ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4101

Р.А.Асанов

О ПОЛУЗАМКНУТЫХ МИРАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 4101

Р.А.Асанов

О ПОЛУЗАМКНУТЫХ МИРАХ

В работах[1,2] приведены примеры построения сферически-симметричного полузамкнутого мира, то-есть мира, внутренняя часть которого является частью закрытого мира Фридмана, заполненной пылевидным веществом (давление отсутствует), а наружная часть описывается статическим решением Шварцшильда. В данной работе более детально рассмотрены условия "склейки" двух частей полузамкнутого мира.

Воспользуемся решением Толмана[3] в сопутствующей системе отсчёта, которое для интервала

$$(ds)^2 = -e^{\lambda}(dR)^2 - r^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2\right] + (d\tau)^2,$$
$$\lambda = \lambda(R,\tau)\ ,\ r = r(R,\tau) \tag{1}$$

можно записать в виде [4]

$$e^{\lambda} = \frac{(r')^2}{1+f(R)}\ ,\ -1 \leq f < 0\ , \tag{2}$$

$$r = -\frac{F(R)}{2f}\left(1-\cos\eta\right),\ 0 \leq \eta \leq 2\pi\ , \tag{3}$$

$$\tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}\left(\eta - \sin\eta\right), \tag{4}$$

$$8\pi\varkappa\rho = \frac{F'}{r' r^2}\,, \tag{5}$$

здесь ρ – инвариантная плотность массы.

Решение, соответствующее закрытому миру Фридмана, получается, если положить

$$f = -\sin^2\frac{R}{a_0}\,,\; F = 2a_0\sin^3\frac{R}{a_0}\,,\; \tau_0 = const., \tag{6}$$

где a_0 – постоянная, а координата R меняется от нуля до своего максимального значения πa_0

Положим, что решение (6) справедливо до некоторого $R_1 = a_0(\pi-\delta),\ \delta<\frac{\pi}{2}$, иначе говоря, мир "слегка не замкнут". Поверхность Σ сшивания с другим решением (например, "пустотой") в сопутствующей системе отсчёта будет задаваться, очевидно, условием $R_\Sigma = const.$ На этой поверхности, кроме функций λ и r, должны быть непрерывны, по Сингу/5/, еще величины r', G^1_μ и $g_{\mu\kappa}G^\kappa_\nu - g_{\nu\kappa}G^\kappa_\mu (\kappa=2,3,4)$. Две последние в условиях данной задачи непрерывны в силу уравнений Эйнштейна и симметрии задачи. Для непрерывности же λ, r и r' достаточно обеспечить непрерывность функций f, F, τ_0 и их производных. Так как "пустота" характеризуется значением $F'=0$, мы должны получить некоторую переходную область, в которой плотность массы ρ будет изменяться непрерывно от своего фридмановского значения до нуля.

Ограничим переходную область значениями $R_1 = a_0(\pi-\delta)$ и $R_0 = \pi a_0$, при которых и произведем "сшивку" f, F, τ_0 и их производных. В "пустоте" выберем функцию $f(R)$ в форме Новикова/2/, а величину τ_0 для простоты оставим всюду постоянной. Результат для переходной области имеет вид:

$$F = \frac{3}{2}\,\frac{\sin^2\delta\cos\delta}{\delta^3 a_0^3}(\pi a_0 - R)^4 + C_1,$$

$$C_1 = 2a_0\sin^3\delta\left(1-\frac{3}{4}\delta\, ctg\,\delta\right), \tag{7}$$

$$-f = \frac{\sin 2\delta}{\delta a_0^2}\left(\pi a_0 - \frac{\delta a_0}{2} - R\right)^2 + \sin^2\delta\left(1-\frac{\delta}{2}\, ctg\,\delta\right),$$

$$\tau_0 = const.$$

В "пустоте" имеем

$$F = C_1\,,\quad \tau_0 = const.,$$
$$-f = \left[1 + (\pi a_0 + a_0\sin\delta\cos\delta - R)^2 / a_0^2\sin^4\delta\right]^{-1}. \tag{8}$$

Существенно заметить, что для приведенного решения величина

$$r' = \left(\frac{F}{-f}\right)'\sin^2\frac{\eta}{2} + \sqrt{-f}\, ctg\,\frac{\eta}{2}\left[\tau_0' - \frac{1}{2}\left(\frac{F}{(-f)^{3/2}}\right)'(\eta - \sin\eta)\right]$$

ни при каких допустимых временах τ, заключенных между своими граничными значениями, и ни на каких расстояниях, кроме $R=\pi a_0/2$ и $R=(\pi+\delta)a_0$ не обращается в нуль или бесконечность. В указанных же точках (точки "горловин" по терминологии Новикова) величина $e^\lambda = (r')^2/(1+f)$ не обращается в нуль, а принимает конечные положительные значения. Кроме того, в переходной области $r'<0$ при всех временах, $F'\leq 0$, и тем самым положительность плотности массы ρ обеспечена. Таким образом, выполнены все требования, обычно принимаемые в рамках общей теории относительности. Граничные по времени τ точки, как и в случае замкнутого мира Фридмана, являются особыми.

Для плотности массы $\rho(R,\tau)$ в переходной области можно получить приближенное выражение для случая $(\tau_0-\tau)/a_0 \ll 1,\ \delta \ll 1$, а именно:

$$8\pi\varkappa\rho \cong \frac{4}{3(\tau_0-\tau)^2}\,\frac{F'}{5F'-6Ff'/f}\,.$$

Первый множитель, зависящий только от времени τ, характерен, в частности, для чисто-фридмановского мира, а второй монотонно изменяется от единицы до нуля при переходе от внутренней к внешней границе этой области.

