ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4067

М.А.Либерман, А.А.Макаров

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОНУСЕ И УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АМПЛИТУД

1968

Р2 - 4067

М.А.Либерман, А.А.Макаров

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОНУСЕ И УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АМПЛИТУД

Направлено в ЯФ

1. Введение

В последнее время много внимания уделяется проблеме разложения релятивистских амплитуд по неприводимым представлениям группы Лоренца. Такой подход может быть полезен при исследовании аналитических свойств амплитуды рассеяния /1-3/. Кроме того, такие разложения позволяют дать теоретико-групповую интерпретацию комплексного момента, а также полюсов и траекторий Редже /1-4/.

В работе Виленкина и Смородинского /5/ были рассмотрены двумерные разложения амплитуды рассеяния по неприводимым представлениям O(3.1). При этом в качестве базисных функций, реализующих неприводимые представления группы Лоренца, были выбраны собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде в пространстве скоростей.

В настоящей работе мы рассмотрим другую реализацию неприводимых представлений группы Лоренца в пространстве функций, заданных на верхней поле конуса $u^2=0$. Мы надеемся, что в некоторых задачах инвариантные разложения с использованием таких функций могут оказаться более удобными для исследований, чем разложения по функциям на верхней поле гиперболоида. Так, например, разложение на конусе особенно удобно при исследовании реакций с участием частиц с нулевой массой покоя, например, для комптон-эффекта.

Заметим, что разложения по функциям на конусе могут рассматриваться также и как асимптотические разложения на гиперболоиде при больших значениях энергий.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением лишь вырожденных унитарных представлений группы O(3.1) типа (р.о.) [6]. Мы построим функции на конусе, реализующие эти представления, и вычислим коэффициенты перехода между различными базисными функциями, отвечающими редукции группы Лоренца на различные подгруппы.

Так как коэффициенты перехода от одних базисных функций к другим представляют собой унитарное преобразование и так как эти коэффициенты не зависят от конкретной реализации представлений, то они определяют и преобразование между базисными функциями в различных системах координат на гиперболоиде.

При этом обратное преобразование определяется, очевидно, эрмитово-сопряженными матрицами.

Это означает, между прочим, что наряду с интегралами, вычисленными в настоящей работе, мы получаем и значение соответствующих интегралов от функций на гиперболоиде [x].

II. Системы координат и базисные функции

В псевдоевклидовом пространстве 4-скоростей существует три типа сфер: с вещественной, мнимой и нулевой кривизной [7], которым отвечают три типа квазирегулярных представлений группы O(3.1) в пространстве функций соответственно на верхней поле гиперболоида $u^2=1$,

---

x) Заметим, что использование такого метода вычисления интегралов восходит еще к Лобачевскому, который для вычисления сложных интегралов переходил на орисферу.

на однополостном гиперболоиде[x)] $u^2 = -1$, и на верхней поле конуса $u^2 = 0$.

Наиболее простой вид имеют функции на конусе, которые связаны с функциями, реализующими неприводимые представления группы Лоренца на верхней поле гиперболоида орисферным преобразованием Гельфанда-Граева /7/.

Мы рассмотрим представления собственной группы Лоренца (без отражений), реализованные на собственных функциях оператора Лапласа на конусе. При этом различным системам координат на конусе отвечает редукция группы Лоренца на различные подгруппы. Мы будем заниматься лишь четырьмя системами координат, представляющими наибольший физический интерес.

1. Системы координат на конусе

а) Сферическая система S: $O(3,1) \supset O(3) \supset O(2)$

$$u_0 = \frac{1}{2} e^{a}, \qquad u_3 = \frac{1}{2} e^{a} \cos\theta,$$

$$u_2 = \frac{1}{2} e^{a} \sin\theta \cos\phi, \qquad u_1 = \frac{1}{2} e^{a} \sin\theta \sin\phi,$$

где

$$-\infty < a < \infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

б) Гиперболическая система H : $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$

$$u_1 = \frac{1}{2} e^{a} \operatorname{ch}\beta, \qquad u_3 = \epsilon \frac{1}{2} e^{a},$$

$$u_2 = \frac{1}{2} e^{a} \operatorname{sh}\beta \cos\phi, \qquad u_1 = \frac{1}{2} e^{a} \operatorname{sh}\beta \sin\phi,$$

где

$$-\infty < a < \infty, \qquad 0 \le \beta < \infty, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

$$\epsilon = \pm 1.$$

x) С отождествлением соответствующих точек.

в) Орисферическая система O : $O(3,1) \supset E(2) \supset O(2)$

$$u_0 = e^a \frac{1+r^2}{2}, \qquad u_3 = e^a \frac{-1+r^2}{2},$$

$$u_2 = e^a r \cos\phi, \qquad u_1 = e^a r \sin\phi,$$

где

$$-\infty < a < \infty, \qquad 0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

г) Цилиндрическая система C : $O(3,1) \supset O(2) \times U(1,1)$.

$$u_0 = \frac{1}{2} e^b \operatorname{ch} a, \qquad u_3 = \frac{1}{2} e^b \operatorname{sh} a,$$

$$u_2 = \frac{1}{2} e^b \cos\phi, \qquad u_1 = \frac{1}{2} e^b \sin\phi,$$

где

$$-\infty < b < \infty, \quad -\infty < a < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

2. Инфинитезимальные операторы пространственных (L_i) и гиперболических (K_i) вращений, удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k,$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} L_k.$$

