ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4107

М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1968

Р2 - 4107

М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

§ 1. Введение

Несколько лет назад А.А.Логуновым и А.Н.Тавхелидзе был предложен квазипотенциальный подход к релятивистской проблеме двух тел/1/. Одной из важнейших особенностей квазипотенциального подхода, выгодно отличающей его от формализма Бете-Солпитера/2/, является тот факт, что в данном случае функция зависит от одного временного аргумента и допускает вероятностную интерпретацию. Это обстоятельство связано в свою очередь с тем, что уравнения для волновой функции и амплитуды в квазипотенциальном подходе содержат интегрирование по трехмерному импульсному пространству, тогда как в уравнениях Бете-Солпитера оно производится по всему четырехмерному p – пространству. В работах/3,4/ построен другой вариант трехмерной формулировки задачи двух тел типа квазипотенциальной. Ниже мы будем использовать уравнения, полученные в работах/3,4/.

В случае бесспиновых частиц с равными массами[x/] m уравнения для релятивистской амплитуды и волновой функции записываются в виде

$$T(\vec{p},\vec{q}) = V(\vec{p},\vec{q};E_q) + \frac{1}{(4\pi)^3}\int \frac{V(\vec{p},\vec{k};E_q)\,d\Omega_k\,T(\vec{k},\vec{q})}{E_k(E_k-E_q-i\varepsilon)}, \qquad (11)$$

---

x/ Об уравнении для частиц с неравными массами см. работу/5/.

$$2E_p(2E_q-2E_p)\Phi_q(\vec p)=\frac{2}{(2\pi)^3}\int V(\vec p,\vec k;E_q)\Phi_q(\vec k)d\Omega_k\,, \tag{1.2}$$

где $2E_q=2\sqrt{1+\vec q^{\,2}}$ x/ – полная энергия частиц в системе центра масс;
$d\Omega_k=\frac{d\vec k}{\sqrt{1+\vec k^2}}$ – инвариантный элемент объема пространства Лобачевского, реализующегося на верхней поле гиперболоида $p^2-1=0$,
$V(\vec p,\vec k;E_q)$ – квазипотенциал.

В работе/6/ было показано, что можно ввести релятивистское $\vec r$ – пространство, если вместо обычного разложения Фурье по плоским волнам $e^{i\vec p\vec x}$ использовать преобразование Шапиро/7/ – разложение по "релятивистским плоским волнам"

$$\xi(\vec p,\vec r)=(p_0-\vec p\vec n)^{-1-ir} \tag{1.3}$$

$$(\vec r=r\vec n,\ \vec n^2=1).$$

При этом роль релятивистского свободного гамильтониана играет конечно-разностный оператор

$$H_0=\left[2ch\,i\frac{d}{dr}+\frac{2i}{r}\,sh\,i\frac{d}{dr}-\frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}}{r^2}e^{i\frac{d}{dr}}\right], \tag{1.4}$$

$$H_0\,\xi(\vec p,\vec r)=2E_p\,\xi(\vec p,\vec r). \tag{1.5}$$

Наиболее существенным моментом при таком подходе является включение взаимодействия. Трехмерные уравнения, изучавшиеся в работах/1,3,4,6/, выводятся из теории поля и существует строго обоснованный алгоритм для построения квазипотенциала. Грубая схема этого алгоритма такова. Разложим квазипотенциал V и амплитуду T по степеням константы связи g.

$$V=\sum_n g^n V_n\,,\quad T=\sum_n g^n T_n. \tag{1.5}$$

Подставим разложения (1.5) в уравнение (1.1). Приравнивая выражения при одинаковых степенях g, получим выражение для квазипотенциала V_n

$$V_n(\vec p,\vec q;E_q)=T_n(\vec p,\vec q)-\frac{1}{(4\pi)^3}\int\frac{d\Omega_k\sum_{m=1}^{n-1}V_{n-m}(\vec p,\vec k;E_q)T_m(\vec k,\vec q)}{E_k(E_k-E_q-i\varepsilon)}, \tag{1.6}$$

При этом важно задать амплитуду $T(\vec p,\vec q)$ вне энергетической оболочки (т.е. при $p_0\neq q_0$). В работе/6/ для этого использовалось спектральное представление

$$T(s,t)=\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{f(s,\nu)d\nu}{\nu-t}, \tag{1.7}$$

где t – четырехмерная передача $(p-q)^2$. Можно показать/8/, что построенный указанным способом квазипотенциал $V(\vec p,\vec q;E_q)$ также обладает спектральным разложением типа (1.7)

$$V(\vec p,\vec q;E_q)=\int_{\nu_1}^{\infty}\frac{\rho(s,\nu)d\nu}{\nu-(p-q)^2}. \tag{1.8}$$

В $\vec r$ – пространстве из (1.2) получается конечно-разностное уравнение 4-го порядка для волновой функции с локальным взаимодействием

$$\frac{H_0}{2}(2E_q-H_0)\Phi_q(\vec r)=V(\vec r;E_q)\Phi_q(\vec r). \tag{1.9}$$

x/ Будем работать в системе единиц $\hbar=m=c=1$

Уравнение (1.9) детально исследовалось в работах/9-11/, где был развит специфический вариант конечно-разностного исчисления, с помощью которого (1.9) решалось для простых квазипотенциалов.

Недостатком уравнения (1.9) является тот факт, что в него входит квадрат "свободного гамильтониана" H_0 Это сильно усложняет изучение свойств квазипотенциальной теории. Мы рассмотрим поэтому другой вариант квазипотенциального уравнения.

