ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4086

В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц , М.И.Подгорецкий

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

1968

P2 - 4086

В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц , М.И.Подгорецкий

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Направлено в ЖЭТФ

1. Как известно, волновые функции, описывающие различные стационарные состояния стабильных квантовомеханических систем, являются взаимноортогональными. Это утверждение, вообще говоря, несправедливо для квазистационарных нестабильных состояний. Так, при нарушении CP -инвариантности в распадах K -мезонов квазистационарные волновые функции частиц K_L и K_S, которым соответствуют определенные значения массы и времени жизни, вообще говоря, не являются ортогональными (см. например,/1/). Наличие такой неортогональности приводит к физически наблюдаемым следствиям, например, к зарядовой асимметрии лептонных распадов K_L /2/. Неортогональность состояний K_L и K_S связана с тем, что при несохранении CP-чётности они имеют общие каналы распада. Такая ситуация, когда два состояния квантовомеханической системы (две частицы) имеют общие каналы распада, конечно, не является специфической особенностью только K -мезонов. Всегда, когда она осуществляется, можно ожидать, что квазистационарные волновые функции этих состояний (частиц) будут неортогональными.

В атомной и ядерной физике существует целый ряд явлений, которые получают естественную физическую интерпретацию именно на языке нестабильных неортогональных состояний. К ним относятся биения в полном числе нестабильных систем и продуктов распада, возбуждение и распад атомных молекулярных уровней в условиях, которые приводят к возникновению полюса второго порядка в матрице рассеяния/3/, интерференционные явления при образовании возбужденных состояний ^{8}Be и т.д.

Однако в настоящее время понятие неортогональности в полной мере используется только при анализе проблемы нарушения CP-инвариантности в распадах нейтральных K-мезонов. Что касается атомной и молекулярной физики, то здесь при рассмотрении указанных выше явлений применяется почти исключительно формальный аппарат матрицы рассеяния. Поэтому мы считаем полезным детально рассмотреть вопрос о неортогональности квазистационарных состояний в общем случае.

2. Предположим, что мы имеем нестабильную двухуровневую систему. Пусть $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ – нормированные, вообще говоря, неортогональные квазистационарные волновые функции этой системы; им соответствуют комплексные энергии $E_{1,2} = \mathcal{E}_{1,2} - i\,\frac{\Gamma_{1,2}}{2}$, где $\Gamma_{1,2}$ – ширины рассматриваемых уровней. Приготовим в начальный момент времени $t=0$ состояние, являющееся некоторой произвольной суперпозицией $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$, т.е.

$$|\psi(0)\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle. \tag{1}$$

Тогда волновая функция $|\psi(t)\rangle$, описывающая поведение системы в более поздние моменты времени t, будет иметь вид

$$|\psi(t)\rangle = c_1|\psi_1\rangle e^{-\frac{i}{h}E_1 t} + c_2|\psi_2\rangle e^{-\frac{i}{h}E_2 t}. \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что число рассматриваемых систем N изменяется со временем следующим образом:

$$N(t) \approx \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |c_1|^2 e^{-\frac{\Gamma_1 t}{h}} + |c_2|^2 e^{-\frac{\Gamma_2 t}{h}} + 2\,\mathrm{Re}\{\langle\psi_1|\psi_2\rangle c_2^* c_2\, e^{\frac{i}{h}(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)t}\} e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2h}t}. \tag{3}$$

Если состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ неортогональны, т.е. $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \neq 0$, то, согласно (3), величина N испытывает "биения", затухающие с течением времени.