Они могут быть получены из разложения в ряд по α равенства $T_{g_\alpha} f(x) = f(g_\alpha x)$, где g_α какая-либо однопараметрическая подгруппа группы Лоренца, или из выражения для четырехмерного момента $M_{\alpha\beta}$:

$$\epsilon_{ikm} L_m = -\left(u_i \frac{\partial}{\partial u_k} - u_k \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = -i M_{ik} \quad ,$$

$$K_k = u_0 \frac{\partial}{\partial u_k} + u_k \frac{\partial}{\partial u_0} = M_{0k} \quad .$$

Ввиду того, что конус является предельной поверхностью для однополостного гиперболоида, формально инфинитезимальные операторы могут быть также получены из соответствующих операторов на гиперболоиде с помощью предельного перехода $a \to \infty$. При этом имеем:

а) S -система:

$$L_1 = \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$L_2 = -\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$K_1 = \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} + \cos\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$K_2 = \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \cos\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$K_3 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial a} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} .$$

б) H -система:

$$L_1 = \operatorname{sh}\beta \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{ch}\beta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\cos\phi}{\operatorname{sh}\beta} \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

$$L_2 = -\epsilon \operatorname{sh}\beta \cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \epsilon \operatorname{ch}\beta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\beta} - \epsilon \frac{\sin\phi}{\operatorname{sh}\beta} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_1 = \cos\phi \frac{\partial}{\partial\beta} - \operatorname{cth}\beta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_2 = \sin\phi \frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{cth}\beta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_3 = \epsilon \operatorname{ch}\beta \frac{\partial}{\partial a} - \epsilon \operatorname{sh}\beta \frac{\partial}{\partial\beta}.$$

в) O -система:

$$L_1 = r\cos\phi \frac{\partial}{\partial a} - \cos\phi \frac{1+r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \sin\phi \frac{-1+r^2}{2} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_2 = -r\sin\phi \frac{\partial}{\partial a} + \sin\phi \frac{1+r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \cos\phi \frac{-1+r^2}{2} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_1 = r\sin\phi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{-1+r^2}{2} \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+r^2}{2r} \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_2 = r\cos\phi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{-1+r^2}{2} \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1+r^2}{2r} \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_3 = -\frac{\partial}{\partial a} + r\frac{\partial}{\partial r}.$$

г) C -система:

$$L_1 = \operatorname{ch} a \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{sh} a \sin\phi \frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{sh} a \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_2 = -\,\mathrm{ch}\, a \cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{sh}\, a \cos\phi \frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{sh}\, a \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_1 = -\,\mathrm{sh}\, a \cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ch}\, a \cos\phi \frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{ch}\, a \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_2 = -\,\mathrm{sh}\, a \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ch}\, a \sin\phi \frac{\partial}{\partial b} + \mathrm{ch}\, a \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial a}.$$

3. Собственные функции

Представления группы Лоренца задаются собственными значениями двух инвариантов:

$$\Delta_L = \sum_{i=1}^{3} (K_i^2 - L_i^2) \quad \text{и} \quad \Delta' = -4 \sum_{i=1}^{3} L_i K_i .$$

В рассматриваемом нами случае Δ' тождественно равна нулю (этот инвариант связан с спином /8/), а Δ_L – оператор Лапласа на конусе. При этом базисные функции являются решениями уравнения x)

$$\Delta_L f(u) = \sigma(\sigma + 2) f(u) .$$

Из теории представлений известно /7/, что $\sigma = -1 + ip$, где p – вещественно, отвечают унитарные неприводимые представления основной серии. Нетрудно проверить, что во всех системах координат

$$\Delta_L = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial}{\partial a}.$$

x) Знак перед членом $\sigma(\sigma + 2) f(u)$ зависит от выбора метрики. Мы здесь выбираем $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -1$.

Решение имеет вид:

$$f_p(a) = \text{const} \cdot e^{(-1 \pm ip)a}.$$

Заметим, что $f_p(a)$ есть, таким образом, однородная функция от e^a со степенью однородности $(-1 \pm ip)$, а разложение на конусе есть разложение по однородным функциям. Кроме Δ_L, базисные функции должны быть собственными функциями полного набора коммутирующих операторов, отвечающих редукции группы Лоренца на различные подгруппы.

В рассматриваемых нами четырех случаях это следующие операторы:

S -система:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mathrm{ctg}\,\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

соответствуют редукции 0 (3.1) на группу трехмерных вращений 0(3) и ее подгруппу 0(2). Квантовые числа – ℓ и m.

H -система:

$$H^2 = K_1^2 + K_2^2 - L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mathrm{cth}\,\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

соответствуют редукции 0(3.1) на трехмерную группу Лоренца 0(2.1) и ее подгруппу 0(2). Квантовые числа соответственно – $\alpha = -\frac{1}{2} + iq$ и m.

O –система:

$$O^2 = (K_1 + L_2)^2 + (K_2 - L_1)^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

соответствуют редукции $O(3.1)$ на группу движений евклидовой плоскости $E(2)$ и ее подгруппу $O(2)$. Квантовые числа – κ и m .

C –система:

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial a}, \qquad L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

соответствует редукции на прямое произведение однопараметрических подгрупп гиперболических вращений в плоскости (0.1) и пространственных вращений в плоскости $(1,2)$. Квантовые числа r и m .

Выпишем теперь ортонормированные базисные функции на конусе, т.е. собственные функции Δ_L и инвариантов в указанных системах координат. Причем мы будем выбирать фазовые множители функций так, чтобы они совпадали с соответствующими фазами функций на гиперболоиде (нормированных на δ –функцию) в пределе $a \to \infty$. При таком выборе коэффициенты перехода между базисными функциями, полученные ниже, в разделе IV , для функций на конусе, будут одновременно в точности и коэффициентами перехода для указанных функций на гиперболоиде.

