однородный полином по ξ (степени $2s$), мы находим, что $\mathcal{X}^{(j)}_{ms} \neq 0$ только при $s-|k_j| = 0,1,\dots$, и в этом случае

$$\mathcal{X}^{(j)}_{ms}(p;\xi;z) = A^{(j)}_{ms}\cdot(z\underline{p}\bar{z})^{c_j-s-1}(\xi\underline{p}\bar{z})^{s-k_j}(\xi\varepsilon z)^{s+k_j}, \tag{4.11}$$

((4.11) - частный случай (2.29) для пары представлений

$[s, s+1]$ и $[k_j, c_j]$ при $(p)^2 = m^2$).

Подставляя ((4.9-(4.11) в скалярное произведение (4.4), получим вклад от $\mathcal{H}_{ms}$ в инвариантное ядро (2.29):

$$K_{ms}(p;z;w) = B_{ms}\cdot\delta^+_m(p)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\tilde{p}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{2s}\times$$
$$\times(z\underline{p}\bar{z})^{c_1-s-1}(w\underline{p}\bar{w})^{c_2-s-1}(\overline{\xi\varepsilon z})^{s-k_1}(z\underline{p}\bar{\xi})^{s+k_1}(\xi\varepsilon w)^{s+k_2}(\xi\underline{p}\bar{w})^{s-k_2}.$$

Действуя так же, как в выводе (3.11), получаем для элементарных инвариантных ядер следующее выражение (для случая $k_1 \geqslant |k_2|$):

$$K_{ms}(p;z;w) = C_{ms}\cdot\delta^+_m(p)(z\underline{p}\bar{z})^{c_1-k_1-1}(w\underline{p}\bar{w})^{c_2-k_1-1}\times$$
$$\times(z\varepsilon w)^{k_1+k_2}(z\underline{p}\bar{w})^{k_1-k_2}\,P^{(k_1+k_2,\,k_1-k_2)}_{s-k_1}(\nu), \tag{4.12}$$

где ν дается (2.29), $P^{(\alpha,\beta)}_n(\nu)$-полиномы Якоби и $C_{ms} = m^{2(s+k_1)}(2s)!(s+k_1)!(s-k_1)!\,B_{ms}$.

Инвариантное ядро (2.29) может быть разложено по элементарным ядрам (4.12):

$$K(p;z;w) = \sum_{s\geqslant k}\int K_{ms}(p;z;w)\,d\rho_s(m). \tag{4.13}$$

Это разложение соответствует следующему представлению для $g(\tau;\nu)$ (см. (2.29)):

$$g(\tau;\nu) = \sum_{s\geqslant k} g_s(\tau)\cdot P^{s}_{k,\ell}(\nu), \tag{4.14}$$

где
$$k = \max\{|k_1|, |k_2|\}, \quad \ell = -\frac{k_1\cdot k_2}{k}, \tag{4.15}$$

а $P^{s}_{k\ell}(\nu)$ –обобщенные сферические функции/12/:

$$P^{s}_{k\ell}(\nu) = i^{\ell-k}\sqrt{\frac{(s-k)!\,(s+k)!}{(s-\ell)!\,(s+\ell)!}}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta}\cdot P^{(\alpha,\beta)}_{m}(\nu); \qquad (4,16)$$

здесь $$m = s-k,\ \alpha = k+\ell,\ \beta = k-\ell. \qquad (4.17)$$

Заметим, что представление 4.14) справедливо для всех k_1, k_2 (а не только для $k_1 \geq |k_2|$).

Мы покажем в дополнени: Д , что каждое распределение $g(\nu)\in\mathcal{D}'([-1,1])$ может быть разложено в ряд типа (4.14) с коэффициентами g_s полиномиального роста (по S). В нашем случае $g(\tau;\nu)\in\mathcal{L}'(\mathbb{R}^+_1\times[-1,1])$ зависит также от τ , и разложение (4.14) имеет смысл тогда и только тогда, когда последовательность обобщенных функций $g_s(\tau)\in$ $\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_1)$ полиномиально ограничена по S (т.е., когда

$$C_s(u) \equiv (g_s(\tau), u(\tau)) \quad , \quad s = k, k+1,\ldots \ —$$

числовая последовательность степенного роста (по S) при любой функции $u(\tau)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^+_1)$).

<u>З а м е ч а н и е.</u> Двухточечная функция эрмитово-сопряженных полей $\psi(x;f)$ и $\varphi(x;\bar{f})\equiv\psi(x;f)^*$ (соответствующая индексам $[k_2, c_2] = [-k_1, \bar{c}_1] = [k,c]$) удовлетворяет условию положительности: $K(u;\bar{f};f)\geq 0$ при любой неотрицательной $\tilde{u}(p)\in\mathcal{D}(\mathbb{V}_+)$ и любой $f\in\mathfrak{D}_{-\chi}$. Из вышеприведенного рассмотрения следует, что для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы $g_s(\tau)$ являлась положительной обобщенной функцией из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_1)$ (т.е. положительной мерой на $(0,\infty)$). Более общо можно показать, что обобщенные сферические функции $P^{s}_{\ell\ell}(\nu)$ $(s=|\ell|,|\ell|+1,\ldots)$ являются неразложимыми элементарными в конусе Q_ℓ положительно-определенных функций на отрезке $[-1,1]$. При этом мы говорим, что функция $f(\nu)$ из $\mathfrak{D}'$ (см. дополнение Д) принадлежит Q_ℓ , если

$$(f(\nu), \ \bar{U}\circ U(\nu)) \geq 0 \qquad (4.18)$$

для любой функции $U(z)$ пространства Z бесконечно-дифференцируемых функций на единичной сфере Ω в двумерном комплексном пространстве; в (4.18)

$$(U\circ V)(\nu) = \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{-|\ell|}\int e^{i2\ell\arg(z\bar{w})}\,\delta\left(\nu-\left(|z\bar{w}|^2-|z\varepsilon w|^2\right)\right)\times$$

$$\times U(z)\,V(w)\,d\omega(z)\,d\omega(w) \qquad \left(d\omega(z)\equiv\delta(1-|z|^2)\,d^2z\,d^2\bar{z}\right)$$

есть композиция элементов из Z , переводящая $Z\times Z$ в $\mathfrak{D}$.

