ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3929

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.А.Еганова, М.И.Широков

ЭЛЕКТРОН, ДИПОЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ФОТОНАМИ.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ-УНИЧТОЖЕНИЯ

1968

P2 - 3929

И.А.Еганова, М.И.Широков

ЭЛЕКТРОН, ДИПОЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ФОТОНАМИ.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ-УНИЧТОЖЕНИЯ

Направлено в ЯФ

Еганова И.А., Широков М.И. P2-3929

Электрон, дипольно взаимодействующий с фотонами. Физические операторы рождения-уничтожения

Рассматривается модель: нерелятивистский электрон в осцилляторной яме дипольно взаимодействует с квантованным электромагнитным полем. Получена корпускулярная интерпретация модели, отличающаяся от обычной ("голые" частицы). Вакуум новых операторов рождения-уничтожения фотонов совпадает с физическим вакуумом. Процесс "осциллятор возбуждается и к тому же испускает физический фотон" отсутствует даже как виртуальный. Имеется указание на то, что в случае локального взаимодействия после введения физических операторов в теории не появляется расходимостей.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1968.

Jeganova I.A., Shirokov M.I. P2-3929

Electron-Photon Dipole Interaction. Physical Production-Annihilation Operators

A model is being considered when a non-relativistic electron in the oscillator well is in a dipole interaction with the quantized electromagnetic field. A corpuscular interpretation of the model has been obtained which differs from the ordinary one ("bare" particles). The vacuum of the new operators of the photon production-annihilation coincides with the physical vacuum. The process, "the oscillator is excited and thereto emits a physical photon", is absent even as a virtual one. It is pointed out that in case of the local interaction after introducing the physical operators there appear no divergences in the theory.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1968

Введение

Корпускулярная интерпретация теории поля с взаимодействием в терминах "голых" или математических частиц приводит к многим трудностям, появляющимся в случае локального взаимодействия. К ним относятся ортогональность "голого" и "физического" вакуумов, несуществование оператора взаимодействия в гильбертовом пространстве канонического или фоковского представления "голых" операторов, расходимости и т.п.

Имеется надежда устранить эти трудности путем введения в теорию операторов рождения-уничтожения "одетых" или "физических" частиц /1/. Первое их свойство: в физическом вакууме (собственный вектор полного гамильтониана с наименьшей энергией) такие частицы должны отсутствовать (как известно, вакуум "голых" частиц обычно не совпадает с физическим). Сразу оговоримся, что мы имеем в виду операторы, пригодные для описания физических частиц в любой момент времени, а не только при $t = \pm \infty$ (ср. in –, out–операторы). Мы не будем также требовать, чтобы в гейзенберговской картине наши "физические" операторы подчинялись свободным уравнениям /2/. В литературе пока нет общепринятого набора дальнейших требований или универсальной рецептуры нахождения "физических" операторов /1,3/. А то, что есть (см., например, /1/) оказывается непригодным для нашей модели (см. раздел 2). Нам удалось найти операторы, удовлетворяющие следующим требованиям:

а) Операторы имеют канонические коммутации. Таким образом, имеется оператор числа частиц, необходимый для всякой корпускулярной интерпретации.

б) Другое требование основывается на том факте, что полный гамильтониан модели H можно диагонализовать, т.е. найти такие операторы рождения $\hat{a}^+_\omega$ и уничтожения $\hat{a}_\omega$, что $H=\int d\omega \cdot \omega \hat{a}^+_\omega \hat{a}_\omega$. Оно формулируется следующим образом:

Физические операторы рождения (соответственно уничтожения) должны выражаться только через операторы $\hat{a}^+_\omega$ (соответственно $\hat{a}_\omega$), причем линейно. Это гарантирует совпадение физического вакуума с вакуумом физических операторов. В пределах этого требования отличие физических операторов от операторов "голых" должно быть минимальным.

