ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4010

А.В.Тарасов

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

О ВНЕМАССОВЫХ ЭФФЕКТАХ В АМПЛИТУДЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1968

P2 - 4010

А.В.Тарасов

О ВНЕМАССОВЫХ ЭФФЕКТАХ В АМПЛИТУДЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Направлено в ЯФ

The form of the off-mass-shell (OMS) effects in the amplitude of the bremss trahlung process by two particles whith the arbitrary masses $m_{1,2}$, charges $e_{1,2}$ spins $s_{1,2}$ and gyromagnetic ratios $g_{1,2}$ is discussed.

For this the third term of the expansion of the bremsstrahlung amplitude in the photon momentum k_μ(in general we suppose that the photon is virtual, that is $k_\mu^2 \neq 0$) is obtained in the potential approximaition.

Eq.(1) is a definition of the OMS elastic transition operator in the potential approximation. Eqs.(2 ,2') are identities for arbitrary $\vec{K}$, following from the definition (1) and the locality of the potential, which we call Ward's identitis. Eqs.(3,3',4) are kinematics. Eq.(5) is a bremsstrahlung amplitude in the potential approximation. The rescattering term in (5) approaches a constant as $k_\mu \to 0$, and therefore F.Low's theorem /1/ is valid for (5) in contradiction with conclusion of the paper /4/. By using (2,3') eq. (5) may be written in an evident gauge-invatiant form (5').

Eq.(6) is the expansion of the rescattering term from (5') in the photon momentum $\vec{k}$ (only the terms of the order $\vec{k}$ are left). Using eqs.(9,10,11), which are the expantion of the identity (2') in the $\vec{K}$, some rescattering terms in (6) may be expressed through the single-scattering terms (12). The three first terms of the expantion of the full bremsstrahlung amplitude (5') in the photon momentum are given by (15), where notations introduced above are used. In a general case the third term of this expantion contains OMS effects which always are a combination both of the derivatives of the transition operator on mass and of the rescattering terms.

In the cases when all rescattering terms in (6) are expressed through the single-scattering terms, the OMS effects in the full bremsstrahlung amplitude (15) are compensated.

The bremsstrahlung of two paticles with equal e/m and $g_1 = g_2 = 1$, or with equal e/m and without spin-orbital interaction are the cases under consideration.

The conclusion is: due to the existence of rescattering terms in (15) the extraction of information on OMS effects from the bremsstrahlung amplitude is rather complicated.

1. Введение

Интерес к процессу тормозного излучения при столкновениях адронов связан с надеждой извлекать из амплитуды процесса информацию о поведении амплитуд упругого рассеяния адронов вне массовой поверхности.

Если разлагать амплитуду тормозного излучения по энергии фотона ω

$$M_\gamma = \frac{1}{\omega}(M_0 + M_1\,\omega + M_2\,\omega^2 + \ldots),$$

то первые два члена этого разложения $M_0 + M_1\omega$, в силу градиентной инвариантности, определяются матрицей упругого рассеяния на массовой поверхности /1/.

Таким образом, внемассовые эффекты могут появляться только в следующих, начиная с M_2 , членах разложения.

В настоящее время не существует процедуры, позволяющей получить M_2 не зависящим от модели образом. Поэтому мы рассмотрим эту проблему в квантовомеханическом пределе, когда взаимодействие частиц между собой можно трактовать как потенциальное, а взаимодействие их с электромагнитным полем считать точечным.

В этом приближении можно записать точное выражение для амплитуды процесса тормозного излучения в виде суммы двух членов

$$M_\gamma = M_I + M_{II}\ .$$

M_I описывает излучение фотона до и после процесса рассеяния и выражается линейно через матрицу упругого рассеяния вне массовой поверхности. M_{II} описывает излучение фотона в процессе рассеяния и представляется в виде интеграла по массе от величин билинейных по матрице упругого рассеяния вне массовой поверхности.

M_I – в литературе обычно называют амплитудой однократного рассеяния, M_{II} – амплитудой двукратного рассеяния или перерассеяния.

Первоначально тормозное излучение при столкновении частиц (в частности, нуклонов) в квантовомеханическом пределе было рассмотрено Собелем и соавторами[2,3].