S –система:

$$f_{p\ell m}(u) = \langle a\,\theta\phi \,|\, p\,\ell\,m \rangle =$$

$$= \Big[\frac{2}{\pi}\prod_{h=0}^{\ell}(p^2 + h^2)\Big]^{1/2}\Big\{\frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(1+\ell+ip)}\,e^{(-1+ip)a} + \frac{\Gamma(-ip)}{\Gamma(1+\ell-ip)}\,e^{(-1-ip)a}\Big\}\,Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

где

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\;P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\phi} .$$

Соотношение ортогональности имеет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2a}}{4} da \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \; \langle p\ell m \,|\, a,\theta\phi\rangle\langle a\,\theta\phi|\, p'\ell' m'\rangle = \delta_{mm'}\delta_{\ell\ell'}\delta(p-p').$$

Соотношение полноты:

$$\int\limits_0^{\infty} dp\, f^*_{p\ell m}(u)\, f_{p\ell m}(u') = \frac{\delta(u-u')}{e^{2a}}.$$

H -система:

$$\langle a\beta\phi\,|\,pqm\rangle^{1,2} = \left(\frac{e^{i\phi_{1,2}}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(-1+ip)a} + \frac{e^{i\phi'_{1,2}}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(-1-ip)a}\right) J_{qm}(\beta,\phi),$$

где

$$J_{qm}(\beta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{q\,\mathrm{th}\,\pi q}{\prod\limits_{n=1}^{m}\left[\left(\frac{1}{2}-n\right)^2+q^2\right]}\right)^{1/2} P^{m}_{-\frac{1}{2}+iq}(\mathrm{ch}\,\beta)\, e^{im\phi}$$

и где

$$e^{i\phi_{1,2}} = \left(\frac{\pi p\,\mathrm{sh}\,\pi p}{\mathrm{sh}^2\pi p + \mathrm{ch}^2\pi q}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(ip)}{\gamma\Gamma\left(\frac{1}{2}+iq+ip\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iq+ip\right)},$$

$$e^{i\phi'_{1,2}} = \left(\frac{\pi p\,\mathrm{sh}\,\pi p}{\mathrm{sh}^2\pi p + \mathrm{ch}^2\pi q}\right)^{1/2} \left[\frac{\mathrm{ch}\,\pi q}{\pi}\,\Gamma(-ip) \pm \frac{1}{\Gamma(1+ip)}\right].$$

Нетрудно проверить, что здесь $\phi_{1,2}$ и $\phi'_{1,2}$ вещественны x). Причем для функций $\Phi_{1,2}(a,\beta,\phi) = \langle a\beta\phi|\,pqm\rangle^{1,2}$ выполняются следующие соотношения:

$$(\Phi_1,\Phi_2) = 0, \quad (\Phi_1,\Phi_1) = (\Phi_2,\Phi_2) = \delta_{mm'}\delta(q-q')\,\delta(p-p').$$

---

x) Еще раз отметим, что фазы выбираются так, чтобы коэффициенты перехода между различными базисными функциями на конусе в точности совпадали бы с коэффициентами перехода между функциями на гиперболоиде.

O -система:

$$\langle a r \phi | p \kappa m \rangle = \left(\frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1+ip)a} + \frac{e^{i\phi_2}}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1-ip)a} \right) J_{\kappa m}(r,\phi),$$

где

$$J_{\kappa m}(r,\phi) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\, J_m(\kappa r) e^{im\phi}$$

($J_m(\kappa r)$ -функции Бесселя), а x)

$$e^{i\phi_{1,2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2p\,\mathrm{sh}\,\pi p}}\; \frac{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\mp ip}}{\Gamma(\mp ip)} .$$

C -система:

$$\langle b a \phi | p r m \rangle = \frac{2^{ip}}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{(-1+ip)b}\; e^{ira}\; e^{im\phi} .$$

III . Асимптотическая теорема

В этом разделе мы, следуя работе /9/, рассматриваем разложение амплитуды рассеяния, используя лишь разложение по функциям в S - системе. При этом, как было показано, требование разложимости амплитуды по таким функциям приводит к асимптотическим условиям типа теоремы Померанчука /10/.

Действительно, напишем разложение амплитуды $f(E,\theta,\phi)$ по функциям на конусе, реализующим неприводимые представления группы Лоренца, считая,что $f(E,\theta,\phi)$ удовлетворяет условиям, упомянутым в /9/. Имеем:

$$f(E,\theta,\phi) = \sum_{\ell m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left[\frac{2}{\pi} \prod_{n=0}^{\ell} (p^2 + n^2) \right]^{1/2} . \qquad \text{(III.1)}$$

---

x) Еще раз отметим, что фазы выбираются так, чтобы коэффициенты перехода между различными базисными функциями на конусе в точности совпадали бы с коэффициентами перехода между функциями на гиперболоиде.

$$\left\{ \frac{a_{\ell m}(p)\Gamma(ip)}{\Gamma(1+\ell+ip)} e^{(-1+ip)a} + \frac{a_{\ell m}(-p)\Gamma(-ip)}{\Gamma(1+\ell-ip)} e^{(-1-ip)a} \right\} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \,. \quad \text{(III.1)}$$

Будем рассматривать разложение (III.1) как разложение амплитуды при больших значениях энергии. При $a \to \infty$ имеем $E \to \infty$ и $E = \operatorname{ch} a \approx \frac{e^a}{2}$. Разложение (III.1) можно тогда записать в виде

$$f_{\text{асимпт.}}(E,\theta,\phi) = \frac{\text{const}}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left[A(p,\theta,\phi) e^{ipa} + A(-p,\theta,\phi) e^{-ipa} \right], \quad \text{(III.2)}$$

где

$$A(\pm p,\theta,\phi) = \sum_{\ell m} \left[\frac{2}{\pi} \prod_{n=0}^{\ell} (n^2+p^2) \right]^{1/2} \frac{a_{\ell m}(\pm p)\Gamma(\pm ip)}{\Gamma(1+\ell\pm ip)} Y_{\ell m}(\theta,\phi).$$

Заметим, что при $E \to \infty$, а следовательно и $a \to \infty$, при фиксированных θ и ϕ из-за осцилляций в экспоненте интегрирование в формуле (III.2) фактически ограничивается областью малых значений p.