Д о п о л н е н и е А. <u>Изоморфизм между $\mathfrak{D}'_\chi$ и подпространством в $\mathcal{D}'(\tilde{\mathbb{C}}_2)$ однородных обобщенных функций индекса $-\chi$</u>.

А.1. <u>Краткое описание неприводимых представлений $SL(2,C)$ в пространстве однородных функций/2/</u>.

Пусть $\mathfrak{D}_\chi$ -пространство однозначных бесконечно-дифференцируемых функций комплексного вектора $z \equiv (z_1, z_2) \in \widetilde{\mathbb{C}}_2$, однородных индекса $\chi = [k, c]$:

$$f(\sqrt{\rho}\, z) = \rho^{c-1} \cdot f(z) \qquad \text{при любых } \rho > 0,$$
$$f(e^{i\alpha/2} z) = e^{ik\alpha} \cdot f(z) \qquad \text{при вещественных } \alpha. \tag{A.I}$$

Однозначность функций предполагает, что k - целое или полуцелое; c - произвольное комплексное число. $\mathfrak{D}_\chi$ - полное счетное нормированное пространство со счетной системой полунорм:

$$\|f\|_n = \sup_{|z|=1} \max_{\sum_i(\alpha_i+\beta_i)\le n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_2}\right)^{\beta_2} f(z_1, z_2) \right|, \tag{A.2}$$

где $\quad |z|^2 = z_1 \bar z_1 + z_2 \bar z_2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

В $\mathfrak{D}_\chi$ определено представление T_χ группы $SL(2, C)$:

$$(T_\chi(A) f)(z) = f(zA) \equiv f(A^T z). \tag{A.3}$$

Это представление неприводимо в $\mathfrak{D}_\chi$ тогда и только тогда, когда пара $[k, c]$ не удовлетворяет ни одному из соотношений

$$c - |k| = 1, 2, \ldots \tag{A.4.а}$$

$$-c - |k| = 1, 2, \ldots \tag{A.4.б}$$

В этих исключительных случаях представление χ приводимо, но не полностью/2/.
В случае (A.4а) пространство $\mathfrak{D}_\chi$ содержит конечномерное инвариантное подпространство однородных полиномов по z и $\bar z$. Во всех случаях, кроме (A.4), представления χ и $-\chi$ эквивалентны/2/.

А.2. Отображение $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ на $\mathfrak{D}_\chi$ и его сопряженное

Определим линейное непрерывное отображение I_χ пространства Шварца основных функций $F(z) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ на $\mathfrak{D}_\chi$:

$$f(z) = (I_\chi F)(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{4\pi} d\alpha\, F(\sqrt{\rho}\, e^{i\alpha/2} \cdot z) \cdot \rho^{1-c}\, e^{-ik\alpha}. \tag{A.5}$$

Чтобы убедиться, что образом $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ при отображении (A.5) является все пространство $\mathfrak{D}_\chi$, выберем $h(\rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1^+)$, для которой

$$2\pi \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} h(\rho) = 1. \tag{A.6}$$

Для всякой $f(z) \in \mathfrak{D}_\chi$ мы можем указать

$$F(z) = f(z) \cdot h(|z|^2) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2), \tag{A.7}$$

такую, что

$$f = I_\chi F.$$

Сопоставим с каждым функционалом $\varphi \in \mathfrak{D}'_\chi$ элемент $\Phi = I^*_\chi \varphi \in \mathcal{D}'(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ по формуле:

$$(\Phi, F) = (\varphi, I_\chi F), \qquad F \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2). \tag{A.8}$$

Легко проверяется, что определенный так функционал Φ принадлежит пространству $d_{-\chi}$ обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$, однородных индекса $-\chi = [-k, -c]$: для любого $a = \sqrt{\rho}\, e^{i\alpha/2}$

$$\Phi(az) = \rho^{-c-1} e^{-ik\alpha} \Phi(z). \tag{A.9}$$

Действительно,

$$(\Phi(az), F(z)) = \rho^{-2} (\Phi(z), F(\tfrac{z}{a})) = \rho^{-2} (\varphi, I_\chi F(\tfrac{z}{a})) =$$

$$= \rho^{-c-1} e^{-ik\alpha} (\varphi, I_\chi F(z)) = \rho^{-c-1} e^{-ik\alpha} (\Phi, F).$$

Покажем, что преобразование I^*_χ осуществляет изоморфизм между $\mathfrak{D}'_\chi$ и $d_{-\chi}$. Мы уже показали, что каждому $\varphi \in \mathfrak{D}'_\chi$ соответствует $\Phi = I^*_\chi \varphi \in d_{-\chi}$. Теперь нам понадобится лемма.

<u>Л е м м а A.I.</u> Каждая обобщенная функция $\Phi \in \mathcal{D}'(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$, удовлетворяющая условию однородности (A.9), обращается в нуль на подпространстве

$$\mathcal{E}_\chi = \{ F(z) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2) : (I_\chi F)(z) \equiv 0 \} \tag{A.11}$$

(т.е. на нуль-пространстве отображения (A.5)). <u>Доказательство</u>[5/]. В силу (A.9) для любых основных функций $F(z), G(z) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$ имеем тождество (ниже $a = \sqrt{\rho}\, e^{i\alpha/2}$):

$$\rho^{-1} (\Phi(z), F(z) G(\tfrac{z}{a})) \quad (\equiv \rho (\Phi(az), F(az) \cdot G(z))) =$$

$$= \rho^{-c} e^{-ik\alpha} (\Phi(z), F(az) \cdot G(z)). \tag{A.12}$$

Проинтегрируем обе части (A.12) по $|da\, d\bar{a}| = \frac{1}{2} d\rho\, d\alpha$. При этом правую часть можно понимать как результат применения обобщенной функции $H(z; a) = \Phi(z) \times \frac{1}{\rho} \in \mathcal{D}'(\widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_1)$ к основной $F(z) \cdot G(\frac{z}{a})$; аналогичный смысл имеет правая часть. В силу коммутативности прямого произведения распределений получим:

$$
\left(\Phi(z),\ F(z)\cdot\int G\left(\frac{z}{\alpha}\right)\frac{d\rho}{2\rho}\,d\alpha\right) = \tag{A.13}
$$

$$
= \left(\Phi(z),\ G(z)\cdot(I_\chi F)(z)\right).
$$

Полагая здесь $G(z)=h(|z|^2)$, где $h(\rho)$ - такая же, как в (A.6), получаем для любой $F\in\mathcal{E}_\chi$ $(\Phi,F)=0$, что доказывает лемму.