Введем, согласно/6/, релятивистскую амплитуду $A(s,t)$ при помощи равенства

$$A(s,t) = \frac{T(s,t)}{8\pi\sqrt{s}} \,. \tag{1.10}$$

Уравнения для амплитуды A и соответствующей волновой функции $\Psi_q(\vec{p})$ в импульсном пространстве имеют вид

$$A(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}(\vec{p},\vec{q};E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\tilde{V}(\vec{p},\vec{k};E_q)\,d\Omega_k\,A(\vec{k},\vec{q})}{2E_q - 2E_k + i\varepsilon} \,, \tag{1.11}$$

$$(2E_q - 2E_p)\Psi_q(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \tilde{V}(\vec{p},\vec{k};E_q)\Psi_q(\vec{k})\,d\Omega_k \,. \tag{1.12}$$

Введенные уравнения (1.11) и (1.12) могут рассматриваться как непосредственные обобщения уравнений Липпмана-Швингера и Шредингера. Действительно, (1.11) и (1.12) носят "абсолютный" характер по отношению к геометрии импульсного пространства, т.е. могут быть получены из соответствующих нерелятивистских уравнений, если заменить в последних нерелятивистские (евклидовы) выражения для энергии и элемента объема на их релятивистские (неевклидовы) аналоги:

$$E_q = \frac{\vec{q}^{\,2}}{2m} \longrightarrow E_q = \sqrt{\vec{q}^{\,2} + m^2} \,,$$

$$d\Omega_k = d^3\vec{k} \longrightarrow d\Omega_k = \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{k}^2}{m^2}}} \quad (m=1). \tag{1.13}$$

При построении квазипотенциала $\tilde{V}(\vec{p},\vec{q};E_k)$ будем исходить из уравнения (1.11), причём амплитуду A вне энергетической оболочки зададим, исходя из спектральной формулы

$$A(s,t) = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\rho'(s,\nu)\,d\nu}{\nu - t} \,, \qquad \left(\rho' = \frac{\rho}{8\pi\sqrt{s}}\right), \tag{1.14}$$

которая вытекает из соотношений (1.7) и (1.10).

В $\vec{r}$ - пространстве придем к уравнению

$$\left[H_0 - 2E_q + \tilde{V}(\vec{r};E_q)\right]\Psi_q(\vec{r}) = 0 \tag{1.15}$$

с локальным взаимодействием $\tilde{V}(\vec{r};E_q)$. Настоящая работа посвящена изучению свойств уравнения (1.15).

§2. Метод вариации постоянных

Ограничимся рассмотрением сферически симметричного вещественного потенциала $\tilde{V}(\vec{r}) = \tilde{V}(r)$. В этом случае переменные в уравнении (1.4) разделяются, и для радиальной части волновой функции получается уравнение

$$\left[H_0^r - 2E_q + \tilde{V}(r)\right]\Psi_{q\ell}(r) = 0, \tag{2.1}$$

где

$$H_0^r = 2\,\mathrm{ch}\, i\frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r(r+i)}\,e^{i\frac{d}{dr}} \,. \tag{2.2}$$

В работе [9] были рассмотрены свободные решения уравнения (2.1), получающиеся при $\tilde{V} = 0$. Они являются аналогами сферических функций Бесселя, Неймана и Ханкеля, возникающих при нерелятивистском парциальном анализе. Приведем их явный вид:

$$S_\ell(r,\chi_q) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,(-1)^{\ell+1}(-r)^{(\ell+1)}\,P^{-\ell-1/2}_{ir-1/2}(\mathrm{ch}\,\chi_q), \tag{2.3}$$

$$C_\ell(r,\chi_q) = (-1)^\ell S_{-\ell-1}(r,\chi_q) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,(-r)^{(-\ell)}\,P^{\ell+\frac{1}{2}}_{ir-1/2}(\mathrm{ch}\,\chi_q), \tag{2.4}$$

$$e^{(1,2)}_\ell(r,\chi_q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,(-1)^{\ell+1}(-r)^{(\ell+1)}\,Q^{-\ell-\frac{1}{2}}_{\mp ir-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\chi_q), \tag{2.5}$$

$$(E_q = \mathrm{ch}\,\chi_q),$$

где $r^{(\lambda)}$ – "обобщенная" степень, введенная в [9]:

$$r^{(\lambda)} = i^{\lambda}\,\frac{\Gamma(-ir+\lambda)}{\Gamma(-ir)}, \tag{2.6}$$

а $P^{\mu}_{\nu}(\mathrm{ch}\,\chi)$ и $Q^{\mu}_{\nu}(\mathrm{ch}\,\chi)$ – функции Лежандра первого и второго рода.

Асимптотическое поведение функций (2.3)-(2.5) при $r \to \infty$ дается формулами:

$$S_\ell(r,\chi_q) \simeq \sin\left(r\chi_q - \frac{\ell\pi}{2}\right), \tag{2.7}$$

$$C_\ell(r,\chi_q) \approx \cos\left(r\chi_q - \frac{\ell\pi}{2}\right), \tag{2.8}$$

$$e^{(1,2)}_\ell(r,\chi_q) \approx e^{\pm i(r\chi_q - \frac{\ell\pi}{2})}. \tag{2.9}$$

Все введенные функции попарно линейно независимы.

Как известно [12], два решения конечно-разностного уравнения второго порядка Φ_1 и Φ_2 линейно независимы, если

$$W(\Phi_1,\Phi_2) \neq 0, \tag{2.10}$$

где $W(\Phi_1,\Phi_2)$ – "вронскиан"

$$W(\Phi_1,\Phi_2) = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Delta\Phi_1 & \Delta\Phi_2 \end{vmatrix}, \tag{2.11}$$

а

$$\Delta = \frac{e^{-i\frac{d}{dr}} - 1}{-i} \tag{2.12}$$

есть оператор конечно-разностного дифференцирования.

Можно показать, что

$$W[S_\ell(r,\chi_q), C_\ell(r,\chi_q)] = \frac{1}{2i}W[e^{(1)}_\ell(r,\chi_q), e^{(2)}_\ell(r,\chi_q)] = \mathrm{sh}\,\chi_q\,(-1)^\ell\,\frac{(-r)^{(\ell+1)}}{(r)^{(\ell+1)}}. \tag{2.13}$$

Перейдем теперь к изучению уравнения Шредингера с потенциалом. Решение этого уравнения $\Psi_{q\ell}(r)$ будем искать в виде

$$\Psi_{q\ell}(r) = \alpha(r)\,S_\ell(r,\chi_q) + \beta(r)\,C_\ell(r,\chi_q), \tag{2.14}$$

где $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ – функции от r, подлежащие определению.