Теперь так же, как и в (9), получим соотношение между амплитудами рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени.

Реальная и мнимая части амплитуды рассеяния частицы $f(E,\theta,\phi)$, полученные из выражения (III.2), имеют вид:

$$\operatorname{Re} f(E\to\infty) = \frac{\text{const}}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left\{ [\operatorname{Re} A(p) + \operatorname{Re} A(-p)] \cos pa - [\operatorname{Im} A(p) - \operatorname{Im} A(-p)] \sin pa \right\}, \quad \text{(III.3)}$$

$$\operatorname{Im} f(E\to\infty) = \frac{\text{const}}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left\{ [\operatorname{Re} A(p) - \operatorname{Re} A(-p)] \sin pa + [\operatorname{Im} A(p) + \operatorname{Im} A(-p)] \cos pa \right\}. \quad \text{(III.4)}$$

Используя условие кроссинг-симметрии

$$\tilde{\tilde{f}}(E+i0,\theta,\phi)=f(-E,-i0,\theta,\phi)=f^*(-E+i0,\theta,\phi),$$

напишем выражения для реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния античастицы $\tilde{\tilde{f}}$:

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{f}}(E\to\infty)=\frac{\mathrm{const}}{E}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\{[-\mathrm{Re}\,A(p)e^{-\pi p}-\mathrm{Re}\,A(-p)e^{\pi p}]\cos pa+ \tag{III.5}$$
$$+[\mathrm{Im}\,A(p)e^{-\pi p}-\mathrm{Im}\,A(-p)e^{\pi p}]\sin pa\},$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{f}}(E\to\infty)=\frac{\mathrm{const}}{E}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\{[\mathrm{Re}\,A(p)e^{-\pi p}-\mathrm{Re}\,A(-p)e^{\pi p}]\sin pa+ \tag{III.6}$$
$$+[\mathrm{Im}\,A(p)e^{-\pi p}+\mathrm{Im}\,A(-p)e^{\pi p}]\cos pa\}.$$

Сравнивая (III , 3, 4, 5, 6) и учитывая, что при $a\to\infty$ интегрирование ограничивается областью малых значений p , т.е. $e^{\pm\pi p}\cong 1$, получим

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{f}}(E\to\infty)\cong-\mathrm{Re}\,f(E\to\infty),$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{f}}(E\to\infty)\cong\mathrm{Im}\,f(E\to\infty),$$

откуда и следует теорема Померанчука для рассеяния на произвольный угол (θ,ϕ) :

$$|\tilde{\tilde{f}}(E\to\infty,\theta,\phi)|^2\cong|f(E\to\infty,\theta,\phi)|^2.$$

Существование асимптотической теоремы при таком подходе представляется естественным. В самом деле, мы раскладываем амплитуду по волновым функциям скалярных частиц с нулевой массой, которые совпадают со своими античастицами.

IV. Коэффициенты перехода между базисными векторами унитарных представлений группы O(3.1)

В последнее время интенсивно развивается "обобщенный парциальный анализ", т.е. разложение амплитуды рассеяния по неприводимым представлениям группы O(3.1) /1,2,3,11/. Такие разложения, возможно, приведут к более глубокому пониманию теоретико-групповой природы полюсов и траекторий Редже. При таком подходе используются разложения по неприводимым представлениям группы O(3.1), соответствующие редукциям к некомпактным подгруппам и, таким образом, возникает необходимость перехода от обычных парциальных разложений, соответствующих редукции к подгруппе O(3), к разложениям с некомпактными подгруппами.

В этом разделе мы вычислим коэффициенты перехода между базисными функциями унитарных представлений группы Лоренца, соответствующие редукциям на различные подгруппы. Так как такие коэффициенты имеют чисто групповой смысл и не зависят от способа реализации неприводимых представлений, то их удобнее всего вычислять используя реализацию представлений группы O(3.1) на функциях на конусе.

Аналогичным проблемам, но с использованием иной техники посвящены работы /12-15/. Часть результатов, полученных в этом разделе, совпадает с результатами указанных работ.

1. Коэффициенты перехода S – O

Коэффициенты переразложения базисных функций в S -системе $\Phi_{p\ell m}(a,\theta,\phi) = \langle a\,\theta\,\phi \mid p\,\ell\,m\rangle$ по базисным функциям в O -системе: $\Phi_{p\kappa m}(b,r,\phi) = \langle b\,r\,\phi \mid p\,\kappa\,m\rangle$ задаются интегралом

$$\langle p'\kappa\, m' \mid p\,\ell\, m\rangle = \int \frac{d^3u}{u_0}\, \Phi^*_{p'\kappa m'}(u)\, \Phi_{p\ell m}(u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2a}}{4} da \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, [C_0^{1*} e^{(-1-ip')b} + C_0^{2*} e^{(-1+ip')b}] J_{\kappa m'}(r,\phi) [C_s^1 e^{(-1+ip)a} +$$

$$+ C_s^2 e^{(-1-ip)a}] Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

где $C_0^{1,2}$ и $C_s^{1,2}$ - нормировочные множители, а координаты в S - и O - системах связаны следующим образом:

$$e^b = e^a \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad r = \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{IV.2}$$