Из леммы следует, что для любой $\Phi\in d_{-\chi}$ существует линейный функционал φ над $\mathfrak{D}_\chi$ такой, что

$$
(\varphi,f)=(\Phi,F)\ , \qquad \text{если} \quad f=I_\chi F. \tag{A.14}
$$

(Лемма A.I показывает, что (Φ,F) не зависит от выбора F, удовлетворяющего $I_\chi F=f$; функционал φ определен на всем $\mathfrak{D}_\chi$, поскольку образ $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ при преобразовании I_χ совпадает с $\mathfrak{D}_\chi$.) Непрерывность φ следует из общих теорем. Она также очевидна из формулы

$$
(\varphi,f) = \left(\Phi(z),\ h(|z|^2)\cdot f(z)\right), \tag{A.15}
$$

где $h(\rho)$ выбрана, как в (A.6). Итак, $\varphi\in\mathfrak{D}'_\chi$.

Представление (A.3) $SL(2,C)$ в $\mathfrak{D}_\chi$ порождает представление T'_χ в $\mathfrak{D}'_\chi$:

$$
(T'_\chi(A)\varphi,f) = (\varphi,T_\chi(A^{-1})f). \tag{A.16}
$$

Изоморфизм I^*_χ между $\mathfrak{D}'_\chi$ и $d_{-\chi}$ позволяет определить представление $SL(2,C)$ также в $d_{-\chi}$:

$$
\Phi\to\Phi_A = I^*_\chi T'_\chi(A)\varphi \quad , \qquad (\varphi=(I^*_\chi)^{-1}\Phi). \tag{A.17}
$$

Используя (A.8) и (A.16), получаем

$$
(\Phi_A(z),F(z)) = (T'_\chi(A)\varphi,I_\chi F) = (\varphi,T_\chi(A^{-1})I_\chi F) =
$$

$$
= (\varphi,(I_\chi F)(zA^{-1})) = (\Phi(z),F(zA^{-1})) = (\Phi(zA),F(z)),
$$

т.е. $\qquad \Phi_A(z) = \Phi(zA).$

Так определенное представление $SL(2,C)$ в $d_{-\chi}$ есть продолжение представления $T_{-\chi}$, определенного (A.3) в $\mathfrak{D}_{-\chi}$.

Дополнение Б. Доказательство леммы 2.I

Чтобы проверить законность перехода к переменным (2.8)-(2.10) наиболее простым способом, будем делать замену переменных в несколько этапов. Ограничимся обсуждением одного случая (отображения $O_1 = \mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \mathbb{C}_1 \times \widetilde{\mathbb{C}}_1\ (w_2 \neq 0)$ на Ω_1).

Отображение

$$(\underline{p}\,;z;w) \to \left(\underline{p}\,;\ \xi = z_1 + \frac{p^{21}}{p^{11}} z_2,\ z_2\,;\ \zeta = w_1 + \frac{p^{21}}{p^{11}} w_2\,,\ w_2\right)$$

взаимно-однозначно и бесконечно-дифференцируемо переводит O_I на O_I с якобианом I.

Далее, рассмотрим (взаимно-однозначную , C^∞) замену переменных:

$$(\underline{p}\,;\xi, z_2;\zeta, w_2) \to \left(\underline{p}\,;\ s = \sqrt{(p)^2}\cdot(\xi\cdot w_2 - \zeta\cdot z_2),\ t = p^{11}\xi\bar{\zeta} + \frac{(p)^2}{p^{11}} z_2\bar{w}_2\,;\ \zeta\,, w_2\right).$$

Якобиан ее не обращается в нуль в O_I:

$$\frac{\partial(s,\bar{s}\,;t,\bar{t})}{\partial(\xi,\bar{\xi}\,;z_2,\bar{z}_2)} = \left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(\xi,z_2)}\right|^2 = (p)^2\cdot\left(p^{11}\zeta\bar{\zeta} + \frac{(p)^2}{p^{11}} w_2\bar{w}_2\right)^2 = (p)^2(w\underline{p}\bar{w})^2 > 0.$$

Учитывая, что $w_2 \neq 0$ в O_I, положим

$$w_2 = \rho\, e^{i\varphi}\,; \qquad \rho > 0\,,\ -\infty < \varphi < \infty\,.$$

Это позволяет установить изоморфизм между пространством обобщенных функций $K(\underline{p}\,;z;w) \in \mathcal{D}'(O_1)$ и пространством обобщенных функций

$$\check{K}(\underline{p}\,;s,t\,;\zeta,\rho,\varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{V}_+ \times \widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \mathbb{C}_1 \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1),$$

периодичных по φ с периодом 2π (см./15/, гл. 4).

Наконец, сделаем последнюю(регулярную)замену переменных. Вместо p^{22} вводим

$$\tau = p^{11}\cdot p^{22} - p^{21}\cdot\overline{p^{21}} \equiv (p)^2 \qquad \text{и} \qquad v = p^{11}\zeta\bar{\zeta} + \frac{\tau}{p^{11}}\rho^2 \equiv w\underline{p}\bar{w}$$

вместо ρ :

$$(p^{11}, p^{22}, p^{21}\,; s,t\,;\zeta\,;\tau,\varphi) \to (\tau\,;v\,;s,t\,;p^{11},p^{21}\,;\zeta\,;\varphi).$$

Мы приходим, таким образом, к пространству $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, что доказывает лемму 2.I.