При помощи (3) можно определить скорость распада:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{\Gamma_1}{h}|c_1|^2 e^{-\frac{\Gamma_1 t}{h}} - \frac{\Gamma_2}{h}|c_2|^2 e^{-\frac{\Gamma_2 t}{h}} + 2\,\mathrm{Re}\{c_1^* c_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle[\frac{i}{h}(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2) - \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2h}]\, e^{\frac{i}{h}(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)t}\} e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2h}t}. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\sum_m |c_1 A_{1m} e^{-\frac{i}{h}E_1 t} + c_2 A_{2m} e^{-\frac{i}{h}E_2 t}|^2, \tag{5}$$

где A_{1m} и A_{2m} – амплитуды распада из состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ соответственно в некоторые конечные состояния $|m\rangle$; $\sum_m$ включает в себя также интегрирование по непрерывным переменным, например, по углам вылета продуктов распада.

Сравнение (4) и (5) приводит к следующим соотношениям:

$$\Gamma_{1(2)} = h\sum_m |A_{1(2)m}|^2, \tag{6}$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{h\sum_m A_{1m}^* A_{2m}}{\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)}. \tag{7}$$

Применительно к анализу распадов K^0-мезонов формулы (6) и (7) были получены ранее в работе [5].

Если мы имеем систему более чем с двумя квазистационарными уровнями, то аналогичное рассмотрение приводит к соотношениям типа

$$\Gamma_i = h \sum_m |A_{im}|^2 , \tag{8}$$

$$\langle \psi_i | \psi_m \rangle = \frac{h \sum_m A^*_{im} A_{km}}{\frac{\Gamma_i + \Gamma_k}{2} - i(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_k)} , \tag{9}$$

где индексы i и k нумеруют рассматриваемые уровни.

Согласно (7) и (9) величина неортогональности состояний $|\psi_\alpha\rangle$ полностью определяется разностью соответствующих энергий и амплитудами возможных распадов. Если амплитуды A, а следовательно и ширины Γ, при постоянной разности энергий $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ стремятся к нулю, то величина $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ также стремится к нулю и в пределе стабильных частиц состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ оказываются ортогональными. Однако состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ могут быть ортогональными и при наличии распадов. Так, если уровни 1 и 2 обладают различными, сохраняющимися в процессе распада квантовыми числами, то сумма $\sum_m A^*_{m1} A_{2m}$ тождественно равна нулю. Например, если уровни 1 и 2 обладают разными угловыми моментами, интегрирование шаровых функций по углам, содержащееся в сумме $\sum_m A^*_{1m} A_{2m}$, обратит ее в нуль. Аналогично, если уровни обладают разными изотопическими спинами или четностями, соответствующая сумма также равна нулю. Впрочем, высказанное выше утверждение очевидно и без ссылок на указанные примеры, так как согласно квантовой механике волновые функции состояний, соответствующих различным сохраняющимся квантовым числам, должны быть ортогональными.

Если же квантовые числа, которыми различаются уровни 1 и 2, не сохраняются в процессе распада, то величина $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ может быть отлична от нуля, а волновые функции $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ неортогональны. В общем случае величина $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ комплексна, ее модуль заключен между нулем и единицей. Согласно [6], отличие от нуля величины $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ соответствует не полностью различным или "квазитождественным" состояниям, интерферирующим при любом способе регистрации.

3. Ортогональные квазистационарные состояния могут перейти в неортогональные при включении соответствующего взаимодействия. Пусть $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ – волновые функции рассматриваемых квазистационарных ортогональных состояний (например, 2s- и 2p-состояния атома водорода), $\epsilon_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ – их энергии и ширины. Включим смешивающее взаимодействие (например, внешнее электрическое поле). Новые волновые функции удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\hat{H} |\psi_{1(2)}\rangle = E_{1(2)} |\psi_{1(2)}\rangle , \tag{10}$$

где $\hat{H}$ – эффективный, вообще говоря, неэрмитовый гамильтониан, E_1 и E_2 – комплексные энергии. Рассмотрим это уравнение в представлении, в котором в качестве базиса используются волновые функции $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$, т.е. запишем $|\psi_{1,2}\rangle$ в виде:

$$|\psi_{1(2)}\rangle = c_{1(2)1} |\phi_1\rangle + c_{1(2)2} |\phi_2\rangle . \tag{11}$$