Подставляя в (IV.I) значения $C_0^{1,2}$ и $C_s^{1,2}$ и воспользовавшись (IV.2), получим следующее выражение для коэффициентов переразложения $S \to O$ x):

$$\langle p'\kappa m' | p\,\ell\, m\rangle = \delta_{mm'}\delta(p-p')(-1)^m \left[\frac{\pi\kappa\,(2\ell+1)(\ell-m)!}{2p\,\mathrm{sh}\,\pi p\,(\ell+m)!}\prod_{n=0}^{\ell}(n^2+p^2)\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{ip}}{\Gamma(1+\ell+ip)} J(p) + \frac{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-ip}}{\Gamma(1+\ell-ip)} J(-p) \right\}.$$

Здесь через $J(\pm p)$ обозначен следующий интеграл:

$$J(\pm p) = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1 \mp ip} J_m\left(\kappa\, \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\right) P_\ell^m(\cos\theta).$$

Воспользовавшись формулами (5.63) /15/ и (20.54) /16/, найдем выражение для $J(\pm p)$ в виде ряда по G - функциям Мейера:

$$J(\pm p) = \frac{\left(-\frac{2}{\kappa}\right)^m}{2\Gamma(m-\ell)\,\Gamma(\ell-m+1)} \sum_{n=0}^{\ell-m} \frac{\Gamma(1+m+\ell+n)\Gamma(m-\ell+n)}{\Gamma(1+m+n\mp ip)(m+n)!\,n!} G_{13}^{21}\left(\frac{\kappa^2}{4}\,\Big|\,{}^{m}_{m+\ n\mp ip}\right).$$

---

x) Появление $\delta(p-p')$ в этой и аналогичных формулах для коэффициентов перехода естественно, т.к. p есть инвариантное квантовое число, характеризующее представление; различные представления, т.е. с разными p, - ортогональны, и коэффициенты перехода - не нули лишь при преобразованиях между различными базисными функциями внутри одного и того же представления.

2. Коэффициенты перехода O–C

Базисные функции в O-системе обозначим: $\Phi_{p\kappa m}(u) = \langle a r \phi | p \kappa m \rangle$, а в C-системе – $\Phi_{p r m}(u) = \langle b \zeta, \phi | p r m \rangle$. Координаты в O- и C-системах связаны следующим образом:

$$e^{b} = 2r\, e^{a}, \quad e^{\xi} = r \; . \qquad \text{(IV.3)}$$

Учитывая (IV.3), имеем

$$\langle p'\kappa m' | p r m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2a}\, da \int_0^{\infty} r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \cdot [\, C_0^{1*} e^{(-1-ip')a} + C_0^{2*} e^{(-1+ip')a} \,] \cdot$$

$$\cdot\, J_{\kappa m'}(r, \phi)\, C_o\, e^{(-1+ip)b}\, e^{ir\xi}\, e^{im\phi} =$$

$$= \delta_{mm'}\, \delta(p-p')\, C_0^{1*} C_o \int_0^{\infty} r\, dr\, 2^{-1+ip} (r)^{-1+ip+ir} J_m(\kappa r) .$$

Используя формулу (77.19)[15] и подставляя значения нормировочных коэффициентов C_0^1 и C_o, получим:

$$\langle p'\kappa m' | p r m \rangle = \delta_{mm}\, \delta(p-p') \frac{2^{-1+ir}\, \kappa^{-\frac{1}{2}-ir}}{\Gamma(ip)\sqrt{p\, \mathrm{sh}\, \pi p}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+m+ip+ir}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m-ip-ir}{2}\right)} .$$

3. Коэффициенты перехода S–C

Базисные векторы в системе S обозначим $\langle a \theta \phi | p \ell m \rangle$, а в системе C – $\langle b \xi \phi | p r m \rangle$.

Координаты в S- и C-системах связаны следующим соотношением:

$$e^{b} = e^{a} \sin\theta , \qquad \mathrm{th}\, \xi = \cos\theta . \qquad \text{(IV.4)}$$

Теперь, учитывая (IV.4), имеем для коэффициентов перехода из S в C, следующее выражение:

$$\langle p' r m' | p \ell m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2a}}{4} da \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot C_c^* e^{(-1-ip')b} \frac{1}{2\pi} e^{-ir\xi} \cdot$$

$$\cdot e^{-im'\phi} [C_s^1 e^{(-1+ip)a} + C_s^2 e^{(-1-ip)a}] Y_{\ell m}(\theta,\phi) =$$

$$= \delta_{mm'} \delta(p-p') C_c^* C_s^1 \left(\pi \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4(\ell+m)!}\right)^{1/2} (-1)^m \cdot \qquad \text{(IV.5)}$$

$$\cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, (\sin\theta)^{-1-ip} \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{ir} P_\ell^m(\cos\theta).$$

Интеграл в (IV.5) можно вычислить, сделав замену переменных $1-\cos\theta = 2x$, выразив $P_\ell^m(z)$ через гипергеометрическую функцию и воспользовавшись формулой (7.512.5) /17/.