Дополнение В. Общая форма ковариантной спинорной обобщенной функции (доказательство теоремы 3.I)

Лемма В.I. Пусть $F(x;\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.I. Тогда существует (и единственна при $i=j$) пара инвариантных обобщенных функций $f_\pm(\tau) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_1)$,совпадающих при $\tau < 0$ и связанных с $F(x;\xi)$ при помощи

$$F(x;\xi) = (\xi \underset{\sim}{x} \bar{\xi})^{2j} \cdot f_{\pm}((x)^2) \cdot \delta_{ij} \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{V}_{\pm}\,; \tag{BI}$$

здесь $$\mathcal{V}_{+} = \mathbb{R}_4 \setminus \overline{\mathbb{V}}_{-}\,, \quad \mathcal{V}_{-} = -\mathcal{V}_{+}\,. \tag{B2}$$

Доказательство. Мы ограничимся рассмотрением $F(x\,\xi)$ в $\mathcal{V}_{+}$. В силу (3.3) достаточно доказать (B.I) в области

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}_4 : \quad x^{\mu} > 0\,, \mu = 0,1,2,3\}, \tag{B3}$$

так как $$\mathcal{V}_{+} = \bigcup_{\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}} \Lambda\,\mathbb{X}\,.$$

Поскольку $F(x;\xi)$ -полином по ξ и $\bar{\xi}$, нет нужды считать ξ пробегающим $\mathbb{C}_2$, достаточно ограничить ξ некоторой областью Q, и в качестве таковой удобно выбрать

$$Q = \{\xi \in \mathbb{C}_2 : \quad \xi \sigma_{\mu} \bar{\xi} > 0\,, \quad \mu = 0,1,\ldots,3\}\,. \tag{B.4}$$

Как и в п. 2.I, 4-вектор x отождествляем с эрмитовой матрицей $\underset{\sim}{x}$. При фиксированном параметре $\xi \in Q$ в обобщенной функции $F(x;\xi)$ можно перейти к переменным $\tau = (x)^2$, $u = \xi \underset{\sim}{x} \bar{\xi}$, x^{21}; $(x^{12} = \overline{x^{21}})$(Нетрудно убедиться, что в рассматриваемой области $x \in \mathbb{X}$, $\xi \in Q$ преобразование переменных взаимно однозначно, C^{∞} с якобианом

$$\frac{\partial(\tau, u)}{\partial(x^{11}, x^{22})} = -(x^0 \cdot \xi\sigma_3\bar{\xi} + x^3 \cdot \xi\sigma_0\bar{\xi}) < 0$$

Подставляя $$F(\underset{\sim}{x};\xi) = G(u,\tau;x^{21}\;\xi)$$
в дифференциальные уравнения (3.4), получаем

$$\begin{gathered}
x^{22}\frac{\partial G}{\partial x^{12}} - \xi_1 \frac{\partial G}{\partial \xi_2} = 0, \qquad x^{22}\frac{\partial G}{\partial x^{21}} - \bar{\xi}_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_2} = 0,\\
x^{11}\frac{\partial G}{\partial x^{21}} - \xi_2 \frac{\partial G}{\partial \xi_1} = 0, \qquad x^{11}\frac{\partial G}{\partial x^{12}} - \bar{\xi}_2 \frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_1} = 0,\\
x^{12}\frac{\partial G}{\partial x^{12}} - x^{21}\frac{\partial G}{\partial x^{21}} - \xi_1 \frac{\partial G}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial G}{\partial \xi_2} = 0,\\
x^{21}\frac{\partial G}{\partial x^{21}} - x^{12}\frac{\partial G}{\partial x^{12}} - \bar{\xi}_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_1} + \bar{\xi}_2 \frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_2} = 0.
\end{gathered} \tag{B.5}$$

Рассматриваем (B.5) как линейную систему 6 уравнений относительно $\frac{\partial G}{\partial x^{12}}$, $\frac{\partial G}{\partial x^{21}}$, $\frac{\partial G}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_1}$, $\frac{\partial G}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial G}{\partial \bar{\xi}_2}$. Ее детерминант

$$(x^{22}\zeta_2\bar\xi_2 - x^{11}\zeta_1\bar\xi_1)\ (\xi \underset{\sim}{x} \bar\xi) \equiv$$
$$\equiv -(x^0\cdot \xi\sigma_3\bar\xi + x^3\,\xi\sigma_0\bar\xi)\cdot \xi \underset{\sim}{x}\bar\xi$$

в рассматриваемой области (B3), (B4) не равен нулю; следовательно, все производные от G по $x^{12}, x^{21}, \xi, \bar\xi$ равны нулю. Поэтому для достаточно малой окрестности произвольной точки $(x^{(0)}, \xi^{(0)}) \in \mathbb{X}\times Q$ существует $g^{(0)}(\tau; u)$ такая, что

$$G(\tau, u; x^{12}; \xi) = g^{(0)}(\tau; u),$$

т.е.

$$K(x;\xi) = g^{(0)}((x)^2; \xi \underset{\sim}{x}\bar\xi). \qquad (B.6)$$

С другой стороны, множество $\{(x,\xi): (x)^2 = \tau, \xi\underset{\sim}{x}\bar\xi = u \neq 0\}$ — однородное пространство относительно группы преобразований $(\underset{\sim}{x}, \xi)\to(A\underset{\sim}{x}A^*, \xi A^{-1})$ (см. Дополнение Г), поэтому из (3.3), (B.6) следует, что $g^{(0)}(\tau;u)$ не зависит от точки $(x^{(0)}, \xi^{(0)})$, т.е. существует $g(\tau;u)\in$ $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_1^+)$ такая, что

$$F(x;\xi) = g((x)^2; \xi\underset{\sim}{x}\bar\xi). \qquad (B.7)$$

Условие однородности дает $F(x;\lambda\xi) = \lambda^{2i}(\bar\lambda)^{2j}F(x;\xi)$ для любого комплексного λ, откуда $g(\tau;u) = 0$ при $i\neq j$ и $g(\tau;u) = u^{2j} f_+(\tau)$ при $i=j$. Представление (B.I) доказано. Из справедливости представление (B.I) в $\mathcal{V}_+\cap\mathcal{V}_-$ следует $f_+(\tau) = f_-(\tau)$ для $\tau<0$. Это доказывает лемму.

Как следствие, получаем : при $x\neq 0$

$$F(x;\xi) = (\xi\underset{\sim}{x}\bar\xi)^{2j}\cdot F(x), \qquad (B.8)$$

где $F(x)\in \mathcal{D}'(\widetilde{\mathbb{R}}_4)\equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}_4\setminus\{0\})$ и

$F(x) = f_\pm((x)^2)$ при $x\in\mathcal{V}_\pm$.

Следующим шагом будет нахождение инвариантных функций с носителем $\{x=0\}$.