Действуя аналогично тому, как это сделано в [13], где нерелятивистское уравнение Шредингера исследуется с помощью метода вариации постоянных, наложим дополнительное условие:

$$\left(\Delta \alpha(r)\right) S_\ell(r,\chi_q) + \left(\Delta\beta(r)\right) C_\ell(r,\chi_q) = 0. \qquad (2.15)$$

В результате

$$e^{i\frac{d}{dr}}\psi_{q\ell}(r) = \alpha(r)\, e^{i\frac{d}{dr}} S_\ell(r,\chi_q) + \beta(r)\, e^{i\frac{d}{dr}} C_\ell(r,\chi_q),$$

$$e^{-i\frac{d}{dr}}\psi_{q\ell}(r) = \frac{1}{i}\left(\Delta\alpha(r)\right) e^{-i\frac{d}{dr}} S_\ell(r,\chi_q) + \frac{1}{i}\left(\Delta\beta(r)\right) e^{-i\frac{d}{dr}} C_\ell(r,\chi_q) - \qquad (2.16)$$

$$- \omega_\ell(r)\, e^{i\frac{d}{dr}}\psi_{q\ell}(r),$$

где

$$\omega_\ell(r) = 1 + \frac{\ell(\ell+1)}{r(r+i)}. \qquad (2.17)$$

Подставляя (2.16) в уравнение (2.1), получим

$$\left(\Delta\alpha(r)\right) e^{-i\frac{d}{dr}} S_\ell(r,\chi_q) + \left(\Delta\beta(r)\right) e^{-i\frac{d}{dr}} C_\ell(r,\chi_q) = \qquad (2.18)$$

$$= -i\,\tilde V(r)\,\psi_{q\ell}(r).$$

Неизвестные функции $\Delta\alpha(r)$ и $\Delta\beta(r)$ определяются из системы уравнений (2.15) и (2.18):

$$\Delta\alpha(r) = -\frac{\tilde V(r)\,\psi_{q\ell}(r)\, C_\ell(r,\chi_q)}{W\left[S_\ell(r,\chi_q), C_\ell(r,\chi_q)\right]},$$

$$\Delta\beta(r) = \frac{\tilde V(r)\,\psi_{q\ell}(r)\, S_\ell(r,\chi_q)}{W\left[S_\ell(r,\chi_q), C_\ell(r,\chi_q)\right]}. \qquad (2.19)$$

Применяя здесь формулу суммирования (см. [12]), имеем:

$$\alpha(r) = A(r) - \int_0^r \frac{\tilde V(r')\,\psi_{q\ell}(r')\, C_\ell(r',\chi_q)\,dr'}{W\left[S_\ell(r',\chi_q), C_\ell(r',\chi_q)\right]} -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}(-i)^\nu \left(\frac{d}{dr}\right)^{\nu-1} \left\{\frac{\tilde V(r)\,\psi_{q\ell}(r)\, C_\ell(r,\chi_q)}{W\left[S_\ell(r,\chi_q), C_\ell(r,\chi_q)\right]}\right\}, \qquad (2.20)$$

$$\beta(r) = B(r) + \int_0^r \frac{\tilde V(r')\,\psi_{q\ell}(r')\, S_\ell(r',\chi_q)\,dr'}{W\left[S_\ell(r',\chi_q), C_\ell(r',\chi_q)\right]} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}(-i)^\nu \left(\frac{d}{dr}\right)^{\nu-1} \left\{\frac{\tilde V(r)\,\psi_{q\ell}(r)\, S_\ell(r,\chi_q)}{W\left[S_\ell(r,\chi_q), C_\ell(r,\chi_q)\right]}\right\},$$

где B_ν – числа Бернулли, а $A(r)$ и $B(r)$ – произвольные периодические функции с периодом i. Вид $A(r)$ и $B(r)$ фиксируется граничными условиями.

Покажем теперь, что метод вариации постоянных позволяет, как и в нерелятивистской теории, перейти к интегральному уравнению для $\Psi_{q\ell}(r)$. При этом придется ввести обобщение ступенчатой функции $\vartheta(r)$.

Выражения (2.20) можно переписать в виде

$$\alpha(r) = A(r) - \int_0^\infty dr' \hat{\vartheta}(r-r') \frac{\tilde{V}(r') \Psi_{q\ell}(r') C_\ell(r', \chi_q)}{W[S_\ell(r', \chi_q), C_\ell(r', \chi_q)]},$$

$$\beta(r) = B(r) + \int_0^\infty dr' \hat{\vartheta}(r-r') \frac{\tilde{V}(r') \Psi_{q\ell}(r') S_\ell(r', \chi_q)}{W[S_\ell(r', \chi_q), C_\ell(r', \chi_q)]}, \tag{2.21}$$

где введено обозначение

$$\hat{\vartheta}(r-r') = \left[\vartheta(r-r') - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}(i)^\nu \left(\frac{d}{dr'}\right)^{\nu-1} \delta(r-r')\right]. \tag{2.22}$$

Подставляя сюда известные представления для $\vartheta(r-r')$ и $\delta(r-r')$

$$\vartheta(r-r') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz(r-r')}}{z - i\varepsilon} dz,$$

$$\delta(r-r') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(r-r')} dz \tag{2.23}$$

и выполняя суммирование, получим

$$\hat{\vartheta}(r-r') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz(r-r')}}{e^{z-i\varepsilon} - 1} dz. \tag{2.24}$$

Найденное формальным путем выражение (2.24) мы будем рассматривать как определение конечно-разностного аналога ступенчатой функции. Выбор правила обхода особенности при интегрировании диктуется принципом соответствия

$$\hat{\vartheta}(r) \xrightarrow[c \to \infty]{} \vartheta(r). \tag{2.25}$$

Функция $\hat{\vartheta}(r)$ обладает очевидным свойством

$$\Delta \hat{\vartheta}(r) = \delta(r). \tag{2.26}$$

Аналогично нерелятивистскому случаю $\hat{\vartheta}(r)$ при $r \neq 0$ является "постоянной", т.е. i – периодической функцией

$$\hat{\vartheta}(r) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi r}}. \tag{2.27}$$