Окончательное выражение после подстановки нормировочных коэффициентов C_s и C_c имеет вид:

$$\langle p' r m' | p \ell m \rangle = \delta_{mm'} \delta(p-p') \left[\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{8\pi(\ell-m)!} \prod_{n=0}^{\ell} (n^2+p^2)\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(ip)\Gamma\left(\frac{1+m-ip+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+m-ip-ir}{2}\right)}{\Gamma(1+\ell+ip)\Gamma(1+m-ip)\, m!} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+m+\ell, \; m-\ell, \; \frac{1+m-ip+ir}{2} \\ 1+m, \; 1+m-ip; \; 1 \end{matrix}\right).$$

4. Коэффициенты перехода S–H

Базисные функции в системах S и H обозначим соответственно через $\langle a\theta\phi | p\ell m\rangle$ и $\langle b\beta\phi | pqm\rangle^{1,2}$. Переменные a, θ и b, β

в S– и H –системах связаны следующим образом:

$$e^{\epsilon b} = \frac{e^{a}}{\operatorname{ch}\beta}\ , \qquad \operatorname{ch}\beta = \frac{\epsilon}{\cos\theta}\ ,$$

где (IV.6)

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}\ , \\ -1 & \text{для} \quad \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi\ . \end{cases}$$

Коэффициенты перехода S – H даются следующим выражением:

$$\langle p\,\ell\, m\,|\,p'q\,m'\rangle^{1,2} = \int \frac{d^3u}{u_0} \langle p\,\ell\, m\,|\,a\,\theta\phi\rangle\langle b\,\beta\phi\,|\,p'q\,m'\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2a}}{4}\,da \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \Big[C_s^{1*} e^{(-1-ip)a} + C_s^{2*} e^{(-1+ip)a} \Big]\, Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)\,\cdot$$

$$\cdot \Big[C_{H_1}^{1,2} e^{(-1+ip')b} + C_{H_2}^{1,2} e^{(-1-ip')b} \Big]\, J_{qm'}(\beta,\phi)\ . \qquad \text{(IV.7)}$$

Подставляя в (IV.7) выражение для $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ и $J_{qm}(\beta,\phi)$, значения нормировочных коэффициентов и используя (IV.6), приходим к следующему выражению для $\langle p\,\ell\, m\,|\,p'q\,m'\rangle^{1,2}$:

$$\langle p\,\ell\, m\,|\,p'q\,m'\rangle^{1,2} = \delta_{mm'}\,\delta(p-p')\big(1+(-1)^{\ell+m}\big)(-1)^{m}\ \cdot$$

$$\cdot\ \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi q\, \operatorname{th}\pi q\,(2\ell+1)(\ell-m)!\prod\limits_{n=0}^{\ell}(n^2+p^2)}{2p\,\operatorname{sh}\pi p\,(\operatorname{sh}^2\pi p+\operatorname{ch}^2\pi q)(\ell+m)!\prod\limits_{n=1}^{m}\big[(\frac{1}{2}-n)^2+q^2\big]} \right]^{1/2}\cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{J(p)}{\Gamma(1+\ell-ip)\,\Gamma(\frac{1}{2}+iq+ip)\,\Gamma(\frac{1}{2}-iq+ip)} + \frac{J(-p)}{\pi}\ \frac{\operatorname{ch}\pi q \mp i\,\operatorname{sh}\pi p}{\Gamma(1+\ell-ip)} \right\},$$

где через $J(\pm p)$ обозначен следующий интеграл:

$$J(\pm p) = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta (\cos\theta)^{-1\pm ip} \quad P_\ell^m(\cos\theta)\, P^m_{-\frac{1}{2}+iq}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) =$$
$$= \int_0^1 dz\, z^{-1\pm ip}\, P_\ell^m(z) P^m_{-\frac{1}{2}+iq}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{IV.8}$$

Для вычисления интеграла (IV.8) выразим функции Лежандра, стоящие под знаком интеграла через гипергеометрические функции ${}_2F_1$. Разлагая гипергеометрические функции в ряд и пользуясь интегральным представлением для ${}_2F_1$ /15/, приходим после некоторых преобразований к следующему выражению:

$$J(\pm p) = \frac{(-2)^{-m}\,\Gamma(\frac{1}{2}+iq\pm ip)}{\Gamma(1-m+\ell)\Gamma(\frac{1}{2}-m+iq)\;\Gamma(\frac{1}{2}+iq)\,\ell\,!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\ell-m}\sum_{n'=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-n'}\frac{\Gamma(1+m+\ell+n)\Gamma(1+\ell+n)\Gamma(\frac{1}{2}+m+iq+n')\Gamma(\frac{1}{2}+iq+n')\Gamma(1+m+n'+n)}{\Gamma(1+m+n)\Gamma(1+m+n')\Gamma(\frac{3}{2}+m+n+n'+iq\pm ip)\Gamma(1+n)\Gamma(1+n')}$$

$$\cdot\, {}_2F_1\left(\frac{3}{2}+m+\ell+iq+n+n',\ 1+m+n+n',\ \frac{3}{2}+m+n+n'\pm ip;\ \frac{1}{2}\right).$$

5. Коэффициенты перехода O–H

Базисные функции в системах O и H обозначим соответственно $\langle ar\phi | p\kappa m\rangle$ и $\langle b\beta\phi | pqm\rangle^{1,2}$, причем переменные a, r и b, β связаны следующим образом:

$$e^{\epsilon b} = \epsilon e^{a}(-1+r^2), \qquad \operatorname{ch}\beta = \epsilon\frac{r^2+1}{r^2-1}, \tag{IV.9}$$

где

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad r > 1, \\ -1 & \text{для} \quad 0 \le r < 1. \end{cases} \qquad \text{(IV.9)}$$