Однако в этих работах пренебрегалось амплитудой M_{II}. Такое пренебрежение незаконно, так как сама по себе амплитуда M_I не является градиентно-инвариантной, и поэтому внемассовые эффекты при таком подходе появляются уже в M_I, что противоречит теореме Лоу[1].

Недавно Кромер[4] сделал попытку учесть аналитически амплитуду M_{II} для тормозного излучения в pp-столкновениях. Он предположил, что в случае произвольного импульса фотона амплитуда перерассеяния может быть выражена линейно через матрицу упругого рассеяния вне массовой поверхности, т.е. имеет структуру, аналогичную амплитуде однократного рассеяния, что в общем случае справедливо, как будет показано ниже, только при нулевом 4-импульсе фотона k.

В амплитуде Кромера внемассовые эффекты, таким образом, содержатся лишь в дифференциальной форме, т.е. в коэффициенты разложения M_γ по степеням ω внемассовые эффекты входят только в виде производных от амплитуды упругого рассеяния по массе, что неверно, как будет показано ниже.

Кроме того, амплитуда M_{II} в форме Кромера в пределе $k_\mu \to 0$ не стремится к постоянному пределу (что является необходимым условием при доказательстве теоремы Лоу), а является однородной функцией нулевого порядка компонент 4-вектора k_μ, т.е. при $k_\mu \to 0$ зависит от соотношения между его компонентами. Отсюда следует (и в работе Кромера это подчеркивается), что для амплитуды тормозного излучения при потенциальном взаимодействии теорема Лоу несправедлива. Компенсация же внемас-

совых эффектов в сумме $M_0 + M_1\omega$ является (по Кромеру) следствием тождественности протонов.

Мы не будем здесь доказывать выполнимость условий теоремы Лоу в квантовомеханическом пределе. Она с очевидностью следует из явной формы для амплитуды M_γ (см. формулу (5)).

– Цель работы – выяснить, в какой форме появляются внемассовые эффекты в амплитуде M_{II}. Показано, что в общем случае члены двукратного рассеяния (интегральная форма внемассовых эффектов) не сводятся к членам типа однократного рассеяния, как предполагал Кромер.

В тех случаях, когда это происходит, внемассовые эффекты в полной амплитуде полностью сокращаются.

II. Тождество Уорда для потенциального рассеяния

Пусть взаимодействие двух частиц описывается потенциалом $\int \frac{d\vec p}{(2\pi)^3} V(\vec p\,)\, e^{i\vec p(\vec r_1 - \vec r_2)}$, зависящим только от относительного расстояния между частицами и от их спинов.

Характеристикой такого взаимодействия является оператор перехода $T(\vec q\,', \vec q, z)$, определяемый соотношением

$$T(\vec q\,', \vec q, z) = V(\vec q\,' - \vec q) - \int \frac{d\vec \ell}{(2\pi)^3} V(\vec q\,' - \vec \ell)\, G(\vec \ell, z)\, T(\vec \ell, \vec q, z) \equiv$$

$$\equiv V(\vec q\,' - \vec q) - \int \frac{d\vec \ell}{(2\pi)^3} T(\vec q, \vec \ell, z)\, G(\vec \ell, z)\, V(\vec \ell - \vec q),$$

где $G(\vec \ell, z) = (\ell^2 - z - i0)^{-1}$, а $\vec q, \vec q\,'$ – импульсы относительного движения частиц в начальном и конечном состояниях.

Если, например, $q^2 = z$ $q'^2 \neq z$, то T находится на массовой поверхности по импульсу $\vec q$ и для такого оператора мы введем обозначение $T(\vec q\,', \tilde{\vec q}) \equiv T(\vec q\,', \vec q, z = q^2)$, отмечая тильдой импульс, лежащий на массовой поверхности. Аналогично $T(\tilde{\vec q}\,', \vec q) \equiv T(\vec q\,', \vec q, z = q'^2)$.

Легко проверить, что в силу определения (1) (и локальности потенциала) для произвольного вектора $\vec K$ имеет место тождество

$$T(\vec{q}', \vec{q}-\vec{K}, u) - T(\vec{q}'+\vec{K}, \vec{q}, z) +$$

$$+\int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} T(\vec{q}', \vec{\ell}, u)[G(\vec{\ell}+\vec{K}, z) - G(\vec{\ell}, u)] T(\vec{\ell}+\vec{K}, \vec{q}, z) \equiv 0 . \tag{2}$$

Нам понадобится в дальнейшем это соотношение для случая, когда каждый из входящих в (2) операторов T по одному из импульсов находится на массовой поверхности $-q^2 = z$ $q'^2 = u$.