Особенность при $r = 0$ связана с основным свойством (2.26). Выполняются также соотношения

$$\hat{\vartheta}(r) + \hat{\vartheta}(-r) = 1, \tag{2.28}$$

$$\Delta \delta(r) = -i\,\delta(r). \tag{2.29}$$

Введем теперь функцию Грина

$$G_\ell(r,r';E_q)=\frac{S_\ell(r,\chi_q)C_\ell(r',\chi_q)-C_\ell(r,\chi_q)S_\ell(r',\chi_q)}{W\left[S_\ell(r',\chi_q),\ C_\ell(r',\chi_q)\right]}\hat{\vartheta}(r-r'). \tag{2.30}$$

Пользуясь (2.26) и (2.29), легко показать, что $G_\ell(r,r';E_q)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(H_0-2E_q\right)G_\ell(r,r';E_q)=-\delta(r-r'). \tag{2.31}$$

Комбинируя (2.14), (2.21) и (2.30), получим интегральное уравнение

$$\Psi_{q\ell}(r)=A(r)S_\ell(r,\chi_q)+B(r)C_\ell(r,\chi_q)-$$
$$-\int_0^\infty G_\ell(r,r';E_q)\tilde{V}(r')\Psi_{q\ell}(r')dr', \tag{2.32}$$

которое является непосредственным обобщением соответствующего нерелятивистского уравнения (см. (11.4) в/13/)[x].

§3. Теория рассеяния

Выражение для сечения рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ через $A(\vec{p},\vec{q})$ имеет нерелятивистский вид:

[x] Произвольная функция Грина уравнения (2.1) может быть получена путем добавления к $G_\ell(r,r';E_q)$ некоторого решения однородного уравнения, т.е. линейной комбинации $S_\ell(r,\chi_q)$ и $C_\ell(r,\chi_q)$ с коэффициентами, зависящими от r'.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|A(\vec{p},\vec{q})\right|^2. \tag{3.1}$$

Волновая функция $\Psi_{\vec{q}}(\vec{r})$ связана с амплитудой $A(\vec{p},\vec{q})$ соотношением

$$A(\vec{p},\vec{q})=-\frac{1}{4\pi}\int\xi^*(\vec{p},\vec{r})\tilde{V}(r)\Psi_{\vec{q}}(\vec{r})d\vec{r}. \tag{3.2}$$

Используя парциальные разложения функции (1.8) и волновой функции $\Psi_q(\vec{r})$

$$\xi^*(\vec{p},\vec{r})=\frac{1}{r\,\mathrm{sh}\chi_p}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)(-i)^\ell S_\ell^*(r,\chi_p)P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{p\cdot r}\right), \tag{3.3}$$

$$\Psi_{\vec{q}}(\vec{r})=\frac{1}{r\,\mathrm{sh}\chi_q}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)(i)^\ell\Psi_{q\ell}(r)P_\ell\left(\frac{\vec{q}\vec{r}}{q\cdot r}\right), \tag{3.4}$$

а также известное соотношение для полиномов Лежандра

$$\int d\Omega_{\vec{r}}\,P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{p\cdot r}\right)P_{\ell'}\left(\frac{\vec{q}\vec{r}}{q\,r}\right)=\frac{4\pi\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{q}}{pq}\right), \tag{3.5}$$

получим разложение для амплитуды

$$A(\vec{p},\vec{q})=\frac{1}{\mathrm{sh}\chi_p\cdot\mathrm{sh}\chi_q}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)A_\ell(p,q)P_\ell\left(\frac{\vec{p}\vec{q}}{p\cdot q}\right), \tag{3.6}$$

где парциальная амплитуда $A_\ell(p,q)$ задается формулой

$$A_\ell(p,q) = -\int_0^\infty dr\, S_\ell^*(r,\chi_p)\,\tilde{V}(r)\,\Psi_{q\ell}(r)\,. \tag{3.7}$$

Волновая функция сплошного спектра $\Psi_{\vec q}^{(+)}(\vec r)$, описывающая рассеяние на потенциале $\tilde{V}(r)$, удовлетворяет уравнению (ср. с (2.29))/6/:

$$\Psi_q^{(+)}(\vec r) = \xi(\vec q,\vec r) + \int d\vec r\,'\, G^{(+)}(\vec r,\vec r\,';E_q)\,\tilde{V}(r')\,\Psi_q^{(+)}(\vec r\,'), \tag{3.8}$$

где $G^{(+)}(\vec r,\vec r\,';E_q)$ связана с парциальными функциями Грина

$$G_\ell^{(+)}(r,r';E_q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{S_\ell(r,\chi_k)\,S_\ell(r',\chi_k)\,d\chi_k}{ch\,\chi_q - ch\,\chi_k + i\varepsilon} \tag{3.9}$$

согласно разложению

$$G^{(+)}(\vec r,\vec r\,';E_q) = \frac{1}{4\pi r r'}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,G_\ell^{(+)}(r,r';E_q)\,P_\ell\left(\frac{\vec r\,\vec r\,'}{r\cdot r'}\right). \tag{3.10}$$

Комбинируя (3.3), (3.4), (3.7), (3.8) и (3.10), получим выражение для $\Psi_{q\ell}^{(+)}(r)$:

$$\Psi_{q\ell}^{(+)}(r) = S_\ell(r,\chi_q) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\chi_k\,\frac{S_\ell(r,\chi_k)\,A_\ell(k,q)}{ch\,\chi_q - ch\,\chi_k + i\varepsilon}\,. \tag{3.11}$$

Асимптотический вид (3.11) при $r\to\infty$ получается, если воспользоваться выражением (2.7):

$$\Psi_{q\ell}^{(+)ac}(r) = \sin\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0 d\chi_k\,\frac{\sin\left(r\chi_k - \frac{\pi\ell}{2}\right)A_\ell(k,q)}{ch\,\chi_q - ch\,\chi_k + i\varepsilon}, \tag{3.12}$$