Выражение для коэффициентов перехода из O в H имеет следующий вид:

$$\langle p\kappa m \mid p'qm' \rangle^{1,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2a}\, da \int_0^{\infty} r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \,\cdot$$

$$\cdot [C_0^{1*} e^{(-1-ip)a} + C_0^{2*} e^{(-1+ip)a}]\, J^*_{\kappa m}(r,\phi) \cdot [C^{1,2}_{H_1} e^{(-1+ip')b} +$$

$$+ C^{1,2}_{H_2} e^{(-1-ip')b}]\, J_{qm'}(\beta,\phi). \qquad \text{(IV.10)}$$

Подставляя в (IV.10) выражение для $J_{\kappa m}(r,\phi)$ и $J_{qm}(\beta,\phi)$ и значения нормировочных коэффициентов, получаем:

$$\langle p\kappa m \mid p'qm' \rangle^{1,2} = \delta_{mm'}\delta(p-p')\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi\kappa q\, \mathrm{th}\,\pi q}{2(\mathrm{sh}^2\pi p + \mathrm{ch}^2\pi q)\prod\limits_{n=1}^{m}[(\frac{1}{2}-n)^2+q^2)]}\right]^{1/2} \cdot \qquad \text{(IV.11)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{(\frac{\kappa}{2})^{ip}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iq+ip)\Gamma(\frac{1}{2}-iq+ip)}(J_1^+ \pm J_2^+) + (\frac{\kappa}{2})^{-ip}\frac{\mathrm{ch}\,\pi q \mp i\,\mathrm{sh}\,\pi p}{\pi}(J_1^- \pm J_2^-)\right\}.$$

Здесь через $J^{\pm}_{1,2}$ в формуле (IV.11) обозначены следующие интегралы:

$$J_1^{\pm} = \int_1^{\infty} r\,dr\, J_m(\kappa r)(r^2-1)^{-1\pm ip}\, P^m_{-\frac{1}{2}+iq}\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right), \qquad \text{(IV.12)}$$

$$J_2^{\pm} = \int_0^1 r\,dr\, J_m(\kappa r)(1-r^2)^{-1\pm ip}\, P^m_{-\frac{1}{2}+iq}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right).$$

Для вычисления интеграла $J_1^{\pm}$ выразим стоящую под интегралом функцию Лежандра через гипергеометрическую функцию и воспользуемся следующей формулой /15/:

$$r^m J_m(\kappa r) = \left(\frac{2}{\kappa}\right)^m G^{10}_{02}\left(\frac{\kappa^2}{4} r^2 \,\middle|\, m, 0\right), \tag{IV.13}$$

где $G^{k,s}_{pq}$ – функция Мейера.

Подставим (IV.13) в интеграл (IV.12) и разлагая ${}_2F_1$ в ряд, найдем следующее окончательное выражение для $J_1^{\pm}$ в виде ряда по функциям Мейера:

$$J_1^{\pm} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa}\right)^m \Gamma\left(\frac{1}{2} + iq \pm ip\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2} + iq\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + iq\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + n + iq\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + iq\right)}{\Gamma(m+n+1)\, n!}\,.$$

$$\cdot\, G^{20}_{13}\left(\frac{\kappa^2}{4} \,\middle|\, \begin{matrix} m, \frac{1}{2} + m + iq - n \\ m + n \mp ip; 0 \end{matrix}\right).$$

Интеграл для $J_2^{\pm}$ вычисляется аналогично интегралу $J_1^{\pm}$, и мы приведем лишь окончательное выражение:

$$J_2^{\pm} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa}\right)^m \Gamma\left(\frac{1}{2} + iq \pm ip\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2} + iq\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + iq\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + iq + n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + iq\right)}{\Gamma(m+n+1)\, n!}\,.$$

$$\cdot\, G^{11}_{13}\left(\frac{\kappa^2}{4} \,\middle|\, \begin{matrix} -n, m \\ 0, \frac{1}{2} - iq \mp ip - n \end{matrix}\right).$$

6. Коэффициенты перехода C–H

Базисные векторы в системе C и H обозначим через $\langle b a \phi \mid p r m \rangle$ и $\langle c \beta \phi \mid p q m \rangle^{1,2}$, где переменные b и a в C-системе и c и β в системе H связаны следующим образом:

$$e^{o} = \epsilon\, e^{\epsilon b}\ \mathrm{sh}\, a\ , \qquad \mathrm{ch}\, \beta = \epsilon\, \mathrm{cth}\, a\ ,$$

где (IV.14)

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad a > 0, \\ -1 & \text{для} \quad a < 0. \end{cases}$$

Коэффициент перехода $\langle p\tau m | p'qm' \rangle^{1,2}$ вычисляется так же, как и в предыдущих случаях, и мы приведем лишь окончательное выражение для него:

$$\langle p\tau m | p'qm' \rangle^{1,2} = \delta_{mm'}\, \delta(p-p')\, 2^{-ip-2}\ \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(\frac{1}{2}+iq+ip)\,\Gamma(\frac{1}{2}-iq+ip)}\ \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{pq\ \mathrm{sh}\,\pi p\ \mathrm{th}\,\pi q}{2(\mathrm{sh}^2 \pi p + \mathrm{ch}^2 \pi q) \prod\limits_{n=1}^{m} [(\frac{1}{2}-n)^2 + q^2]} \right)^{1/2} [J(-\tau) \pm J(+\tau)]\,.$$

Здесь через $J(\pm\tau)$ обозначен следующий интеграл:

$$J(\pm\tau) = \int_0^\infty da\, e^{\pm i\tau a}\, (\mathrm{sh}\, a)^{-1+ip}\, P^{m}_{-\frac{1}{2}+iq}(\mathrm{cth}\, a).$$

Для вычисления $J(\pm\tau)$ сделаем замену $z = \mathrm{cth}\, a$ и выразим $P^{m}_{-\frac{1}{2}+iq}(z)$ через ${}_2F_1(z)$. Разлагая, далее, ${}_2F_1(z)$ в ряд, находим:

$$J(\pm\tau) = 2^{\frac{1}{2}+iq}\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+iq)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+iq)\, m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+n+iq)\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+iq)\, m!}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+iq)\,\Gamma(\frac{1}{2}+iq)\,\Gamma(1+m+n)\, n!}\ \cdot$$

$$\cdot \int dz\, (z+1)^{-1-n-iq+\frac{-m-ip\pm i\tau}{2}}\, (z-1)^{n+\frac{-1+m-ip\quad i\tau}{2}}\ .$$