Требуемое соотношение удобно записать в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned}
&T(\tilde{\vec{q}}', \vec{q}-\vec{K}) - T(\vec{q}'+\vec{K}, \tilde{\vec{q}}) + \\
&+\int \frac{d\ell}{(2\pi)^3} \{ T(\tilde{\vec{q}}', \vec{\ell}) G(\vec{\ell}, q'^2)\left(\frac{q^2-q'^2}{2}\right) G(\vec{\ell}+\vec{K}, q^2) T(\vec{\ell}+\vec{K}, \tilde{\vec{q}}) + \\
&+ T(\tilde{\vec{q}}', \vec{\ell}-\vec{K}) G(\vec{\ell}-\vec{K}, q'^2)\left(\frac{q^2-q'^2}{2}\right) G(\vec{\ell}, q^2) T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) - \\
&- T(\tilde{\vec{q}}', \vec{\ell}) G(\vec{\ell}, q'^2)(\vec{\ell}\vec{K}) G(\vec{\ell}+\vec{K}, q^2) T(\vec{\ell}+\vec{K}, \tilde{\vec{q}}) - \\
&- T(\tilde{\vec{q}}', \vec{\ell}-\vec{K}) G(\vec{\ell}-\vec{K}, q'^2)(\vec{\ell}\vec{K}) G(\vec{\ell}, q^2) T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) \} \equiv 0 .
\end{aligned} \tag{2'}$$

Соотношения (2), (2') можно назвать тождеством Уорда, поскольку, как видно из дальнейшего, они обеспечивают градиентную инвариантность амплитуды тормозного излучения при столкновении двух частиц.

При $\vec{K} = 0$ (2') переходит в соотношение (2.10) работы /4/.

III. Амплитуда тормозного излучения

Если частицы заряжены, то любой процесс взаимодействия таких частиц сопровождается тормозным излучением фотонов. Пусть рассматриваемые нами частицы 1,2, находясь в состоянии с импульсами $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, сталкиваются, рассеиваются в состояние с импульсами $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$, излучая при этом фотон (виртуальный) с 4-импульсом $k=(\omega,\vec{k})$ и 4-поляризацией $\epsilon=(\epsilon_0, \vec{\epsilon})$. (Виртуальность фотона означает, что полученные в работе результаты справедливы как для процессов $1,2 \to 1,2\gamma$ $-k^2=0$, так и для процессов $1,2 \to 1,2\, e^+e^-$ $-k^2>0$ или $1,2\, e \to 1,2\, e$ $-k^2<0$).

Из сохранения энергии импульса следует

$$\frac{P^2}{2M} + \frac{q^2}{2\mu} - \frac{P'^2}{2M} - \frac{q'^2}{2\mu} - \omega = 0 \tag{3}$$

$$\vec{P}' + \vec{k} - \vec{P} = 0 . \tag{4}$$

Здесь $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ – полные импульсы системы 1,2 до и после процесса взаимодействия,

$$\vec{q} = \mu\left(\frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2}\right), \quad \vec{q}' = \mu\left(\frac{\vec{p}_1'}{m_1} - \frac{\vec{p}_2'}{m_2}\right) -$$

соответствующие импульсы относительного движения, $M = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, где $m_{1,2}$ – массы частиц 1,2. Наконец, заряды, спины и g – факторы частиц 1,2 будем обозначать $e_{1,2}$, $\vec{s}_{1,2}$, $\vec{g}_{1,2}$. Удобно работать в системе $\vec{P} + \vec{P}' = 0$, в которой фотону передаются только энергия относительного движения

$$\omega = \frac{q^2 - q'^2}{2\mu} . \tag{3'}$$

В этой системе амплитуда рассматриваемого процесса имеет следующий вид (с точностью до нормировочных множителей)