Обычной целью точно решаемых моделей являются методические задачи такого типа: сравнение точного решения задачи рассеяния фотона на электроне с решением по теории возмущений и с использованием "физических" или "голых" операторов. Среди них особый интерес представляет нахождение точного временного закона высвечивания возбужденного состояния электрона. В этой модели такое состояние можно приготовить путем быстрого изменения константы осцилляторного потенциала для электрона.

В настоящей работе мы рассмотрим только некоторые важные качественные динамические следствия физической корпускулярной интерпретации, см. раздел 3.

I. Описание модели

Модель предложена Ван Кампеном /4/ и описывается гамильтонианом:

$$H=\frac{1}{2m_0}[\vec{p}-e\vec{A}]^2+\frac{m_0\kappa_1^2}{2}\vec{r}^{\,2}+H_{ph}, \tag{1}$$

$$H_{ph}=\frac{1}{8\pi}\int[\vec{E}^2(\vec{x})+(\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}))^2]\,d\vec{x}. \tag{2}$$

В квадратной скобке в (1) $\vec{A}$ берется в точке $r=0$, т.е. в центре потенциала (начало координат), а не в точке нахождения электрона $\vec{r}$. Это и называется дипольным приближением. Приняты такие единицы, что $\hbar=1$ и $c=1$; $m_0\kappa_1^2$ есть коэффициент упругости осцилляторной силы. Используется поперечная или соленоидальная калибровка электромагнитного потенциала $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$.

Упрощение дипольного приближения выявляется при использовании разложения оператора $\vec{A}$ по электрическим и магнитным мультиполям /5/:

$$\vec{A}(\vec{x})=\int_0^\infty k^{1/2}\,dk \sum_{LM\tau} \sqrt{\frac{4\pi}{2k}}\,[\vec{\mathcal{O}}^{\tau}_{kLM}(\vec{x})\,a^{\tau}_{kLM} + \vec{\mathcal{O}}^{\tau\,*}_{kLM}(\vec{x})\,a^{\tau +}_{kLM}]\,. \tag{3}$$

Множитель $\sqrt{4\pi/2k}$ вводится для того, чтобы иметь простые коммутации для операторов a :

$$[a^{\tau}_{kLM}\,, a^{\tau' +}_{k'L'M'}] = \frac{\delta(k-k')}{k^2}\,\delta_{LL'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{\tau\tau'}\,. \tag{4}$$

Здесь $L = 1,2,\ldots$; τ –есть индекс электрического (e) или магнитного (m) мультиполя. Остальные обозначения даются формулами (2.63), (2,64), (2,43), (3,3), (1,17) и др. у Роуза /5/.

В $\vec{A}(0)$ фигурируют только дипольные электрические операторы $a^{(e)}_{kLM}$ (значок (e) и индекс $L=1$ далее мы опускаем):

$$\vec{A}(0) = \int k^2 dk \sum_M \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\pi}\,[\vec{\xi}_M\, a_{kM} + \vec{\xi}^{\,*}_M\, a^{+}_{kM}]\,, \tag{5}$$

$$M = -1, 0, 1\,;\quad \vec{\xi}_0 = \vec{e}_z\,;\quad \vec{\xi}_{\pm 1} = \mp(\vec{e}_x \pm i\,\vec{e}_y)/\sqrt{2}\,. \tag{6}$$

Оказывается удобным ввести операторы рождения–уничтожения, занумерованные декартовыми проекциями x , y , z , а не циклическими – 1,0,+1:

$$a_{kz} = a_{k0}\,;\quad a_{kx} = (a_{k,-1} - a_{k,+1})/\sqrt{2}\,;\quad a_{ky} = -i(a_{k,-1} + a_{k,+1})/\sqrt{2}\,, \tag{7}$$