или использовать символическое равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{ir(\chi_q-\chi_k)}}{ch\,\chi_q - ch\,\chi_k - i\varepsilon} = \begin{cases} \delta(ch\,\chi_q - ch\,\chi_k) & \text{при } r\to\infty \\ 0 & \text{при } r\to-\infty \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\Psi_{q\ell}^{(+)ac}(r) = \sin\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2}\right) + e^{i\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2}\right)}\,\frac{A_\ell(q,q)}{sh\,\chi_q}\,. \tag{3.14}$$

Вводя по аналогии с нерелятивистской теорией (ср./13/) фазы рассеяния

$$\Psi_{q\ell}^{(+)ac}(r) = a_\ell(q)\,\sin\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_\ell\right), \tag{3.15}$$

получим:

$$a_\ell(q) = e^{i\delta_\ell}, \tag{3.16}$$

$$e^{2i\delta_\ell} = 1 + \frac{2i\,A_\ell(q,q)}{sh\,\chi_q} = S_\ell(q). \tag{3.17}$$

Равенство (3.17) служит определением матрицы рассеяния $S_\ell(q)$. Используя (3.16), (3.17) и (3.6), получим асимптотическое выражение для $\Psi^{(+)}_{\vec q}(\vec r)$ в виде

$$\Psi^{(+)ac}_{\vec q}(\vec r) = \xi^{ac}(\vec q,\vec r) + \frac{e^{ir\chi_q}}{r} A(\vec q,\vec p)\Big|_{E_p=E_q}, \qquad (3.18)$$

где

$$A(\vec p,\vec q)\Big|_{E_p=E_q} = \frac{1}{sh^2\chi_q}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_\ell(q,q)P_\ell\left(\frac{\vec p\vec q}{p\cdot q}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\,sh\chi_q}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[S_\ell(q)-1\right]P_\ell\left(\frac{\vec p\vec q}{p\cdot q}\right). \qquad (3.19)$$

В заключение настоящего параграфа отметим, что в рассматриваемой схеме имеют место также "нерелятивистская" связь между полным сечением и фазами:

$$\sigma = \frac{4\pi}{sh^2\chi_q}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_\ell \qquad (3.20)$$

и оптическая теорема:

$$\mathrm{Im}\,A(\vec p,\vec q) = \frac{sh\chi_q}{4\pi}\sigma. \qquad (3.21)$$

§4. Функции Йоста

Построим теперь решения, удовлетворяющие различным граничным условиям. Для этого, наряду с (3.9), рассмотрим функцию Грина

$$G^{(-)}_\ell(r,r';E_q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{S_\ell(r,\chi_k)\,S^*_\ell(r',\chi_k)\,d\chi_k}{ch\chi_q - ch\chi_k - i\varepsilon}. \qquad (4.1)$$

Введем также функции $G^{(0)}_\ell(r,r';E_q)$ и $G^{(J)}_\ell(r,r';E_q)$ при помощи "нерелятивистских" соотношений

$$G^{(0)}_\ell(r,r';E_q) = \frac{1}{2}\left[G^{(+)}_\ell(r,r';E_q)+G^{(-)}_\ell(r,r';E_q)\right] - \frac{S_\ell(r,\chi_q)\,C_\ell(r',\chi_q)}{W\left[S_\ell(r',\chi_q),C_\ell(r',\chi_q)\right]}, \qquad (4.2)$$

$$G^{(J)}_\ell(r,r';E_q) = G^{(0)}_\ell(r,r';E_q) - \frac{e^{(1)}_\ell(r',\chi_q)\,e^{(2)}_\ell(r,\chi_q) - e^{(2)}_\ell(r',\chi_q)\,e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)}{W\left[e^{(1)}_\ell(r',\chi_q);\ e^{(2)}_\ell(r',\chi_q)\right]}. \qquad (4.3)$$

Соответствующие волновые функции удовлетворяют уравнениям

$$\Psi^{(+)}_{q\ell}(r) = S_\ell(r,\chi_q) + \int_0^\infty G^{(\pm,0)}_\ell(r,r';E_q)\tilde V(r')\Psi^{(\pm,0)}_{q\ell}(r')dr' \qquad (4.4)$$

(регулярные в нуле решения);

$$\Psi^{(1,2)}_{q\ell}(r) = \pm\frac{1}{2i}e^{(1,2)}_\ell(r,\chi_q) + \int_0^\infty G^{(J)}_\ell(r,r';E_q)\tilde V(r')\Psi^{(1,2)}_{q\ell}(r')dr' \qquad (4.5)$$

(решения Йоста). Поскольку $G^{(J)}_\ell(r,r';E_q)\to 0$ при $r\to\infty$, асимптотика решений $\Psi^{(1,2)}_{q\ell}(r)$ совпадает с асимптотикой свободных парциальных волн (2.9).

Введем далее функции Йоста $f_\ell^{(\pm)}(q)$ как коэффициенты разложения $\Psi_{q\ell}^{(0)}(r)$ по решениям Йоста

$$\Psi_{q\ell}^{(0)}(r) = f_\ell^{(-)}(q)\Psi_{q\ell}^{(1)}(r) + f_\ell^{(+)}(q)\Psi_{q\ell}^{(2)}(r). \tag{4.6}$$

Простой расчёт дает

$$f_\ell^{(\pm)}(q) = 1 - \int_0^\infty \frac{e_\ell^{(1;2)}(r',\varkappa_q)\tilde V(r')\Psi_{q\ell}^{(0)}(r')\,dr'}{W\left[S_\ell(r',\varkappa_q),\, C_\ell(r',\varkappa_q)\right]}. \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что если определить парциальную S -матрицу в виде

$$S_\ell(q) = \frac{f_\ell^{(-)}(q)}{f_\ell^{(-)}(q)}, \tag{4.8}$$

то при вещественном потенциале выполняется условие унитарности

$$S_\ell^*(q)\cdot S_\ell(q) = 1. \tag{4.9}$$

Кроме того, переходя в (4.6) к асимптотическим выражениям для $\Psi_\ell^{(0)}(r)$ и $\Psi_{q\ell}^{(1,2)}(r)$, можно получить выражение для $S_\ell(q)$ через фазы δ_ℓ, совпадающие с (3.17).