$$\begin{aligned}
M_\gamma = {} & e_1 \{\epsilon_0 - \frac{1}{2m_1}[2\vec{q}'\vec{\epsilon} + \frac{\mu}{m_1}\vec{k}\vec{\epsilon} + i g_1(\vec{s}_1 \times \vec{k})\vec{\epsilon}]\} G(\vec{q}' + \frac{\mu}{m_1}\vec{k}, q^2) T(\vec{q}' + \frac{\mu}{m_1}\vec{k}, \tilde{\vec{q}}) + \\
&+ e_1 T(\tilde{\vec{q}}', \vec{q} - \frac{\mu}{m_1}\vec{k}) G(\vec{q} - \frac{\mu}{m_1}\vec{k}, q'^2)\{\epsilon_0 - \frac{1}{2m_1}[2\vec{q}\vec{\epsilon} - \frac{\mu}{m_1}\vec{k}\vec{\epsilon} + i g_1(\vec{s}_1 \times \vec{k})\vec{\epsilon}]\} + \\
&+ e_1 \int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} T(\tilde{\vec{q}}', \vec{\ell}) G(\vec{\ell}, q'^2)\{\epsilon_0 - \frac{1}{2m_1}[2\vec{\ell}\vec{\epsilon} + \frac{\mu}{m_1}\vec{k}\vec{\epsilon} + i g_1(\vec{s}_1 \times \vec{k})\vec{\epsilon}]\} \times
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\times\, BG\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)+$$

плюс аналогичное выражение с заменой

$$\{e_1\to e_2,\ m_1\to m_2,\ g_1\to g_2,\ -\vec{s}_1\to\vec{s}_2,\ \vec{q}\to-\vec{q},\ \vec{q}\,'\to-\vec{q}\,'\}.$$

Легко проверить, используя закон сохранения энергии (3') и соотношение (2'), что она градиентно инвариантна.

Используя (2') и симметризируя подинтегральное выражение (5), можно записать в явно градиентно инвариантной форме

$$
\begin{aligned}
M_\gamma=\frac{e_1}{2m_1}\vec{e}\,\Big\{&\Big[2\vec{q}\,'+\frac{\mu}{m_1}\vec{k}+ig_1(\vec{s}_1\times\vec{k})\Big]G\left(\vec{q}\,'+\frac{\mu}{m}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{q}\,'+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)+\\
&+T\left(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{q}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k}\right)G\left(\vec{q}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q'^2\right)\Big[2\vec{q}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k}+ig_1(\vec{s}_1\times\vec{k})\Big]+\\
&+\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\,\vec{\ell}\,G\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)+\\
&+\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}T\left(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k}\right)G\left(\vec{\ell}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q'^2\right)\vec{\ell}\,G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})+\\
&+\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}T(\vec{q}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\,ig_1(\vec{s}_1\times\vec{k})G\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)\Big\}+\\
&+\{e_1\to e_2,\ m_1\to m_2,\ g_1\to g_2,\ \vec{s}_1\to\vec{s}_2,\ \vec{q}\to-\vec{q},\ \vec{q}\,'\to-\vec{q}\,'\},
\end{aligned}
\tag{5'}
$$

где введен градиентно инвариантный вектор

$$\vec{e}=\frac{\epsilon_0}{\omega}\vec{k}-\vec{\epsilon}.$$

IV. Разложение M_γ по степеням k

Рассмотрим излучение мягких фотонов, разложим амплитуду (5) по степеням k (мы по-прежнему считаем, что вообще $k^2\neq 0$) и удержим первые три члена разложения (включая члены порядка k).

Выпишем сперва разложение по $\vec{k}$ интегралов, входящих в (5')

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\Big\{T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\ell_i G\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)+\\
&+T\left(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k}\right)G\left(\vec{\ell}-\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q'^2\right)\ell_i G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})+\\
&+T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\,i\,g_1(\vec{s}_1\times\vec{k})_i\,G\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},q^2\right)T\left(\vec{\ell}+\frac{\mu}{m_1}\vec{k},\tilde{\vec{q}}\right)\Big\}=\\
&=\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\Big\{2T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\ell_i G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})+\\
&+\frac{\mu}{2m_1}k_m\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\Big\{T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\Big(\ell_i\frac{\vec{\partial}}{\partial\ell_m}+\ell_m\frac{\vec{\partial}}{\partial\ell_i}\Big)\big[G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\big]-\\
&\qquad-\big[T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\big]\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\ell_m}\ell_i+\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\ell_i}\ell_m\Big)G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\Big\}+\\
&+\frac{\mu}{2m_1}k_m\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\Big\{T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\Big(\ell_i\frac{\vec{\partial}}{\partial\ell_m}-\ell_m\frac{\vec{\partial}}{\partial\ell_i}\Big)\big[G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\big]-\\
&\qquad-\big[T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\big]\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\ell_m}\ell_i-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\ell_i}\ell_m\Big)G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\Big\}+\\
&+\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\,i\,g_1(\vec{s}_1\times\vec{k})_i\,G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})+O(k_n k_m).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В выражении (6) явно выделены симметричная по индексам i , m и антисимметричная части.