Тогда из условия нормировки $|\psi_{1,2}\rangle$ следует, что

$$|c_{1(2),1}|^2 + |c_{1(2),2}|^2 = 1 . \tag{12}$$

Подставляя, далее, (11) в (10), можно записать следующую систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{aligned} H_{11} c_{1(2),1} + H_{12} c_{1(2)2} &= E_{1(2)} c_{1(2)1}, \\ H_{21} c_{1(2)1} + H_{22} c_{1(2)2} &= E_{1(2)} c_{1(2)2}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где $H_{ik} = \langle \phi_i | \hat{H} | \phi_k \rangle$ – матричные элементы оператора $\hat{H}$. Используя стандартный способ решения такой системы, получаем следующие выражения для энергий $E_{1,2}$ и коэффициентов C:

$$E_{1,2} = \frac{H_{11}+H_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2 + 4H_{12}H_{21}}, \qquad (14)$$

$$c_{11} = (1 + |\frac{H_{21}}{a}|^2)^{-1/2}, \quad c_{12} = \frac{H_{21}}{a} c_{11}, \qquad (15)$$

$$c_{21} = -\frac{H_{12}}{a} c_{22}, \quad c_{22} = (1 + |\frac{H_{12}}{a}|^2)^{-1/2}, \qquad (16)$$

где

$$a = E_1 - H_{22} = \frac{H_{11} - H_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H_{11}-H_{12})^2 + 4H_{12}H_{21}}. \qquad (17)$$

Зная коэффициенты с нетрудно выразить величину неортогональности функций $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ через матричные элементы H_{ik}. При этом $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = c^*_{11} c_{21} + c^*_{12} c_{22}$, или

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (1 + |\frac{H_{12}}{a}|^2)^{-1/2} (1 + |\frac{H_{21}}{a}|^2)^{-1/2} (\frac{H^*_{21}}{a^*} - \frac{H_{12}}{a}). \qquad (18)$$

Подчеркнем, что поскольку состояния $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ (а, следовательно, и недиагональные матричные элементы H_{12}, H_{21}) определены с точностью до фаз, мы можем всегда выбрать эти фазы так, чтобы мера неортогональности $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ была действительным (положительным) числом.

4. Напомним, что уравнение Шредингера с эффективным неэрмитовым гамильтонианом можно получить, исходя из гайтлеровской теории затухания, имеющей дело с эрмитовым оператором взаимодействия W (см./7,8/). Представим оператор W в виде $W = V' + V$, где V' описывает распады, а V – некоторое эрмитовское взаимодействие, смешивающее состояния $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ (например, взаимодействие системы с внешним электрическим или магнитным полем). Пусть теперь распадное взаимодействие не смешивает этих состояний. В этом важном случае мы можем считать, что матричные элементы эффективного гамильтониана имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \epsilon_1 + V_{11} - i\frac{\gamma_1}{2}, \quad H_{22} = \epsilon_2 + V_{22} - i\frac{\gamma_2}{2}, \\ H_{12} &= H^*_{21} = V_{12} = V^*_{21}, \end{aligned} \qquad (19)$$

где ϵ_1 и ϵ_2, γ_1 и γ_2 – энергии и ширины уровней <u>до перемешивания.</u> Как видно из (18), при $H_{12} = H^*_{21}$ величина $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \approx \operatorname{Im} a$. Легко видеть (см. формулу (17)), что $a \neq 0$ и, следовательно, $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \neq 0$, если ширины уровней до смешивания не равны друг другу ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). При этом, если $|\gamma_1 - \gamma_2 / \epsilon_1 - \epsilon_2| \ll 1$, то независимо от величины смешивающего взаимодействия $|\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle| \ll 1$. Величина неортогональности гораздо меньше единицы и тогда, когда смешивающее взаимодействие мало по сравнению с разностью энергий уровней $|\phi_1>$ и $|\phi_2>$, независимо от разности их ширин. В этом предельном случае

$$<\psi_2|\psi_1> = i\,\frac{\mathrm{Re}\,H_{12}}{|H_{11}-H_{22}|^2}(\gamma_1-\gamma_2). \qquad (20)$$