Так же как и в случае нерелятивистского потенциального рассеяния функции Йоста можно выразить через вронскианы решений $\Psi_{q\ell}^{(0,1,2)}(r)$. В самом деле, вычисляя $W[\Psi_{q\ell}^{(0)}(r), \Psi_{q\ell}^{(1)}(r)]$ и $W[\Psi_{q\ell}^{(0)}(r), \Psi_{q\ell}^{(2)}(r)]$,

получим

$$f_\ell^{(+)}(q) = \frac{W\left[\Psi_{q\ell}^{(0)}(r), \Psi_{q\ell}^{(1)}(r)\right]}{W\left[\Psi_{q\ell}^{(2)}(r), \Psi_{q\ell}^{(1)}(r)\right]}, \tag{4.10}$$

$$f_\ell^{(-)}(q) = -\frac{W\left[\Psi_{q\ell}^{(0)}(r), \Psi_{q\ell}^{(2)}(r)\right]}{W\left[\Psi_{q\ell}^{(2)}(r), \Psi_{q\ell}^{(1)}(r)\right]}. \tag{4.11}$$

Формулы (4.10) и (4.11) позволяют свести проблему исследования аналитических свойств матрицы рассеяния к изучению аналитических свойств волновых функций.

§5. Радиальный ток и условия сшивания решений

Покажем, что в рассматриваемой модели существует аналог сохраняющегося нерелятивистского радиального тока. Умножая уравнение (2.1) слева на $\Psi_{q\ell}^*(r)$ и вычитая из него величину

$$\Psi_{q\ell}(r)\left[H_0^{r*} - 2E_q + \tilde V(r)\right]\Psi_{q\ell}^*(r) = 0, \tag{5.1}$$

придем к соотношению

$$\Psi_{q\ell}^*(r) H_0^r \Psi_{q\ell}(r) - \Psi_{q\ell}(r) H_0^{r*} \Psi_{q\ell}^*(r) = 0. \tag{5.2}$$

Используя тождество

$$H_0^*\left[\frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}}F(r)\right]=\frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}}H_0F(r), \qquad (5.3)$$

после простых преобразований получим следующее равенство

$$\Delta^* K_l(r)=0, \qquad (5.4)$$

где

$$\Delta^*=\frac{e^{i\frac{d}{dr}}-1}{i},$$

$$K_l(r)=\frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}}W\left[\Psi_{ql}(r),\frac{(-r)^{(l+1)}}{(r)^{(l+1)}}\Psi_{ql}^*(r)\right]. \qquad (5.5)$$

В силу тождества

$$e^{-i\frac{d}{dr}}\Delta^*=\Delta \qquad (5.6)$$

из (5.4) вытекает также, что

$$\Delta K_l(r)=0. \qquad (5.7)$$

Величина $K_l(r)$ удовлетворяющая "радиальному уравнению непрерывности" (5.7), является комплексной. Чтобы построить вещественный ток, рассмотрим выражение

$$\left(\Delta^* K_l(r)\right)^*=\Delta K_l^*(r)=0. \qquad (5.8)$$

Теперь очевидно, что аналог нерелятивистского вещественного радиального тока

$$J_l(r)=\frac{1}{2}\left[K_l(r)+K_l^*(r)\right] \qquad (5.9)$$

подчиняется уравнению непрерывности. С величиной $J_l(r)$ связано правило сшивания решений, обобщающее известное условие о непрерывности логарифмической производной квантовой механики. Пусть $\Psi_{ql}^{I}(r)$ и $\Psi_{ql}^{II}(r)$ есть различные выражения для одного и того же вещественного решения в некоторой точке $r=a$. Тогда радиальный ток, построенный из этих решений, равен нулю в этой точке:

$$\left\{\frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}}W\left[\Psi_{ql}^{I}(r),\Psi_{ql}^{II}(r)\right]+\frac{(-r)^{(l+1)}}{(r)^{(l+1)}}W\left[\Psi_{ql}^{I}(r),\Psi_{ql}^{II}(r)\right]\right\}_{r=a}=0.$$

В случае $l=0$ это условие принимает вид:

$$\begin{vmatrix}\Psi_{ql}^{I}(r) & \Psi_{ql}^{II}(r)\\ \operatorname{sh} i\frac{d}{dr}\Psi_{ql}^{I}(r) & \operatorname{sh} i\frac{d}{dr}\Psi_{ql}^{II}(r)\end{vmatrix}_{r=a}=0. \qquad (5.10)$$

§6. Потенциальная яма

Важную иллюстрацию развитой схемы дают точно решаемые примеры. Рассмотрим случай сферически-симметричной потенциальной ямы конечной глубины:

$$V(r) = -V_0 \qquad \text{при} \quad r \leqslant a,$$
$$V(r) = 0 \qquad \text{при} \quad r > a. \tag{6.1}$$

Изучим сперва дискретный спектр, причём ограничимся состояниями с $l = 0$.