Рассмотрим антисимметричную часть. Учитывая, что

$$\ell_i \frac{\vec{\partial}}{\partial \ell_m} - \ell_m \frac{\vec{\partial}}{\partial \ell_i} = -\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \ell_m} \ell_i + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \ell_i} \ell_m = -i \epsilon_{imk} L_k ,$$

(L_k - оператор орбитального момента; стрелки показывают, в каком направлении действуют оператор дифференцирования), представляя $L_k = J_k - s_{1,k} - s_{2,k}$ (J_k - оператор полного момента) и учитывая, что в силу сохранения полного момента

$$[\, T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)\,]\, J_k = J_k\, [\, T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)\,] , \tag{7}$$

где орбитальный момент в правой части равенства (7) действует уже на переменную q'

$$\vec{L}_k = i \epsilon_{k\ell m} q'_\ell \frac{\vec{\partial}}{\partial q'_m} ,$$

антисимметричную по i , m, часть выражения (6) можно записать в виде

$$-2i \epsilon_{imk} J_k \int T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) +$$

$$+ 2i \epsilon_{imn} \int T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2) [(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \times \vec{k}\,]_n G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) . \tag{8}$$

Теперь снова воспользуемся соотношением (2'). Полагая в нем $q^2 - q'^2 = 2\mu\omega$ и разлагая его по степеням $\vec{K}$, можно получить следующие тождества:

$$\int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) \equiv$$

$$\equiv \frac{T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}}) - T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{2\mu\omega} \tag{9}$$

$$2 \int \frac{d\vec{\ell}\, \ell_i}{(2\pi)^3} T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) \equiv$$

$$\equiv -\frac{\partial T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}})}{\partial q'_i} + \mu\omega \int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} \{ T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2) \times \tag{10}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \ell_i} [\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}})\,] - \frac{\partial}{\partial \ell_i} [\, T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)]\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) \}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} \{ T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2) \ell_i \frac{\partial}{\partial \ell_m} [\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}\,] - \ell_i \frac{\partial}{\partial \ell_m} [\, T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell})\, G(\vec{\ell}, q'^2)] \times$$

$$\times G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) \} + \{ i \to m \} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{\partial q_i\, \partial q_m} - \frac{\partial^2 T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}})}{\partial q'_i\, \partial q'_m} \right] + 0(\omega) . \tag{11}$$

Как видно, эти соотношения позволяют свести часть интегралов в выражении (6) к безинтегральным выражениям (в частности, (10) обеспечивает выполнение теоремы Лоу).

Учитывая (8-10), а также свойства симметрии амплитуды $T(\vec{q}\,', \vec{q})$ при изменении знаков $\vec{q}\,', \vec{q}$ $\Big(T(\vec{q}\,', \vec{q}) = T(-\vec{q}\,', -\vec{q})$ в силу инвариантности относительно вращений, а

$$\frac{\partial T(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{y}} \Big|_{\vec{x} = -\vec{q}\,',\ \vec{y} = -\vec{q}} = -\frac{\partial T(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{y}} \Big|_{\vec{x} = \vec{q}\,',\ \vec{y} = \vec{q}} \quad \text{и т.д.} \Big).$$

первые два члена разложения амплитуды M_{II} можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{e_2}{2m_2} - \frac{e_1}{2m_1}\right) \vec{e} \left[\frac{\partial T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}})}{\partial \vec{q}\,'} + \frac{\partial T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{\partial \vec{q}} + \right.$$

$$+ \mu\omega \int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}} [T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell}) \, G(\vec{\ell}, q'^2)] \, G(\vec{\ell}, q^2) \, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}}) - \right.$$