Заметим, что при смешивании квазистационарных уровней внешним полем, когда, согласно (19), $H_{12}=H_{21}^*$, ширины новых уровней можно представить в виде

$$\Gamma_1 = -2\,\mathrm{Im}\,E_1 = -2\,\mathrm{Im}<\psi_1|\hat{H}|\psi_1> = \qquad (21)$$

$$= |c_{11}|^2\gamma_1 + |c_{12}|^2\gamma_2,$$

где величины c_{11} и c_{12} определяются по формулам (15-16). При этом

$$\Gamma_1+\Gamma_2 = \gamma_1+\gamma_2, \qquad (22)$$

т.е. сумма новых ширин равна сумме старых.

Равенство (21) можно получить также с помощью формулы (6), если учесть линейную связь между новыми и старыми амплитудами A_{im} и $a_{\ell m}$ $(i,\ell=1,2)$:

$$A_{im} = c_{i1}a_{1m} + c_{i2}a_{2m}. \qquad (23)$$

Простой анализ уравнений (10) показывает, что выражение (18) при $H_{12}=H_{21}^*$ и выражение (7) с учётом линейной связи между новыми и старыми амплитудами (23) приводятся к одинаковому виду:

$$<\psi_2|\psi_1> = \frac{<\psi_2|\hat{H}|\psi_1> - <\psi_1|\hat{H}|\psi_2>^*}{E_1 - E_2^*} =$$

$$= \frac{c_{21}^* c_{11}\gamma_1 + c_{22}^* c_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2/2 - i(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)}. \qquad (24)$$

Заметим, что если вызывающее распады взаимодействие производит, кроме того, и перемешивание состояний $|\phi_1>$ и $|\phi_2>$, то, вообще говоря, $H_{12}\neq H_{21}^*$ и неортогональность возникает при любых начальных ширинах. Формулы (21), (23) и (24) при этом несправедливы.

6. Рассмотрим теперь случай, когда в результате включения взаимодействия W энергии и ширины квазистационарных уровней оказываются совпадающими. Из (14) вытекает, что

$$E_1 = E_2 = \frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2} + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - i\,\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4} = \frac{H_{11}+H_{22}}{2}, \qquad (25)$$

если подкоренное выражение

$$(H_{11}-H_{22})^2 + 4H_{12}H_{21} = 0. \qquad (26)$$

Используя обозначение $H_{11}-H_{22}=\delta+i\beta$, равенство (26) можно переписать в виде следующих двух условий:

$$\delta^2-\beta^2+4\,\mathrm{Re}(H_{12}H_{21}) = 0,$$
$$\delta\beta+2\,\mathrm{Im}(H_{12}H_{21}) = 0. \qquad (27)$$

Для эрмитовского смешивающего взаимодействия $Im(H_{12}H_{21})=0$, а $Re(H_{12}H_{21})>0$ и E_1 может оказаться равным E_2, если $\delta=0$, а $\beta^2=4|H_{12}|^2$. При этом величина $\alpha=i\frac{\gamma_2-\gamma_1}{4}$ и выражение для неортогональности имеет вид

$$<\psi_1|\psi_2>=i\frac{\gamma_2-\gamma_1}{|\gamma_2-\gamma_1|}\frac{H_{12}}{|H_{12}|}. \tag{28}$$

Мы видим, что в пределе $E_1=E_2$ величина $|<\psi_1|\psi_2>|=1$. Легко проверить, что в случае неэрмитовского смешивающего взаимодействия ($H_{12}\neq H^*_{21}$) при $E_1=E_2$ также $|<\psi_1|\psi_2>|=1$. Поскольку состояния $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$ определены с точностью до фазы (см. раздел 3), мы можем считать, что

$$\lim_{E_1=E_2}<\psi_1|\psi_2>=1,\ \text{т.е. при}\ E_1=E_2-|\psi_1>\equiv|\psi_2>.$$

Следовательно, в случае пересечения неортогональных уровней квазистационарные состояния становятся тождественными (см. в связи с этим работу[6]).