<u>Лемма В.2.</u> $F(x;\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.I и $\operatorname{supp} F(x;\xi) = \{x=0\}$, тогда

$$F(x;\xi) = (\xi\underset{\sim}{x}\bar\xi)^{2j}\sum_{k=2j}^{N} c_k\,(\Box)^k\,\delta(x)\cdot\delta_{ij} \qquad (B.9)$$

<u>Доказательство</u>. Так как F сосредоточена в нуле, она принадлежит $S'(\mathbb{R}_4)$, и ее фурье-преобразование - полином по p, равно как и по $\xi,\bar\xi$. Из условия инвариантности (и леммы В.I) легко находим

$$\widetilde{F}(p;\xi) = (\xi\underset{\sim}{p}\bar\xi)^{2j}\sum_{k=0}^{M} a_k\,[(p)^2]^k\cdot\delta_{ij}. \qquad (B.10)$$

Используя тождества

$$(\xi\, \partial_p \bar{\xi})(\xi \not{p} \xi) = 0\,, \quad (\xi\, \partial_p \bar{\xi})(p)^2 = 2\cdot \xi \not{p} \bar{\xi}\,, \tag{B.II}$$

находим

$$(\xi\, \partial_p \bar{\xi})^n \left[(p)^2\right]^k = 0 \qquad \text{при} \quad n > k\,, \tag{B.I2}$$

$$(\xi\, \partial_p \bar{\xi})^n \left[(p)^2\right]^k = \binom{k}{n}\cdot 2^n\cdot (\xi \not{p} \bar{\xi})^n \left[(p)^2\right]^{n-k} \qquad \text{при} \quad n \leq k, \tag{B.I3}$$

так что

$$(\xi \not{p} \bar{\xi})^n \left[(p)^2\right]^k = \frac{k!\,n!}{(k+n)!}\, 2^{-n} (\xi\, \partial_p \bar{\xi})^n \left[(p)^2\right]^{k+n}.$$

Следовательно, при $i = j = n/2$

$$\widetilde{F}(p;\xi) = (\xi\, \partial_p \bar{\xi})^n \sum_{k=n}^{N} \ell_k \left[(p)^2\right]^k,$$

что эквивалентно (B.9).

Формула (3.6) теоремы (3.I) – простое следствие лемм B.I, B.2 и следующего предложения, вытекающего из анализа Гординга и Руса (/7/, §8; см., в частности, доказательство теоремы 8.I).

Предложение B.I. Каждая скалярная лоренц-инвариантная функция $F(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_4 \setminus \{0\})$ **может быть продолжена до лоренц-инвариантной обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_4)$.**

Чтобы доказать (3.7), заметим сначала, что для $F(x;\xi) \in S'(\mathbb{R}_4)$ (3.7) получается применением (3.6) к фурье-преобразованию для $F(x;\xi)$. В общем случае (для $F(x;\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_4)$) положим $F(x;\xi) = F_1(x;\xi) + F_2(x;\xi)$

с

$$F_1(x;\xi) = \alpha\left((x)^2\right)\cdot F(x;\xi)\,, \quad F_2(x;\xi) = \left[1 - \alpha\left((x)^2\right)\right]\cdot F(x;\xi)\,,$$

где $\alpha(\tau) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1)$ и $\alpha(\tau) = 1$ при $|\tau| < 1$.

Используя (3.6) и анализ Гординга-Руса (/7/, § 8), нетрудно убедиться, что $F_1(x;\xi) \in S'(\mathbb{R}_4)$, так что для F_1 справедливо представление типа (3.7). Чтобы убедиться, что F_2 может быть записана в виде (3.7), мы используем свойства носителя F_2 и тождества (B.II),(B.I2), которые позволяют для данной $f_\pm(\tau) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_1)$, исчезающей при $|\tau| < 1$, найти $h_\pm(\tau) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_1)$ с тем же свойством, так что

$$(\xi \not{x} \bar{\xi})^k f_\pm\left((x)^2\right) = (\xi\, \partial_x \bar{\xi})\; h_\pm\left((x)^2\right) \qquad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Это доказывает представление (3.7). Произвол в выборе функций $F(x)$, $T(x)$ в (3.6) – (3.7) следует из тождеств (B.I2)-(B.I3).

Дополнение Г. Орбиты группы $SL(2,C)$ в пространстве $\widetilde{\mathbb{R}}_4 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$

Зададим на множестве $\left\{ (p, z) : \quad p \in \widetilde{\mathbb{R}}_4 \equiv \mathbb{R}_4 \setminus \{0\},\ z \in \widetilde{\mathbb{C}}_2 \equiv \widetilde{\mathbb{C}}_2 \setminus \{0\} \right\}$ группу преобразований:

$$(p, z) \to (\Lambda(A), z A^{-1}) , \qquad A \in SL(2,C) \tag{Г.I}$$

(здесь $\Lambda(A)$ –преобразования Лоренца).

Набор инвариантных функций $\left\{ \varphi_j (p, z) \right\}_{j=1,\dots,N}$ назовем полным, если множества

$$\mathfrak{M} = \left\{ (p, z) : \qquad \varphi_j (p, z) = const, \quad j = 1, \dots, N \right\} \tag{Г.2}$$

являются однородными пространствами группы преобразований (Г.1), т.е. , если для произвольной точки $(p, z) \in \mathfrak{M}$ существует $A \in SL(2,C)$, такое, что $(p,z) = (\Lambda(A) q, a A^{-1})$, где (q, a) –любая фиксированная точка на $\mathfrak{M}$. Всякая инвариантная функция на $\widetilde{\mathbb{R}}_4 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$ является функцией полного набора инвариантов, который мы собираемся списать.

Очевидно, что функции

$$\varphi_1 (p, z) = (p)^2 , \qquad \varphi_2 (p, z) = z p \bar{z} \tag{Г.3}$$

являются инвариантами преобразований (Г.I). Рассмотрим различные случаи в зависимости от типа поверхности $(p)^2 = const$ в отдельности.