$$\left. \left. - T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell}) \, G(\vec{\ell}, q'^2) \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}} [G(\vec{\ell}, q^2) T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}})] \right\} \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{e_1}{2m_1} \left(g_1 - \frac{\mu}{m_1} - \frac{e_2 m_1 \mu}{e_1 m_2^2} \right) \int \frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3} [T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{\ell}) \, G(\vec{\ell}, q'^2) \, i(\vec{s}_1 \times \vec{k}) \, \vec{e} \, \times \right.$$

$$\left. \times \, G(\vec{\ell}, q^2) \, T(\vec{\ell}, \tilde{\vec{q}})] \right\} + \{ 1 \to 2 \} +$$

$$+ \left(\frac{e_1 \mu}{2m_1^2} + \frac{e_2 \mu}{2m_2^2} \right) \left\{ \frac{\partial^2 T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{\partial q_i \, \partial q_m} - \frac{\partial^2 T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}})}{\partial q_i' \, \partial q_m'} - \right. \tag{12}$$

$$\left. - 2i \, \epsilon_{im\ell} \, J_\ell \left[\frac{T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}}) - T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{2\mu\omega} \right] \right\} e_i k_m \, .$$

Можно привести соображения в пользу того, что первый из интегралов, входящих в выражение (12), уже не сводится к безинтегральному выражению (мы не приводим здесь такого доказательства ввиду его громоздкости), а второй приводится к выражению вида $\vec{e}(\vec{s} \times \vec{k}) \left[\frac{T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}}) - T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q})}{2\mu\omega} \right]$ (при учете соотношения (9)) только при отсутствии спин-орбитального взаимодействия.

Однако оба интеграла выпадают из амплитуды M_γ , если имеют место соотношения

$$\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2} \tag{13}$$

$$g_1 = \frac{\mu}{m_1} + \frac{e_2 m_1 \mu}{e_1 m_2^2} \, , \quad g_2 = \frac{\mu}{m_2} + \frac{e_1 m_2 \mu}{e_2 m_1^2} \, . \tag{14}$$

Но при выполнении этих условий амплитуда M_γ (с точностью до членов $\approx k$) не содержит вообще внемассовых эффектов.

Мы сейчас выпишем явное выражение для первых трех членов разложения амплитуды M_γ по степеням $\vec{k}$, из которого последнее утверждение очевидно.

Предварительно условимся об обозначениях. Амплитуда $T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}})$, например, зависит от энергии q^2 , сдвига с массовой поверхности $\Delta m^2 = q'^2 - q^2$ и единичных векторов $\vec{\nu}\,' = \vec{q}\,'/q'$, $\nu = \vec{q}/q$ (и, разумеется, спиновых переменных)

$$T(\vec{q}\,', \tilde{\vec{q}}) = T(\Delta m^2, q^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu}) \, .$$

Аналогично $\quad T(\tilde{\vec{q}}\,', \vec{q}) = T(\Delta m^2, q'^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu}) \, .$

Введем обозначения

$$T(0, q^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu}) = T, \quad T(0, q'^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu}) = T'$$

$$\left. \frac{\partial T(\Delta m^2, q^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu})}{\partial \Delta m^2} \right|_{\Delta m^2 = 0} = \dot{T}, \quad \left. \frac{\partial T(\Delta m^2, q'^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu})}{\partial \Delta m^2} \right|_{\Delta m^2 = 0} = \dot{T}'$$

$$\left. \frac{\partial^2 T(\Delta m^2, q^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu})}{\partial (\Delta m^2)^2} \right|_{\Delta m^2 = 0} = \ddot{T}, \quad \left. \frac{8\partial^2 T(\Delta m^2, q'^2, \vec{\nu}\,', \vec{\nu})}{\partial (\Delta m^2)^2} \right|_{\Delta m^2 = 0} = \ddot{T}'$$

$$t_{ik} = \delta_{ik} - \nu_i \nu_k \, , \quad t'_{ik} = \delta_{ik} - \nu'_i \nu'_k$$

$$t_{ike} = 3\nu_i \nu_k \nu_e - \delta_{ik}\nu_e - \delta_{ie}\nu_k - \delta_{ke}\nu_i$$

$$t'_{ike} = 3\nu'_i \nu'_k \nu'_e - \delta_{ik}\nu'_e - \delta_{ie}\nu'_k - \delta_{ke}\nu'_i \,.$$