Приведем формулы для преобразования решения Толмана в форме (1) - (4) при $F=\mathrm{const}$ к известной форме Шварцшильда

$$(ds)^2 = -\frac{(dr)^2}{1-\frac{2\varkappa m}{r}} - r^2\left[(d\theta)^2+\sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right] + \left(1-\frac{2\varkappa m}{r}\right)(dt)^2. \qquad (9)$$

Преобразование $r=r(R,\tau)$ уже задано параметрически формулами (3) и (4), если считать, что $\eta=\eta(R,\tau)$ задается формулой (4). Полагая $F=2\varkappa m$ и

$$\pm t = \psi(R) + \frac{\varkappa m\,\sigma(R)}{f^2}\left[\sin\eta-(1-2f)\eta\right] - 2\varkappa m \ln\left|\frac{\sigma\,\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}+f}{\sigma\,\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}-f}\right|, \qquad (10)$$

где $\psi' = \dfrac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}}$, $\sigma=\sqrt{-f(1+f)}$,

получим, что интервал (1) преобразуется к виду (9). Тем самым показывается, что роль полной массы играет величина $F/2\varkappa$ и только она.

В последнее время обсуждается возможность применения модели полузамкнутого мира не только в космологических проблемах, но и в проблемах теории элементарных частиц/6/.

Приношу благодарность проф. М.А.Маркову за дискуссии и поддержку.

Л и т е р а т у р а

1. Я.Б. Зельдович. Полузамкнутые миры в общей теории относительности. ЖЭТФ 43, 1037 (1962).

2. И.Д.Новиков. Об эволюции полузамкнутого мира. Астрономический журнал, 40, 772 (1963).
И.Д.Новиков. Некоторые свойства сферически-симметричного пространства, сопутствующего веществу. Сообщения ГАИШ № 132, 43 (1964).

3. R.C.Tolman. Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models, Proc. Nat. Acad. Sci., 20, 169 (1934).

4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, "Наука", (1967).

5. Дж. Синг. Общая теория относительности, ИИЛ, (1963).

6. М.А.Марков. "Элементарные частицы предельно больших масс." Физика высоких энергий и элементарных частиц. Труды Международной школы по теоретической физике в Ялте, "Наукова Думка", Киев (1967).
М.А.Марков. "О возможном космологическом подходе к теории элементарных частиц". Вопросы теории элементарных частиц. Труды международного семинара в Варне, Дубна (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1968 года.

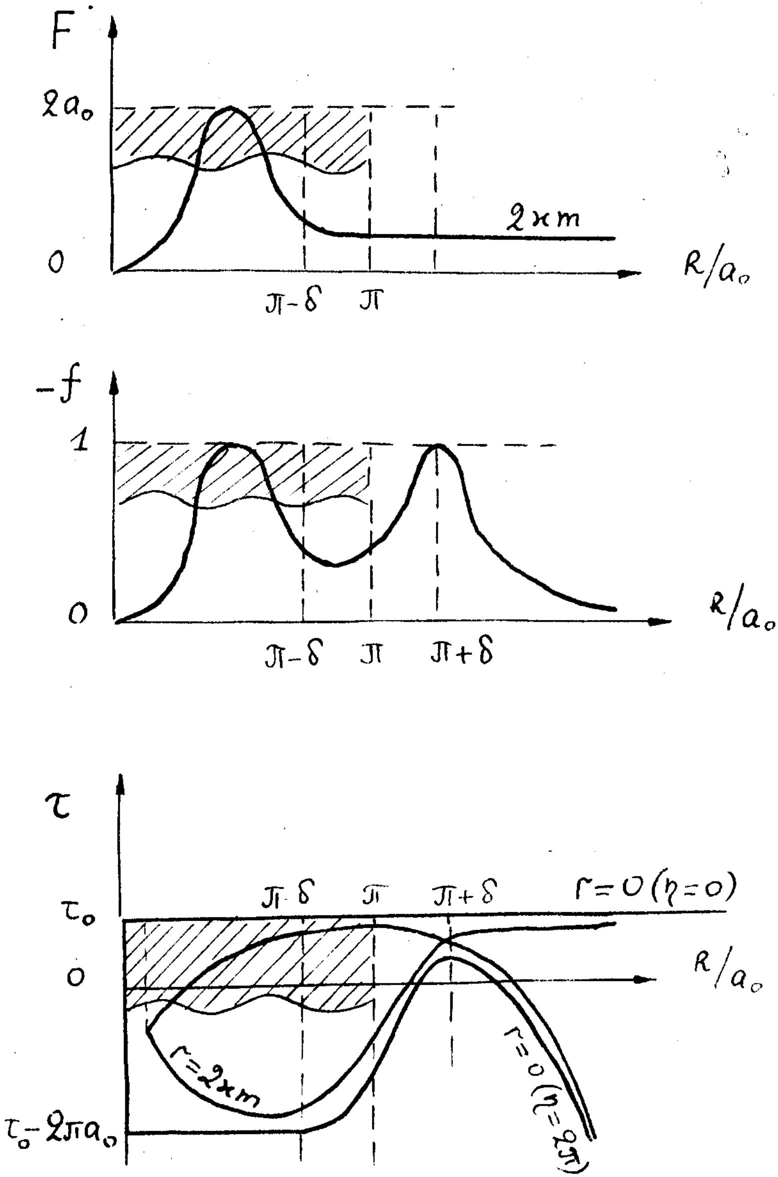
F
2a₀
0
2κm
R/a₀
π-δ
π
-f
1
0
R/a₀
π-δ
π
π+δ
τ
τ₀
0
π-δ
π
π+δ
r=0 (η=0)
R/a₀
r=2κm
r=0 (η=2π)
τ₀-2πa₀

Рис. 1.