I. $(p)^2 > 0$.

В этом случае набор (Г.4) является полным. Действительно, пусть (p, z) – произвольная точка $\mathfrak{M}$, ($\mathfrak{M}$ –определено в (Г-2) с $N=2$). В качестве точки $(q, a) \in \mathfrak{M}$ возьмем

$$q = sgn\, \varphi_2 \cdot \sqrt{\varphi_1} \cdot (1,0,0,0) , \qquad a = \sqrt{|\varphi_2|} \cdot (1,0) .$$

Очевидно, существует $B \in SL(2,C)$, такое, что $p = \Lambda(B) q$. Тогда $(p, z) = (B q B^*, z' B^{-1})$, где $z' = z B$, причем из $\varphi_2 (q, z') = \varphi_2 (q, a)$ следует $|z|^2 = |a|^2$, и, значит, существует $V \in SU(2) \subset SL(2,C)$, удовлетворяющее равенствам: $q = V q V^*$, $z' = a V^{-1}$. Взяв $A = B \cdot V$, получим:

$$(p, z) = (\Lambda(A) q , a A^{-1}).$$

II. $(p)^2 = 0$, $(p \neq 0)$.

а) $z p \bar{z} \neq 0$.

Набор (Г.4) также является полным. Обозначим $u^\mu(z) = z \sigma^\mu \bar{z}$ – это изотропный 4-вектор: $(u)^2 = 0$, $u^0 > 0$. Условие $z p \bar{z} \neq 0$ означает $p \cdot u(z) \neq 0$.
На множестве $\mathfrak{M}$ (Г.2) выберем точку (q, a):

$$q = \frac{1}{2} \varphi_2 \cdot (1, 0, 0, -1) , \qquad a = (1, 0) ;$$

$$u(a) = (1,0,0,1).$$

Пусть $(p,z) \in \mathfrak{M}$, тогда $p, u(z)$ – изотропные векторы, причем

$$p \cdot u(z) = q \cdot u(a), \quad sgn\, p^0 = sgn\, q^0, \quad sgn\, u^0(z) = sgn\, u^0(a).$$

Очевидно, существует лоренц-преобразование $\Lambda(B)$: $p = \Lambda(B)q$, $u(z) = \Lambda(B)u(a)$, так что $(p,z) = (\Lambda(B)q, z'B^{-1})$, причем $u(z') = u(zB) = \Lambda(B^{-1})u(z) = u(a)$. Отсюда находим z':

$$z' = e^{i\alpha} \cdot a. \text{ Взяв } \quad V = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix},$$

получаем:

$$\Lambda(V)q = q, \quad z' = aV^{-1}.$$

Теперь ясно, что преобразование $A = B \cdot V$ обладает свойством (Г.3)

б) $zp\bar{z} = 0.$

В этом случае p и $u(z)$ –ортогональные изотропные 4-векторы, следовательно, они коллинеарны, и их отношение — лоренц-инвариант:

$$\varphi_3(p,z) = \frac{p^\mu}{u^\mu(z)}, \qquad \mu = 0,1,2,3.$$

Доказательство полноты набора $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ таково же, как в случае II,а) с той разницей, что в качестве q следует взять $q = \varphi_3 \cdot (1,0,0,1)$.

III. $(p)^2 < 0.$

а) $zp\bar{z} \neq 0.$

Набор инвариантов (Г.4) полный. Возьмем на множестве $\mathfrak{M}$ (Г.2) точку:

$$q = -sgn\,\varphi_2 \cdot \sqrt{|\varphi_1|} \cdot (0,0,0,1), \quad a = \sqrt{|\varphi_2|} \cdot (1,0);$$
$$u(a) = |\varphi_2| \cdot (1,0,0,1).$$

Далее действуем, как в случае II,а).

б) $zp\bar{z} = 0.$

В этом случае множество $M = \{(p,z) : \varphi_1 = const < 0, \varphi_2 = 0\}$ не является однородным пространством. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим на M точку (q, a) :

$$q = \sqrt{-\varphi_1} \cdot (0,1,0,0), \quad a = e^{i\alpha}(1,0), \qquad \text{(Г.5)}$$
$$u(a) = (1,0,0,1).$$

Легко проверить, что для любой $(p,z) \in M$ существует $B \in SL(2,C)$, такое, что

$$p = \Lambda(B)q, \qquad u(z) = \Lambda(B)u(a). \qquad \text{(Г.6)}$$

Положим $b = (1,0)$, тогда из $u(z) = \Lambda(B)\, u(a) = \Lambda(B)\, u(b) = u(b B^{-1})$ следует, что

$$z = e^{i\beta} \varsigma(p,z), \qquad (\text{Г}.7)$$

где

$$\varsigma(p,z) = b B^{-1}, \qquad (\text{Г}.8)$$

а B определена (не единственным образом) в (Г.6).

Найдем теперь необходимое и достаточное условие существования матрицы A, такой, что

$$p = \Lambda(A)\, q, \qquad z = a A^{-1}. \qquad (\text{Г}.9)$$

Используя (Г.6)-(Г.8), перепишем (Г.9):

$$\Lambda(B)\, p = \Lambda(A)\, q, \qquad e^{i\beta}\, b B^{-1} = e^{i\alpha}\, b A^{-1},$$

или, с помощью матрицы $V = B^{-1}A$,

$$V p V^{*} = p, \qquad b V^{-1} = e^{i(\alpha-\beta)}\, b. \qquad (\text{Г}.10)$$

Нетрудно проверить, что (Г.10) возможно (лишь) при $V = \pm I$, $(e^{i\beta})^2 = (e^{i\alpha})^2$. Стало быть, точку $(q\ z) \in M$ тогда и только тогда можно соединить с точкой (Г.5), когда

$$\left(\frac{z_j}{\varsigma_j(p,z)}\right)^2 = (e^{i\alpha})^2, \qquad j = 1,2.$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\varphi_3(p,z) = \left(\frac{z_j}{\varsigma_j(p,z)}\right)^2, \qquad j = 1,2,$$

является инвариантом, дополняющим φ_1 и φ_2 (при $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 = 0$) до полного.

Дополнение Д. Выражение обобщенных функций на отрезке [-I,I] через ряды по полиномам Якоби

Обозначим посредством $\mathfrak{D}([-1,1]) \equiv \mathfrak{D}$ пространство бесконечно-дифференцируемых функций $f(y)$ на отрезке $[-I,I]$ с топологией, определенной счетной системой полунорм:

$$a_k(f) = \sup_{-1 \le y \le 1} \left| \frac{d^k f(y)}{d y^k} \right|, \qquad k = 0,1,\ldots \qquad (\text{Д}.I)$$

(Для $a_0(f)$ будем также использовать обозначение $\|f\|$.)