Отметим здесь, что несмотря на "вырождение" ($E_1=E_2$) волновые функции $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$, входящие в (28), определены однозначно, если рассматривать указанные соотношения как предельный случай $E_1\to E_2$.

7. Предположим теперь, что в результате некоторого процесса было создано состояние $|\psi(0)>$, соответствующее $|\phi_1>$. Рассмотрим, как оно изменяется с течением времени. Для этого разложим $|\phi_1>$ по квазистационарным состояниям $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$. Из (11) следует, что это разложение имеет вид:

$$|\psi(0)>=|\phi_1>=\frac{c_{22}}{D}|\psi_1>-\frac{c_{12}}{D}|\psi_2>, \tag{29}$$

где

$$D=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}.$$

Развитие во времени $|\phi_1>$ описывается выражением

$$\psi(t)=\frac{c_{22}}{D}|\psi_1>e^{-\frac{i}{h}E_1t}-\frac{c_{12}}{D}|\psi_2>e^{-\frac{i}{h}E_2t}. \tag{30}$$

Вероятность по истечении времени t обнаружить систему в начальном состоянии $|\phi_1>$

$$P(t)=|<\phi_1|\psi(t)>|^2. \tag{31}$$

Рассмотрим выражение (31) в случае, когда $E_1\to E_2$. При $E_1=E_2$ коэффициенты в разложении (29) являются сингулярными. Аккуратный переход к пределу после соответствующих довольно громоздких алгебраических преобразований приводит к равенству

$$P(t)=|1-i\frac{(H_{11}-H_{22})}{2h}t|^2e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2h}t}, \tag{32}$$

или

$$P(t)=\{1+\frac{\beta t}{2}+\frac{\delta^2+\beta^2}{4h^2}t^2\}^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2h}t}, \tag{33}$$

где β и δ удовлетворяют соотношениям (27)[x].

---

[x] При этом $|<\phi_2|\psi(t)>|^2=|\frac{H_{21}}{h}t|^2e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2h}t}$, а величина

$$N(t)=|<\phi_1|\psi(t)>|^2+|<\phi_2|\psi(t)>|^2=$$
$$=\{1+\frac{\beta}{h}t+\frac{\delta^2+\beta^2+4|H_{12}|^2}{4h^2}t^2\}e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2h}t}.$$

Если, например, перемешивающее взаимодействие эрмитово, то, как уже указывалось, $\delta = 0$ и закон распада имеет вид

$$P(t) = \left(1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{4\hbar} t\right)^2 e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\hbar} t}. \qquad (34)$$

Пусть, далее, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma$. Тогда

$$P(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{4\hbar} t\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2\hbar} t}. \qquad (35)$$

Обратим внимание на то, что, согласно (27), смешивающее взаимодействие должно быть при этом строго определенным, а именно:

$$|H_{12}| = |H_{21}| = \frac{\gamma}{4}. \qquad (36)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ было создано состояние, соответствующее $|\phi_2\rangle$, то вероятность $P'(t)$ по истечении времени t обнаружить систему в начальном состоянии $|\phi_2\rangle$ в условиях равенства $E_1 = E_2$ будет иметь вид (ср. /3/):

$$P'(t) = \left(1 - \frac{\gamma}{4\hbar} t\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2\hbar} t}. \qquad (37)$$

Законы распада $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ имеют неэкспоненциальный характер и полностью определяются величиной $|H_{12}|$. Выражение (36), описывающее распад состояния, бывшего до включения перемешивающего взаимодействия стабильным, совпадает с законом распада полюса второго порядка, введенного в работе /9/ x/.

x/ Случай, когда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1 = \gamma \neq 0$, соответствует модели Ли. Неэкспоненциальный распад в рамках этой модели был рассмотрен ранее в работе /10/.