и далее вместо a и a^+ ввести эрмитовские операторы

$$q_{km} = (a_{km} + a^{+}_{km})/\sqrt{2}\,;\quad p_{km} = i\,(a^{+}_{km} - a_{km})/\sqrt{2}\,;\quad m = x, y, z\,. \tag{8}$$

Соответствующие (4) коммутации для них имеют вид:

$$[q_{km}, p_{k'm'}] = i \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{mm'} . \tag{9}$$

После этого

$$\vec{A}(0) = \int_0^\infty k^2 \, dk \frac{2}{\sqrt{3\pi k}} \sum_m \vec{e}_m q_{km} . \tag{10}$$

Мы видим, что с электроном взаимодействуют только электрические дипольные фотоны. Ввиду этого в дальнейшем достаточно сохранять только электрическую дипольную часть от H^d_{ph} (переменные фотонов высших мультипольностей отделяются как свободные [x)])

$$H^d_{ph} = \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 \, dk \sum_M k \, (a^+_{kM} a_{kM} + a_{kM} a^+_{kM}) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 \, dk \; k \, (\vec{q}^{\,2}_k + \vec{p}^{\,2}_k) \tag{11}$$

$$\vec{q}^{\,2}_k = q^2_{kx} + q^2_{ky} + q^2_{kz} . \tag{12}$$

Наиболее серьезное отличие модели Ван Кампена от настоящей электродинамики одного электрона заключается в дипольном приближении. Отли-

---

x) *Поэтому достаточно было бы рассматривать разложение $\vec{A}(\vec{x})$ только по электрическим дипольным векторным функциям. Вместо этого Ван Кампен /4/ пользуется разложением по функциям $\sin kx/x$, не обладающим свойством поперечности. Надлежащая поперечность $\vec{A}$ обеспечивается взятием "поперечной части" этого разложения. Однако соответствующие операторные коэффициенты разложения у Ван Кампена описывают и фиктивные продольные фотоны. Имея целью получение физических операторов рождения-уничтожения фотонов, мы должны с самого начала иметь дело только с поперечными фотонами и применять именно разложение (3).*

чие будет мало, если $\vec{A}(0)$ близко к $\vec{A}(\vec{r})$ в точках $|\vec{r}| < \ell$, где ℓ – размер осциллятора, $\ell \approx (m_0 \kappa_1)^{-1/2}$. $\vec{A}(0)$ имеет простой вид (5) потому, что сферические функции Бесселя $j_J(kr)$, входящие в $\vec{G}^r_{kLM}(\vec{x})$, равны нулю в точке $x = 0$, если $J \geq 1$. Но если $|\dot{x}| \neq 0$, то найдутся столь большие k, что аргумент j_J нельзя будет считать малым (и пренебречь всеми $j_J(kx)$ с $J \geq 1$). Чтобы во взаимодействии $(\vec{p}\,\vec{A}(\vec{r}))$ не фигурировали все мультиполи, надо вводить обрезание $f(k)$ при больших k. Можно считать, что оно происходит от неточности электрона, см. формулу (2) в гл. I у Ван Кампена /4/.

Обрезание $f(k)$ должно быть таким, чтобы $k\ell \ll 1$ или $k \ll k_{max} \approx 1/\ell$. Тогда

$$\frac{k_{max}}{\kappa_1} \approx \frac{\sqrt{m_0 \kappa_1}}{\kappa_1} = \sqrt{\frac{m_0}{\kappa_1}} \,. \tag{13}$$

Потенциальная энергия электрона в осцилляторной яме имеет порядок $\frac{m_0 \kappa_1^2}{2} \ell^2 \approx \kappa_1$, так что при разумных $\kappa_1 \ll m_0$ отношение (13) должно быть много больше 1.

Таким образом, требуемое обрезание таково, что явления испускания фотонов (частоты κ_1) осциллятором и рассеяния фотонов (той же или меньшей частоты) не будут заметно искажаться. Одновременно получается, что $k_{max} \ll m_0$, так что нерелятивистское описание электрона не приведет к большим ошибкам.