Пусть $\left\{ P_n^{(\alpha,\beta)}(y) \right\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность полиномов Якоби /I6/, ортогональных с весом $\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta}$ на отрезке $[-1,1]$ $(\alpha,\beta>-1)$:

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle \equiv \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta}\cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)\, P_m^{(\alpha,\beta)}(\nu)\, d\nu = h_n\cdot\delta_{nm}. \qquad (Д.2)$$

Нашей задачей является доказательство теоремы.

<u>Теорема Д.I.</u> Всякая обобщенная функция $T(\nu)\in\mathfrak{D}'$ представима в виде сходящегося в $\mathfrak{D}'$ ряда

$$T(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta}\cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u_n\cdot t_n(\nu), \qquad (Д.3)$$

где

$$t_n(\nu) \equiv \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu) \quad -$$

функционал над $\mathfrak{D}$, определяемый интегралом

$$(t_n, f) = \int_{-1}^{1} t_n(\nu)\, f(\nu)\, d\nu, \qquad \text{а} \qquad \{u_n\}_{n=0}^{\infty} \;-$$

числовая последовательность степенного роста; последнее означает существование констант A, q, таких, что

$$|u_n| \leqslant A\cdot(1+n)^{q}, \quad n=0,1,\dots$$

И наоборот, всякая числовая последовательность степенного роста задает по формуле (Д.3) непрерывный функционал над $\mathfrak{D}$.

Теорема доказывается с помощью результатов прямого и обратного анализов конструктивной теории функций/I7/. Пусть $f\in\mathfrak{D}$. Обозначим

$$E_n(f) = \inf\, \| f(\nu) - P_n(\nu)\|, \quad n=0,\dots, \qquad (Д.4)$$

где нижняя грань берется по всевозможным полиномам $P_n(\nu)$ степени $\leqslant n$. Из классической теоремы Джексона (/I7/, п.5,I.5) следует:

$$E_n(f) \leqslant \alpha_r\, n^{-(r+1)}\, a_{r+1}(f), \quad r=0,1,\dots \quad n>r \qquad (Д.5)$$

(α_r -константы, зависящие только от r), и, следовательно, для любой $f\in\mathfrak{D}$

$$b_{r+1}(f) \equiv \sup_{n>r}\left[n^{r} E_n(f)\right] \leqslant \alpha_r\cdot a_{r+1}(f) < \infty, \quad r=0,1,\dots \qquad (Д.6)$$

Покажем, что система полунорм

$$\{b_r(f)\}_{r=0}^{\infty}, \qquad (Д.7)$$

элементы которой при $r\geqslant 1$ определены в (Д.6), и $b_0(f) = a_0(f)$, эквивалентна системе

(Д.I). То, что (Д.7) мажорируется (Д.I), с очевидностью следует из (Д.6). Чтобы доказать мажорацию в обратную сторону, воспользуемся теоремой Дзядыка [6] ([18], теорема 3; см. также[17], п.2.6.3):

Пусть для функции $f(\nu)$ на отрезке $[-1,1]$ при некоторых r, N, α $(r, N=0,1\ldots, 0<\alpha<1)$ существует константа $M(f)$, такая, что при любом $n>N$ существует полином $P_n(\nu)$ степени $\leq n$ с условием

$$|f(\nu)-P_n(\nu)| \leq M(f)\left[\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\nu^2}\right)^{r+\alpha}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2(r+\alpha)}\right]. \qquad (Д.8)$$

Тогда $f(\nu)$ имеет r-ю производную, причем,

$$\sup_{-1\leq\nu\leq 1}\left|\frac{d^r f(\nu)}{d\nu^r}\right| \equiv a_r(f) \leq \beta_{r,N}\|f\|+\gamma_{r,N}\cdot M(f) \qquad (Д.9)$$

(здесь $\beta_{r,N}$, $\gamma_{r,N}$ -константы, зависящие только от r, N, α).

Пусть задано целое число $r\geq 1$. Согласно (Д.6) при $n>2r$ $E_n(f)\leq n^{-(2r+1)}b_{2r+1}(f)\cdot\alpha_{2r}$. Возьмем в качестве $P_n(\nu)$ полином наилучшего приближения для $f(\nu)$:

$$|f(\nu)-P_n(\nu)|\leq E_n(f) \leq \alpha_{2r}\cdot n^{-(2r+1)}\, b_{2r+1}(f)\leq$$

$$\leq \alpha_{2r}\cdot b_{2r+1}(f)\left[\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\nu^2}\right)^{r+1/2}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2(r+1/2)}\right]; \qquad n>2r.$$

Для $f\in\mathfrak{D}$ выполнено (Д.8), и, значит,

$$a_r(f)\leq\beta_r'\cdot b_0(f)+\gamma_r'\cdot b_{2r+1}(f)\ ; \qquad r=1,2,\ldots \qquad (Д.10)$$

Кроме того, $a_0(f)=b_0(f)$. Итак, системы полунорм (Д.I) и (Д.7) эквивалентны.

Сопоставим каждой функции $f\in\mathfrak{D}$ коэффициенты Фурье, соответствующие последовательности полиномов Якоби:

$$f_n = \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, f\rangle = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)f(\nu)\,d\nu\equiv \qquad (Д.II)$$

$$\equiv (t_n, f)$$

Нам понадобятся следующие оценки для полиномов Якоби[16]:

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)|\leq A_1\cdot(1+n)^{q_1}, \qquad -1\leq\nu\leq 1, \qquad (Д.I2)$$

$$h_n^{-1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)|\leq A_2\cdot(1+n)^{q_2}, \qquad -1\leq\nu\leq 1, \qquad (Д.I3)$$

где A_i, q_i -некоторые постоянные.

Учитывая ортогональность $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ко всем полиномам степени $\leq (n-1)$, получаем с помощью (Д. I2) оценку для f_n:

$$|f_0| \leqslant \gamma_{\alpha,\beta} \cdot \|f\| \tag{Д.I4}$$

$$|f_n| = |\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, f\rangle| = |\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, \ f - P_{n-1}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{\alpha,\beta} \cdot \sup_{-1\leq\nu\leq 1} |P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)| \cdot E_{n-1}(f) \leq A' \cdot (1+n)^{q_1} \cdot E_{n-1}(f) \tag{Д.I5}$$

(здесь $P_{n-1}(\nu)$ – полином наилучшего приближения для $f(\nu)$). Из (Д.I5),(Д.6) видно, что $|f_n|$ убывают быстрее любой степени n, и, значит, (с учетом (Д.I3)) ряд

$$\sum_{K=0}^{\infty} f_K \cdot h_K^{-1} \cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(\nu)$$

равномерно сходится к непрерывной функции $f_1(\nu)$. Так как, кроме того, он сходится в среднем к $f(\nu)$, то $f_1(\nu) = f(\nu)$.