В нашем рассмотрении данный тип неэкспоненциальности распада $|\phi_1\rangle$ является просто предельным частным случаем общего закона распада $|\phi_1\rangle$, который при $E_1 \neq E_2$ имеет вид затухающих биений.

Из приведенного выше анализа следует, что при наличии вырождения двух неортогональных квазистационарных уровней закон распада, вообще говоря, имеет вид

$$|1 + \xi t|^2 e^{-\Gamma t}, \qquad (38)$$

где величина ξ зависит от способа возбуждения. При $\xi \neq 0$ матрица резонансного рассеяния на рассмотренной выше системе уровней будет иметь полюс второго порядка в точке $E_0 = E_1 = E_2$ (см. также /10/,/3/). Нетрудно понять, что пересечению N -неортогональных уровней ($N \geq 2$) отвечает появление полюса кратности N. Закон распада при этом имеет вид $|Q^{(N-1)}(t)|^2 e^{-\Gamma t}$, где $Q^{(N-1)}(t)$ – полином $(N-1)$ -ой степени. Заметим, что результаты этого раздела могут быть получены непосредственно путем решения временного уравнения Шредингера $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ и полностью согласуются с теорией систем дифференциальных уравнений, для которых соответствующее характеристическое уравнение имеет кратные корни (см. /11/). При таком походе введение неортогональных квазистационарных состояний не является обязательным.

8. Рассмотренная выше теория распада нестабильных систем носит общий характер и может быть применена в различных физических ситуациях. Мы уже указывали, что для того, чтобы неортогональность квазистационарных состояний была большой, необходимо, чтобы разность ширин уровней была сравнима с разностью их энергий. Рассмотрим, например, распад возбужденных состояний атома водорода $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ при их перемешивании внешним электрическим полем в случае, когда лэмбовский сдвиг компенсируется соответствующим магнитным полем /12/ (электрическое и магнитное поля должны быть перпендикулярны друг другу).

В этом случае состояниям $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ соответствуют состояния $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ в отсутствие электрического поля. При перемешивании уровней возникают неортогональные состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ с энергиями E_1 и E_2. Это приводит к тому, что число возбужденных атомов изменяется в течение времени неэкспоненциально (см. формулу (3)). При $E_1 \to E_2$ $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \to 1$ и закон распада системы описывается формулами (35), (37). Матрица резонансного рассеяния фотонов в этом случае имеет в точке $E_0 = E_1 = E_2$ полюс второго порядка $\approx \frac{1}{(E-E_0)^2}$.

В качестве второго примера отметим, что возбужденные состояния Be^{8*}_1 и Be^{8*}_2, которые рассматривались в работе/4/, также являются неортогональными. Действительно, оба состояния бериллия обладают одинаковыми спинами и четностями (2^+) и распадаются на две α-частицы. Используя экспериментальные данные для ширин Γ_1 и Γ_2 и разности уровней $Q = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, приведенные в работе/4/, мы с помощью формулы (7) получим

$$|\langle {}^{8*}_{1}Be|{}^{8*}_{2}Be\rangle| = \sqrt{\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)^2 + Q^2}} \approx 0{,}3 .$$

Именно неортогональность ${}^{8*}_{1}Be$ и ${}^{8*}_{2}Be$ приводит к тому, что спектр распада ${}^{8*}Be \to 2\alpha$ не описывается суммой двух формул Брейта-Вигнера, а содержит интерференционный член, что и было замечено экспериментальноx/.