При $r \leqslant a$ уравнение (2.1) имеет вид

$$\left(2\,\mathrm{ch}\, i\frac{d}{dr} - 2E_q - V_0\right)\psi^{I}_{q0}(r) = 0. \tag{6.2}$$

В этом случае $E_q \leqslant 1$ и удобно пользоваться параметризацией

$$E_q = \cos\chi_q. \tag{6.3}$$

Будем искать ψ^{I}_{q0} в виде

$$\psi^{I}_{q0}(r) = A^{I}(r)\sin\alpha r, \tag{6.4}$$

где $A^{I}(r)$ i- периодическая функция. $\psi^{I}_{q0}(r)$ удовлетворяет граничному условию

$$\psi^{I}_{q0}(0) = 0. \tag{6.5}$$

Подставляя $\psi^{I}_{q0}(r)$ в (6.2), получим уравнение для α

$$\mathrm{ch}\,\alpha = E_q + \frac{V_0}{4} \equiv u. \tag{6.6}$$

В области $r > 0$ уравнение (2.1) принимает вид

$$\left(2\,\mathrm{ch}\, i\frac{d}{dr} - 2E_q\right)\psi^{II}_{q0}(r) = 0. \tag{6.7}$$

Решение $\psi^{II}_{q0}(r)$, удовлетворяющее условию

$$\psi^{II}_{q0}(\infty) = 0, \tag{6.8}$$

следует искать в виде

$$\psi^{II}_{q}(r) = A^{II}(r)\, e^{-r\chi_q}. \tag{6.9}$$

Уровни энергии определим теперь, потребовав, чтобы для решений $\psi^{I}_{q0}(r)$ и $\psi^{II}_{q0}(r)$ выполнялось условие сшивания (5.10) в точке $r = a$. Подставляя (6.4) и (6.9) в (5.10) и отбрасывая i - периодические "константы" A^{I} и A^{II}, получим соотношение

$$\mathrm{ctg}\,\alpha a = -\frac{\sin\chi_q}{\mathrm{sh}\,\alpha}. \tag{6.10}$$

Используя (6.3), (6.6) и учитывая также, что $E_q \leqslant 1$, придем к уравнению для дискретных уровней энергии

$$\sqrt{E_q^2 - 1} - i\sqrt{u^2-1}\;\mathrm{ctg}\left[a\ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)\right] = 0. \tag{6.11}$$

В случае сплошного спектра $(E_q = ch\,\chi_q \geqslant 1)$ решение в области $r \leqslant a$ совпадает с (6.4). Для $r > a$ ищем решение в виде

$$\Psi_{q0}^{II}(r) = A^{II}(r)\, \sin(\chi_q r + \delta_0), \qquad (6.12)$$

где δ_0 – фаза S – рассеяния, определяемая из условия сшивания (5.10) в точке $r = a$

$$\delta_0 = -\chi_q a + \operatorname{arctg}\left(\frac{sh\,\alpha\, ctg\,\alpha a}{sh\,\chi_q}\right). \qquad (6.13)$$

Отсюда с учётом (6.6) легко найти матрицу рассеяния для $\ell = 0$

$$S_0(q) = e^{2i\delta_0} =$$

$$= e^{-2ia\ln(E_q+\sqrt{E_q^2-1})} \cdot \frac{\sqrt{E_q^2-1} + i\sqrt{u^2-1}\, ctg[a\ln(u+\sqrt{u^2-1})]}{\sqrt{E_q^2-1} - i\sqrt{u^2-1}\, ctg[a\ln(u+\sqrt{u^2-1})]}. \qquad (6.14)$$

Из (6.14) и (6.11) следует, что полюса S_0 соответствуют энергиям связанных состояний.

$S_0(q)$ есть аналитическая функция E_q во всей комплексной плоскости энергии, за исключением двух разрезов вдоль бесконечных отрезков на действительной оси $(1 - \frac{V_0}{2}; \infty)$ и $(-1, -\infty)$ и полюсов, лежащих в интервале (-1,0).

§7. Кулоновский потенциал

Рассмотрим кулоново поле притяжения:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}. \qquad (7.1)$$

Уравнение (2.1) для потенциала (7.1) принимает вид

$$\left[H_0^r - 2E_q - \frac{e^2}{r}\right]\Psi_{q\ell}(r) = 0. \qquad (7.2)$$

Найдем сначала решение (7.2), отвечающее дискретному спектру. Здесь опять удобно выбрать параметризацию (6.3). Легко проверить, что уравнению (7.2) удовлетворяет функция

$$\Psi_{q\ell}(r) = C(\ell,\chi_q)\, e^{-r\chi_q}\, (-r)^{(\ell+1)} \cdot$$

$$\cdot F\left(\ell+1-\frac{e^2}{2\sin\chi_q};\, -ir+\ell+1;\, 2\ell+2;\, 2i\sin\chi_q e^{-i\chi_q}\right), \qquad (7.3)$$

где $F(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция, $C(\ell,\chi_q)$ i-периодическая функция от r, явный вид которой не сказывается на формуле для уровней энергии. Очевидно,

$$\Psi_{q\ell}(0) = 0. \qquad (7.4)$$

Гипергеометрический ряд в (7.3) растет не быстрее полинома, если

$$\frac{\alpha}{2\sin\chi_q} = n, \qquad \text{где} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (7.5)$$

С учётом (6.3) получаем отсюда правило квантования уровней энергии

$$E_q^n = \sqrt{1 - \frac{e^4}{4n^2}}. \qquad (7.6)$$

В нерелятивистском пределе (7.6) переходит в известную формулу для кулоновских уровней:

$$E_q^{n} - 1 \longrightarrow -\frac{e^4}{8n^2} \, . \qquad (7.7)$$

В сплошном спектре $(E_q = ch\,\chi_q \geq 1)$ решение уравнения (7.2) имеет вид:

$$\Psi_{q\ell}(r) = C'(\ell, \chi_q)\, e^{ir\chi_q}(-r)^{(\ell+1)} \cdot$$
$$\cdot F\left(\ell+1-\frac{ie^2}{2\,sh\,\chi_q},\; -ir+\ell+1;\; 2\ell+2;\; 2\,sh\,\chi_q\, e^{-\chi_q}\right). \qquad (7.8)$$

Функция (7.8) при $r \to \infty$ имеет следующую асимптотическую форму:

$$\Psi_{q\ell}^{ac}(r) = C''(\ell,\chi_q) \cdot \left\{ \frac{e^{i\left[r\chi_q + \frac{e^2}{2 sh \chi_q}\ln(2r\,sh\,\chi_q)\right]}}{\Gamma\left(\ell+1+\frac{ie^2}{2\,sh\,\chi_q}\right)} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{\ell+1}\frac{e^{-i\left[r\chi_q + \frac{e^2}{2 sh \chi_q}\ln(2r\,sh\,\chi_q)\right]}}{\Gamma\left(\ell+1-\frac{ie^2}{2\,sh\,\chi_q}\right)} \right. \, . \qquad (7.9)$$

Как и в нерелятивистском случае /14/ радиальное решение представляется в виде суммы сходящейся и расходящейся сферических волн, искаженных логарифмическими членами.