Однако можно придерживаться и чисто методической точки зрения: интересоваться моделью самой по себе, не думая о ее соответствии квантовой электродинамике. Все же для минимального физического оправдания замены $\vec{A}(\vec{r})$ на $\vec{A}(0)$ электрон должен быть хоть как-то локализован около точки О. Если он свободный, как это принимается в обширной работе Энца /6/, то мыслимо единственное оправдание: состояние электрона должно описываться локализованным пакетом, и теория годна только для тех времен, пока этот пакет не слишком расплылся (таким образом, рассеяние фотона на электроне в модели Энца не должно иметь отношения к опыту).

Учитывая вышесказанное, мы будем описывать модель следующим гамильтонианом:

$$H=\frac{\vec{p}^2}{2m_0}+\frac{m_0\kappa_1^2}{2}\vec{r}^2-\frac{e}{m_0}\int k^2dk\frac{2f(k)}{\sqrt{3\pi k}}(\vec{p}\vec{q}_k)+\frac{e^2}{2m_0}[\int k^2dk\frac{2f(k)}{\sqrt{3\pi k}}\vec{q}_k]^2+H^d_{ph}. \quad (14)$$

Из (14) и (11) видно, что H представляется в виде суммы трех коммутирующих гамильтонианов одинакового вида: $H = h_x + h_y + h_z$. Достаточно рассматривать только один из них, назовем его h. Он представляется формулой (14) без векторных стрелок.

В дальнейшем мы используем другие эквивалентные записи h. Сделаем замены $q \to q_k/k$ и $p \to p_k/k$ (и тогда соответственно $a_k \to a_k/k$). Далее,

$$r=-p_1m_0,\quad p=q_1m_0. \quad (15)$$

Получим

$$h=h_e-\int_0^\infty dk\,\epsilon_s(k)(q_1q_k)+\frac{1}{2m_0}[\int_0^\infty dk\,\epsilon_s(k)q_k]^2+\frac{1}{2}\int_0^\infty dk\,k(q_k^2+p_k^2), \quad (16)$$

$$h_e=\frac{m_0}{2}q_1^2+\frac{\kappa_1^2}{2m}p_1^2,\quad \epsilon_s(k)=2ef(k)\sqrt{\frac{k}{3\pi}}, \quad (17)$$

$$[q_k,p_{k'}]=i\delta(k-k'),\quad a_k=(q_k+ip_k)/\sqrt{2}. \quad (18)$$

Если в (16) сделать еще замену $q_k \to q_k\sqrt{k}$ и $p_k \to p_k/\sqrt{k}$, то получим

$$h=h_e-\int_0^\infty dk\,\epsilon_\alpha(k)(q_1q_k)+\frac{1}{2m_0}[\int_0^\infty dk\,\epsilon_\alpha(k)q_k]^2+\frac{1}{2}\int_0^\infty dk(p_k^2+k^2q_k^2), \quad (19)$$

$$\varepsilon_\alpha(k) = 2ef(k)\,\frac{k}{\sqrt{3\pi}}\,. \tag{20}$$

Отметим, что операторы q_k и p_k, фигурирующие в (19), следующим образом связаны с операторами рождения–уничтожения a_k^+, a_k с коммутациями $[a_k, a_{k'}^+] = \delta(k-k')$ и такими, что
$h^d_{ph} = \frac{1}{2}\int dk\, k\,(a_k^+ a_k + a_k a_k^+)$;

$$a_k = (\sqrt{k}\, q_k + i\, p_k/\sqrt{k})/\sqrt{2}\,. \tag{21}$$

С математической точки зрения настоящая модель состоит из континуальной совокупности осцилляторов электромагнитного поля, взаимодействующих с одним дискретным осциллятором (электрон в осцилляторной яме). Квант возбуждения последнего назовем фононом.