9. Заметим в заключение, что в самом общем случае сечение образования двух нестабильных неортогональных состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ равно

$$\sigma = |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\langle\psi_2|\psi_1\rangle f_2^* f_1), \tag{39}$$

x/ Состояния ${}^{8*}_{1}Be$ и ${}^{8*}_{2}Be$ представляют собой суперпозиции состояний с изотопическими спинами $T = 0,1$, которые, согласно (15-16), можно записать в виде
${}^{8*}_{2}Be = a|\psi_{T=0}\rangle + b/\alpha\,|\psi_{T=1}\rangle$, ${}^{8*}_{2}Be = -b^*/\alpha|\psi_{T=0}\rangle + a|\psi_{T=1}\rangle$,
где a – действительное число, а α – в данном случае обязательно комплексная величина. Это, по-видимому, ускользнуло от авторов работы/4/. При действительных значениях коэффициентов приведенные выше суперпозиции были бы, очевидно, ортогональными.

где f_1 – амплитуда образования состояния $|\psi_1\rangle$, f_2 – амплитуда образования состояния $|\psi_2\rangle$. Формула (39), по сути дела, дает представление сечения процесса в неортогональном базисе. Она может быть получена например, следующим способом.

Рассмотрим распределение энергий (строго говоря, эффективных масс) продуктов распада $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \to |m\rangle$. Оно, очевидно, имеет следующий вид:

$$d\sigma_m = \frac{1}{2\pi}h\left|f_1\frac{A_{1m}}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_1+i\frac{\Gamma_1}{2}} + f_2\frac{A_{2m}}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_2+i\frac{\Gamma_2}{2}}\right|^2 d\mathcal{E}, \tag{40}$$

где A_{1m}, A_{2m} – амплитуды распадов $|\psi_1\rangle \to |m\rangle$ и $|\psi_2\rangle \to |m\rangle$ соответственно, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – энергии и ширины состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$.

При соответствующем суммировании по конечным состояниям m (например, при интегрировании по углам) интерференционный член в (40) в случае ортогональности $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ исчезает. Но если состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ неортогональны, интерференционный член в выражении $\sum_m d\sigma_m$ всегда отличен от нуля.

Полное сечение образования состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ – $\sigma = \sum\int d\sigma_m$. После элементарного интегрирования получим

$$\sigma = |f_1|^2\,h\,\frac{\sum_m|A_{1m}|^2}{\Gamma_1} + |f_2|^2\,h\,\frac{\sum_m|A_{2m}|^2}{\Gamma_2} + 2\,\mathrm{Re}\left(f_1 f_2^*\frac{h\sum_m A_{1m}A^*_{2m}}{\Gamma_1+\Gamma_2/2+i(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)}\right). \tag{41}$$

С учётом соотношений (6) и (7) мы приходим к формуле (39).

Авторы выражают глубокую благодарность Л.И.Лапидусу за участие в обсуждении работы и интересные замечания.

Литература

1. R. Sachs. Ann. Phys., 22, 239 (1963).
2. S. Bennet, D. Nygren, H. Saal, J. Steinberger, J. Sanderland. Phys. Rev. Lett., 19, 997 (1967).
3. K.E. Lassila, Vesa Ruuskahnen. Phys. Rev. Lett., 17, 490 (1966).
4. C.P. Brownc, W.D. Callender and J.R. Erskine. Phys. Lett., 23, 371 (1968).
5. J.S. Bell, J. Steinberger. Proc. of the international conference on elementary particles. Oxford, 1965.
6. В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 55, 904 (1968); Препринт ОИЯИ, P2-3763, Дубна, 1968.
7. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения, §16, ИЛ, 1956.
8. L. Mower. Phys. Rev., 142, 799 (1966).
9. M. Goldberger and K. Watson. Phys. Rev., 136, B1472 (1964).
10. J.S. Bell and G.J. Goebel. Phys. Rev., 138, B1198 (1965).
11. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, гл. VII, §2.
12. R.T. Robiscol. Phys. Rev., 138, A22 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1968 года.