Теперь для минимальных отклонений $E_n(f)$ имеем:

$$E_n(f) \leqslant \| f(\nu) - \sum_{K=0}^{n} f_K \cdot h_K^{-1} P_K^{(\alpha,\beta)}(\nu) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{K=n+1}^{\infty} |f_K| \cdot \| h_K^{-1} \cdot P_K^{(\alpha,\beta)}(\nu) \| \leqslant A_2 \cdot \sum_{K=n+1}^{\infty} |f_K| \cdot (1+K)^{q_2}. \tag{Д.I6}$$

Аналогично,

$$\ell_0(f) \leq A_2 \cdot \sum_{K=0}^{\infty} |f_K| \ (1+K)^{q_2}. \tag{Д.I7}$$

Оценки (Д.I4)-(Д.I7) позволяют заключить, что система полунорм (Д.''), а, значит, и (Д.I), эквивалентна следующей:

$$\{C_\tau(f)\}_{\tau=0}^{\infty} \equiv \left\{ \sup_{n\geqslant 0} \left[(1+n)^{\tau} |f_n| \right] \right\}_{\tau=0}^{\infty}. \tag{Д.I8}$$

Теперь ясно, что всякий линейный непрерывный функционал над $\mathfrak{D}$ имеет вид:

$$(T, f) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot f_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot (t_n, f), \tag{Д.I9}$$

где $\{u_n\}$ – последовательность степенного роста, а ряд в (Д.I9) абсолютно сходится. Теорема доказана.

П Р И М Е Ч А Н И Я

1. Если условие спектральности невыполнено, то двухточечная функция бесконечно-компонентных полей, по-видимому, обладает более сложной структурой; на это, в частности, указывает дополнение Г.

2. Пара $\chi = (n_1, n_2)$, используемая в [2], соотносится с $[k, c]$ посредством $n_1 = c + k,\ n_2 = c - k$. Следуя [2], мы реализуем представление T_χ в пространстве $\mathfrak{D}_\chi$ однородных (индекса χ) бесконечно дифференцируемых функций в комплексной области (подробней см. в дополнении А). Тогда в сопряженном пространстве $\mathfrak{D}'_\chi$ мы имеем ([2]) представление $T'_\chi \supset T_{-\chi}$.

3. Предположение, что поля - операторные обобщенные функции умеренного роста, позволяет рассматривать $K(u\ f; g)$ как функционал над более широким пространством $S(V_+) \times \mathfrak{D}_{-\chi_1} \times \mathfrak{D}_{-\chi_2}$. Далее, из трансляционной инвариантности следует, что $K(p; f; g)$ - мера по p. Однако никаких дополнительных трудностей не возникает, если рассматривать проблему в более общей форме, принятой в тексте; в частности, это позволяет включить в рассмотрение поля Джаффе[5].

4. Относительно определения и простейших свойств прямого интеграла гильбертовых пространств см. [14] (гл. I, § 4).

5. В доказательстве леммы А.I мы воспользовались аргументами Араки в его анализе лоренц-инвариантных обобщенных функций ([13], р. 272, лемма 2). Было бы интересно уточнить его доказательство леммы 2: Араки предположил, что произвольная функция $f(x) \in D(\mathbb{R}_{4n})$, будучи "размазанной" по группе Лоренца (т.е. функция $\check{f}(x) = \int f(\Lambda x)\, d\Lambda$) становится мультипликатором в $D(\mathbb{R}_{4n})$. Это действительно так для $f(x)$, носитель которой не содержит начала координат; вообще же $\check{f}(x)$ может быть сингулярной в нуле (поэтому тождество $(F, \int_{\|\Lambda\| < R} \Lambda f \cdot g\, d\Lambda) = (F, \int_{\|\Lambda\| < R} f \cdot (\Lambda^{-1} g)\, d\Lambda)$ в пределе $R \to \infty$, вообще говоря, не имеет смысла; однако достаточно показать, что для рассматриваемых f и g оно будет справедливо).

6. Мы переформулировали теорему Дзядыка в удобном для нас виде.

Л и т е р а т у р а

1. I.T. Todorov and R.P.Zaikov. Spectral representation of the covariant two-point function and infinite-component fields with arbitrary mass spectrum, ICTP, Internal report, IC/68/50 (1968).

2. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., Физматгиз, 1962.

3. Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое, М., "Наука", 1966.
Р. Йост. Общая теория квантованных полей, М.; "Мир", 1967.

4. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.

5. A.Jaffe.Phys.Rev.,158,1454 (1967).

6. P.Methée. Commen. Math. Helv., 28,225 (1954).

7. L.Gårding. Nuovo Cimento Suppl.,14 ,45 (1959).

8. K.Hepp. Helv.Phys.Acta,36,355(1963).

9. O.Steinmann. Helv.Phys.Acta, 36,90 (1963), (§ 6, p.109);
J.Math.Phys.,4,583 (1963).

10. H.Araki,K.Hepp and D.Ruelle. Helv.Phys.Acta,35,164 (1962).

11. S.Kamefuchi and H.Umezawa. Prog.Theor.Phys.,6,543 (1951).
G.Källén. Helv.Phys.Acta,25,417 (1952).
H.Lehmann. Nuovo Cimento, 11,342 (1954).

12. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., "Наука", 1965. (гл. 3, § 3).

13. H.Araki. Ann.Phys.,(N.Y.),11,260 (1960).

14. И.М. Гельфанд и Н.Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа, М., Физматгиз, 1961, (гл. 1, § 4, п. 4).

15. Л. Шварц. Математические методы для физических наук, М., "Мир", 1965, (гл. 4).

16. Г. Бейтман, А. Эрдейи . Высшие трансцендентные функции, М., "Наука", 1966.

17. А.Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.

18. В.К. Дзядык. Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 623 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 октября 1968 года.