2. Физические операторы и диагонализация полного потенциала

Гамильтониан h имеет вид суммы двух квадратичных форм от переменных (q_1, q_k), (p_1, p_k), $0 < k < \infty$. Матрицы этих двух форм могут быть одновременно приведены к диагональному виду одним линейным каноническим преобразованием (т.е. сохраняющим коммутационные соотношения между q и p):

$$q = Q\hat{q}, \quad p = P\hat{p}\,. \tag{22}$$

Эта задача похожа на задачу одновременного приведения двух квадратичных форм к сумме квадратов, но не тождественна ей. Искомое преобразование может быть представлено как произведение преобразований (29), (31), (33) и (43), см. далее.

После этого h приобретет вид

$$h = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\,\omega(\hat{q}_\omega^2 + \hat{p}_\omega^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\,\omega(\hat{a}_\omega^+\hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega\hat{a}_\omega^+)\,. \tag{23}$$

Преобразование (22) будет каноническим, если и для новых операторов будем иметь $[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\,\delta_{\mu-\nu}$. Тогда

$$i\,\delta_{\alpha-\beta} = [q_\alpha, p_\beta] = [Q_{\alpha\mu}\hat{q}_\mu, P_{\beta\nu}\hat{p}_\nu] = i\,Q_{\alpha\mu}P_{\beta\mu} \tag{24}$$

или $QP^T = 1$ в матричном обозначении. Кроме того, Q и P должны быть действительными, чтобы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ были эрмитовыми.

Если бы формы от q и p, из которых состоит h, были одинаковыми, то приведение их к сумме (точнее к интегралу) квадратов можно было бы осуществить одинаковым преобразованием q и p. Равенство $P = (Q^{-1})^T = Q$ означает, что одинаковое преобразование q и p является ортогональным. В этом случае

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}(O\hat{q} + iO\hat{p}) = O\hat{a}, \tag{25}$$

т.е. a выражается только через операторы уничтожения $\hat{a}^+$, но не через $\hat{a}^+$, и наоборот. Поскольку формы в h неодинаковые, см. (16), то $\hat{a}_\omega$ в (23) выражается как через a_k и a_1 (оператор уничтожения фонона), так и через a_k^+, a_1^+. Поэтому вакуумный вектор оператора a_ω, являющийся физическим вакуумом, не совпадает с вакуумным вектором операторов a_k и a_1, и они не являются "физическими".

Гринберг и Швебер /1/ определяли физическое ("одетое") одночастичное состояние как некоторый подходящий собственный вектор полного гамильтониана, см. также /3/.

В случае модели скалярного поля, взаимодействующего со статистическими нуклонами, подходящим для физического однонуклонного состояния можно было бы считать собственный вектор H с тем же барионным числом, что и "голый" нуклон. Для определения физического одномезонного состояния можно было бы использовать наличие подходящего дискретного значения в спектре H (следующего после вакуумного, см./2/).

В нашем случае фонон и фотон не различаются никакими квантовыми числами. Спектр h оказывается чисто непрерывным и не содержит никакого дискретного значения (см. приложение Б), которое можно было бы истолковать как собственную частоту электронного осциллятора, взаимодействующего с полем[x)].

Таким образом, определением Гринберга и Швебера воспользоваться нельзя. Более того, если бы это было возможно, то вследствие стабильности собственных состояний H физический фотон не рассеивался бы на основном состоянии электронного осциллятора. А однократно возбужденный электрон не мог бы высвечиваться в основное состояние.

Попробуем найти операторы, для которых имелись бы основания считать их операторами уничтожения физического фонона $\tilde{\tilde{a}}_1$ и физических фотонов $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, в виде линейной суперпозиции $\hat{a}_\lambda$, см. требование б) во введении.

Линейность, во-первых, оказывается достаточной, и, во-вторых, нелинейное выражение вело бы, вообще говоря, к неканоническим коммутациям для a (не равным c –числу).