В этих обозначениях окончательный результат выглядит следующим образом:

$$M_\gamma = \frac{e_1}{2m_1}\Big\{ \vec{e}\,\Big[2\vec{q}\,' + \frac{\mu}{m_1}\vec{k} + i g_1(\vec{s}_1\times\vec{k})\Big] G\Big(\vec{q}\,' + \frac{\mu}{m}\vec{k}, q^2\Big) \times$$

$$\times \Big[T + \frac{\partial T}{\partial \nu'_m}\Big(t'_{m\ell}\frac{\mu}{m_1}\frac{k_\ell}{q'} + \frac{1}{2}t'_{m\ell n}\frac{\mu^2}{m_1^2}\frac{k_\ell k_n}{q'^2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial \nu'_m\,\partial \nu'_r} t'_{m\ell}\, t'_{rn}\frac{\mu^2}{m_2^2}\frac{k_\ell k_n}{q^2}\Big] +$$

$$+\Big[T' + \frac{\partial T'}{\partial \nu_m}\Big(-t_{m\ell}\frac{\mu}{m_1}\frac{k}{q} + \frac{1}{2}t_{m\ell n}\frac{\mu^2}{m_1^2}\frac{k_\ell k_n}{q^2}\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T'}{\partial\nu_m\,\partial\nu_r} t_{m\ell}\, t_{rn}\frac{\mu^2}{m_1^2}\frac{k_\ell k_n}{q^2}\Big]\times$$

$$\times G\Big(\vec{q} - \frac{\mu}{m_1}\vec{k}, q'^2\Big)\Big[2\vec{q} - \frac{\mu}{m_1}\vec{k} + i g_1(\vec{s}_1\times\vec{k})\Big]\vec{e}\;\Big\} +$$

$$+\frac{e_1\mu}{m_1^2}\, i(\vec{J}\times\vec{k})\,\vec{e}\,\Big[\frac{T - T'}{2\mu\omega}\Big] +$$

$$\frac{e_1}{m_1}\Big(g_1 - \frac{\mu}{m_1} - \frac{e_2 m_1\mu}{e_1 m_2^2}\Big)\Big[i(\vec{s}_1\times\vec{k})\,\vec{e}\,\dot{T} + \dot{T}'_i\,(\vec{s}_1\times\vec{k})\,\vec{e} +$$

$$+ \int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\, T(\vec{q}\,',\vec{\ell}\,)\, G(\vec{\ell}, q'^2)\, i(\vec{s}_1\times\vec{k})\,\vec{e}\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell},\vec{q}\,)\Big] +$$

$$+\{e_1\to e_2,\ m_1\to m_2,\ g_1\to g_2,\ \vec{s}_1\to\vec{s}_2,\ \vec{\nu}\to-\vec{\nu},\ \vec{\nu}\,'\to-\vec{\nu}\,'\}$$

$$+\Big(\frac{e_2}{m_2} - \frac{e_1}{m_1}\Big)\mu\,\omega\, e_i\Big[\, q_i\,\ddot{T}' - q'_i\,\ddot{T} +$$

$$+\frac{\partial\dot{T}'}{\partial\nu_{\ell e}}\frac{t_{\ell i}}{q} - \frac{\partial\dot{T}}{\partial\nu'_\ell}\frac{t'_{\ell i}}{q'} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\Big\{ T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell}\,)\, G(\vec{\ell}, q'^2)\frac{\partial}{\partial\ell_i}\big[G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}}\,)\big] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\ell_i}\big[T(\tilde{\vec{q}}\,',\vec{\ell}\,)\, G(\vec{\ell}, q'^2)\big]\, G(\vec{\ell}, q^2)\, T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}}\,)\Big\}\Big] +$$

$$+\, O(k_2 k_s) + O(k_2\,\omega) \qquad (15)$$

В выражение (15) входит амплитуда T при двух разных энергиях (начальной и конечной), отличающихся на величину энергии фотона ω. Разлагая далее по ω, можно выразить (15) через величины при одной из энергий, либо какой-нибудь промежуточной. При этом в явном виде войдут в (15) производные от амплитуды T по энергии.

Мы, однако, здесь не будем этого делать.

V. Краткое обсуждение

1. Из (15) видно, что амплитуда тормозного излучения при столкновении двух тождественных ($e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$) бесспиновых ($s_1 = s_2 = 0$) частиц, включая члены порядка k, определяется амплитудой упругого рассеяния этих частиц на массовой поверхности с той точностью, с которой справедливо для описания их взаимодействия рассматриваемое здесь потенциальное приближение.