Сравнивая (7.10) с (3.15) и (3.18), получим выражение для парциальной матрицы рассеяния

$$S_\ell(q) = \frac{\Gamma\left(\ell+1-\frac{ie^2}{2\,sh\,\chi_q}\right)}{\Gamma\left(\ell+1+\frac{ie^2}{2\,sh\,\chi_q}\right)} = \frac{\Gamma\left(\ell+1-\frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}}\right)}{\Gamma\left(\ell+1+\frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}}\right)} \, . \qquad (7.10)$$

Легко видеть, что $S_\ell(q)$ является аналитической функцией в плоскости комплексного углового момента ℓ, за исключением бесконечного числа полюсов Редже. Уравнения для траекторий Редже имеют вид

$$\ell = \alpha_{n_r}(E_q) = -n_r + \alpha_0(E_q), \qquad (7.11)$$

где

$$\alpha_0(E_q) = \frac{ie^2}{2\sqrt{E_q^2-1}} - 1, \qquad (7.12)$$

а n_r соответствует радиальному квантовому числу нерелятивистской кулоновской проблемы и принимает значения $n_r = 0,1,2\ldots$

Траектории (7.11) совпадают с траекториями, полученными при исследовании кулоновской задачи в рамках уравнения Клейна-Гордона /15/.

Полюса S_ℓ - матрицы соответствуют энергиям связанных состояний (7.6).

Полная амплитуда $A(\vec{p},\vec{q})$ на энергетической оболочке $E_p = E_q$ получается подстановкой (7.10) в (3.19)

$$A(\vec{p},\vec{q})\Big|_{E_p=E_q} = -\frac{\alpha}{2(E_q^2-1)} \cdot \frac{\Gamma\left[-\alpha_0(E_q)\right]}{\Gamma\left[1+\alpha_0(E_q)\right]} \cdot \left(-\frac{t}{4(E_q^2-1)}\right)^{\alpha_0(E_q)}, \qquad (7.14)$$

где $t = (p-q)^2$ - четырехмерная передача. Амплитуда $A(\vec{p},\vec{q})$ аналитична в комплексной плоскости энергии E_q за исключением двух разрезов $(1,\infty)$ и $(-1,-\infty)$ и полюсов в точках, положение которых задается уравнением

$$\frac{ie^2}{2\sqrt{E_q^2-1}} = n \qquad (7.15)$$

(ср. (7.6)). Кроме того, $A(\vec{p},\vec{q})\big|_{E_p=E_q}$ аналитична в плоскости t с разрезом $(0,\infty)$ (ср./15/).

Асимптотика амплитуды при $t\to\infty$ определяется полюсом $\alpha_0(E_q)$, т.е. $A(\vec{p},\vec{q})$ имеет редлжевское поведение.

§8. Заключение

Построенный вариант квазипотенциального подхода представляет собой релятивистскую схему, обладающую многими важными чертами нерелятивистской потенциальной теории. Как и в квантовой механике, здесь можно построить функции Йоста, исходя из интегральных уравнений для волновых функций. При этом исследование аналитических свойств амплитуды рассеяния сводится к изучению аналитических свойств решений уравнения (2.1). Реалистичность рассматриваемого подхода иллюстрируется на примере точно решаемых задач §§6-7. Результаты этих параграфов можно резюмировать следующим образом:

1. Амплитуды рассеяния на сферической потенциальной яме и кулоновском потенциале аналитичны в комплексной плоскости энергии за исключением особенностей, имеющих хорошо известный физический смысл.

2. Кулоновская амплитуда аналитична по передаче импульса с разрезом $(0,\infty)$. В плоскости комплексного момента эта амплитуда имеет лишь изолированные полюса (полюса Редже).

3. Положения полюсов S-матрицы в E-плоскости в точности соответствуют уровням энергии связанных состояний.

Авторы искренне благодарны В. Де Альфаро, В.Г.Кадышевскому, С.Розетти, Н.Б.Скачкову, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову и Р.Н.Фаустову за полезные обсуждения и стимулирующую критику.

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).
Подробный список литературы можно найти в A.N. Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1964).

2. E.E. Salpeter, H. Bethe. Phys.Rev., 84, 123 (1951).
3. В.Г.Кадышевский. ИТФ АН УССР. Препринт № 7, Киев (1967).
4. V.G. Kadyshevsky. Nuclear Physics, B6, 125 (1968); V.G. Kadyshevsky, M.D. Mateev. Nuovo Cimento, 55A, 275 (1968).
5. В.Г. Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Препринт ОИЯИ Е2-4030, Дубна, 1968.
6. V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov. Nuovo Cimento, 55A, 233 (1968).
7. И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647 (1956): ЖЭТФ, 43, 1727 (1962); Phys.Lett., 1, 253 (1962).
8. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, I.T. Todorov and O.A. Khrustalev. Nuovo Cimento, 30, 134 (1963).
А.Т.Филиппов. Международная зимняя школа теоретической физики. Дубна, 1964.
9. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Препринт ОИЯИ Е2-3949, Дубна, 1968.
10. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Препринт ОИЯИ Е2-3950, Дубна, 1968.
11. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман. Препринт ОИЯИ Е2-3948, Дубна, 1968.
12. А.О.Гельфонд, "Исчисление конечных разностей", Москва, "Наука", 1957.
13. В.Де'Альфаро и Т.Редже. "Потенциальное рассеяние", Москва, "Мир", 1966.
14. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. "Квантовая механика", Москва (1963), издательство физ-мат. литературы.
15. V. Singh, Phys.Rev., 127, 632 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 октября 1968 года.