Это выражение после некоторых преобразований может быть приведено к следующему окончательному виду:

$$J(\pm r) = 2^{-ip} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+iq)\Gamma(\frac{1+m-ip\mp ir}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+iq)\Gamma(1+iq+\frac{m+ip\mp ir}{2})\, m!}\; {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+m+iq,\ \frac{1}{2}+iq,\ \frac{1+m-ip\mp ir}{2}\\ 1+m,\ 1+iq+\frac{m+ip\mp ir}{2};\ 1\end{matrix}\right).$$

Заметим, что в силу унитарности представлений коэффициенты преобразования от одного базиса к другому связаны простыми интегральными преобразованиями, например:

$$\langle p\ell m | pqm\rangle = \int dr \langle p\ell m | prm\rangle\langle prm | pqm\rangle .$$

Учитывая это, мы можем вычислить несколько новых интегралов. В качестве примера мы приведем вычисление одного из наиболее простых интегралов:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, 2^{ir} \kappa^{-ir} \frac{\Gamma(\frac{1+m+ip+ir}{2})\Gamma(\frac{1+m-ip+ir}{2})}{\Gamma(1+\ell+ip)\Gamma(1+m-ip)\, m!}\; {}_3F_2\left(\begin{matrix}1+m+\ell,\ m-\ell,\ \frac{1+m-ip+ir}{2}\\ 1+m,\ 1+m-ip;\ 1\end{matrix}\right).$$

Для вычисления этого интеграла заметим, что

$$\langle p\kappa m | p\ell m\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dr \langle p\kappa m | prm\rangle\langle prm | p\ell m\rangle .$$

Подставляя сюда значение $\langle p\kappa m | prm\rangle$ и $\langle prm | p\ell m\rangle$, найдем:

$$I = \left[\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{8\pi p \,\mathrm{sh}\, \pi p\, (\ell-m)!} \prod_{n=0}^{\ell} (p^2+n^2)\right]^{-1/2} \langle p\kappa m | p\ell m\rangle . \qquad \text{(IV.15)}$$

Подставляя в (IV.15) выражение для $\langle p\kappa m | p\ell m\rangle$, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dr\, 2^{ir} \kappa^{-ir} \frac{\Gamma(\frac{1+m+ip+ir}{2})\Gamma(\frac{1+m-ip+ir}{2})}{\Gamma(1+\ell+ip)\Gamma(1+m-ip)\, m!}\; {}_3F_2\left(\begin{matrix}1+m+\ell,\ m-\ell,\ \frac{1+m-ip+ir}{2}\\ 1+m,\ 1+m-ip;\ 1\end{matrix}\right) =$$

$$=(-1)^{m}\, 4\pi\kappa\, \frac{(\ell-m)!}{(\quad +m)!} \left\{ \frac{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{ip}}{\Gamma(1+\ell+ip)}\, J(p) + \frac{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-ip}}{\Gamma(1+\ell-ip)}\, J(-p) \right\},$$

где выражение для $J(\pm p)$ через ряд по функциям Мейера приведено в п.1 этого раздела.

Аналогичным образом, используя результаты этого раздела, можно при желании вычислить также ряд других интегралов.

Наконец, подчеркнем, что разложение по неприводимым представлениям группы $O(3.1)$, реализованным на функциях на конусе, может оказаться более удобным, чем разложение по функциям на гиперболоиде, хотя бы в силу простоты самих функций на конусе. Подробное исследование таких разложений, а также реализация представлений на конусе для частиц со спином будут опубликованы позже.

В заключение мы благодарим Я. А. Смородинского за внимание к работе и полезные замечания, а также П. Винтерница и Г. И. Кузнецова за обсуждение результатов.

Литература

1. M. Toller, L. Sertotio. Nuovo Cim., 33, 413 (1964);
   M. Toller. Nuovo Cim., 37, 631 (1965);
   M. Toller. Nuovo Cim., 54, 595 (1968).
2. D. Freedman, J. Wong. Phys. Rev., 153, 1596 (1967).
3. M. Sheftel, J. Smorodinsky, P. Winternitz. Preprint, E2-3841, Dubna, 1968.
4. М. А. Либерман, Препринт ОИЯИ, Р2-3866, Дубна, 1968.
5. Н. Я. Виленкин, Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
6. П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Углирж. ЯФ, 1, 163 (1965).

7. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
8. М.А. Либерман, Я.А. Смородинский, М.Б. Шефтель. ЯФ, 7, 202 (1968).
9. Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. ЯФ, 6, 1308 (1967).
10. И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 34, 725 (1958).
11. I.F. Boyce, R. Delbourgo, A. Salam, J. Strathdee. Preprint IC/67/9 Trieste, 1967;
R. Delbourgo, A. Salam, J. Strathdee. Phys. Lett., 25B, 230 (1967).
12. A. Sciarrino, M. Toller. Intern. Report, 108, Istituto di Fisica G. Marconi, Roma, 1966.
13. S. Strom. Arkiv for Fysik, 34, 215 (1967).
14. D.A. Akyempoung, J.F. Boyce, M.A. Rahid. Preprint IC/67/61, Trieste, 1967.
15. R. Delbrougo, K. Koller, P. Mahanta. Nuovo Cim., 52A, 1254 (1967).
16. Erdelyi et al. Higher Transcendental Functions vol.1, II, New York, 1953.
17. Erdelyi et al. Tables of Integral Transforms, vol. II, New York, 1954.
18. И.М. Рыжик, И.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1968 года.