2. Амплитуда тормозного излучения двух тождественных частиц со спином содержит внемассовые эффекты в комбинации

$$(g-1)\left[(\vec{s}_1+\vec{s}_2)(\vec{k}\times\vec{e})\dot{T}+\dot{T}'(\vec{s}_1+\vec{s}_2)(\vec{k}\times\vec{e})+\right.$$

$$\left.+\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\,T(\tilde{\vec{q}}',\vec{\ell})\,G(\vec{\ell},q'^2)(\vec{s}_1+\vec{s}_2)(\vec{k}\times\vec{e})\,G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\right]. \qquad (16)$$

Интересно отметить, что для "классических" частиц со спином (в смысле классической электродинамики, в которой $g=1$), этот член опять-таки обращается в нуль.

2а. Как уже указывалось выше, если можно пренебречь спин-орбитальным взаимодействием, интеграл в (16) сводится к выражению, линейному по амплитуде T .

Однако, как легко проверить, внемассовые эффекты в (16) при этом взаимно компенсируются.

2в. Спин-орбитальным взаимодействием пренебречь нельзя, но взаимодействие сохраняет полный спин системы (например, pp-система). Тогда амплитуду T можно разложить по схеме $T=\sum_{i=0}^{2s}P_i T_i$, где T_i- амплитуды рассеяния в определенном спиновом состоянии, а $P_i=P_i^2$ - проекционные операторы на эти состояния, причем $(\vec{s}_1+\vec{s}_2)P_0=0$.

В этом случае амплитуда T_0 не войдет в выражение (16). Это означает, что амплитуда тормозного излучения двух тождественных частиц, находившихся до взаимодействия в синглетном состоянии с точностью до членов порядка ω^2 , определяется амплитудой упругого рассеяния этих частиц.

Сравнение сечения такого процесса в рассматриваемом здесь приближении и приближении Лоу позволит оценить границу применимости приближения Лоу.

Соответствующие расчеты для pp-системы будут проведены в последующих работах.

3. Частицы 1,2 не тождественны.

В этом случае появляется еще одна комбинация внемассовых эффектов:

$$q_1 T'-q_1' T+\frac{\partial T'}{\partial\nu_\ell}\frac{t_{\ell_1}}{q}-\frac{\partial T}{\partial\nu_\ell'}\frac{t_{\ell_1}'}{q'}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\vec{\ell}}{(2\pi)^3}\left\{T(\tilde{\vec{q}}',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\frac{\partial}{\partial\ell_1}\left[G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\ell_1}\left[T(\tilde{\vec{q}}',\vec{\ell})G(\vec{\ell},q'^2)\right]G(\vec{\ell},q^2)T(\vec{\ell},\tilde{\vec{q}})\right\}. \qquad (17)$$

Как уже указывалось, интеграл в выражении (17) не сводится к выражению типа однократного рассеяния.

Существенно, что интегральные внемассовые эффекты в (16 – 17) — одного порядка с дифференциальными, и это усложняет получение информации о поведении амплитуд упругого рассеяния внемассовой поверхности.

VI . Заключение

Из проведенного анализа следует, что в амплитуду тормозного излучения в комбинации с дифференциальными внемассовыми эффектами, которые представляют непосредственный интерес, всегда входят интегральные внемассовые эффекты, которые трудно интерпретировать.

В том случае , когда последние по каким-либо причинам выражаются через первые, происходит взаимная компенсация внемассовых эффектов в полной амплитуде тормозного излучения. Одним из примеров такой компенсации является теорема Лоу. Другие примеры рассмотрены в настоящей работе. Можно думать, что сделанное утверждение носит общий характер и справедливо вне рамок рассмотренного здесь потенциального приближения.

Автор благодарит Л.И. Лапидуса за обсуждение затронутых в работе вопросов и Б.М. Головина за обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. F.E.Low. Phys. Rev., 110, 974 (1958).
2. M.I.Sobel. Phys. Rev., 152, 1385 (1966).
3. M.I.Sobel and A.H.Cromev. Phys. Rev., 158, 1157 (1967).
4. A.H.Cromer. ""NN Bremsstrahlung and the Low Energy Theorem". Preprint Northeastern University, Boston, Massachusetts,

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июля 1968 г.