Если потребовать, чтобы для $\tilde{\tilde{a}}$ коммутации были каноническими (требование а)), то искомое выражение $\tilde{\tilde{a}}$ через $\hat{a}$ должно быть ортогональным преобразованием см. (25). Поскольку (32) является суммой двух одинаковых форм, а ортогональное преобразование есть одинаковое преобразование q и p, то заключаем, что h через физические операторы $\tilde{\tilde{q}}$ и $\tilde{\tilde{p}}$ должно выражаться в виде суммы двух одинаковых форм, хотя, вообще говоря, и недиагональных.

Перефразируем задачу: надо совершить линейное каноническое преобразование от первоначальных q и p к таким $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$, чтобы h приобрело вид суммы двух одинаковых [illegible] $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ – [illegible] что $\hat{q}$ и $\hat{p}$ с q и p связаны каноническим преобразованием (22)). Далее

---

x) Иначе говоря, в диагонализующих h операторах a_ω настолько тесно переплетены фононный и фотонные операторы, что нет никаких зацепок для того, чтобы назвать a_ω, например, фотонным оператором хоть в каком-нибудь смысле. Аналогичный пример: известно, что гамильтониан двух связанных осцилляторов в так называемых нормальных координатах принимает вид суммы двух независимых свободных осцилляторных гамильтонианов. Каждая из нормальных координат по существу описывает связанную систему в целом и не может быть истолкована как относящаяся лишь к одному осциллятору.

потребуем (в порядке начала осуществления требования минимального отличия от "голых" операторов, см. б)), чтобы операторы $\tilde{\tilde{q}}$ и $\tilde{\tilde{p}}$ состояли из пары операторов $\tilde{\tilde{q}}_1$ и $\tilde{\tilde{p}}_1$ (будущие физические фононные операторы) и континуума операторов. Другими словами, характер спектра собственных частот должен сохраняться. В случае же задачи приведения двух форм к суммам квадратов спектр следует найти, а не оговаривать его заранее.

Искомое преобразование с учетом вышесказанного может быть расписано в следующем общем виде:

$$q_1 = \xi_{11}\tilde{\tilde{q}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \xi_{1\nu}\tilde{\tilde{q}}_\nu, \quad p_1 = \pi_{11}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{1\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu,$$

$$q_k = \xi_{k1}\tilde{\tilde{q}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \xi_{k\nu}\tilde{\tilde{q}}_\nu, \quad p_k = \pi_{k1}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{k\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu. \tag{26}$$

Условия каноничности $QP^T = 1$ при этом имеют вид:

$$\xi_{11}\pi_{11} + \int_0^\infty d\nu\, \xi_{1\nu}\pi_{1\nu} = 1;$$

$$\xi_{11}\pi_{k1} + \int_0^\infty d\nu\, \xi_{1\nu}\pi_{k\nu} = 0; \qquad \pi_{11}\xi_{k1} + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{1\nu}\xi_{k\nu} = 0; \tag{27}$$

$$\xi_{k1}\pi_{k'1} + \int_0^\infty d\nu\, \xi_{k\nu}\pi_{k'\nu} = \delta(k-k').$$

Гамильтониан (19) к виду двух одинаковых форм мы преобразуем в два этапа.

Чтобы сделать формы одинаковыми, прежде всего надо, чтобы появились члены вида $p_1 p_k$. Нужные члены могут появиться как от $p_1^2 = (\pi_{11}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{1\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu)^2$, так и от $p_k^2 = (\pi_{k1}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{k\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu)^2$. Далее заметим, что в (19) отсутствуют произведения $p_k p_{k'}$ с $k \neq k'$.

Это свойство желательно сохранить. Но члены $\tilde{\tilde{p}}_\nu \tilde{\tilde{p}}_{\nu'}$ неизбежно появятся от квадрата последнего члена в $[\pi_{11}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{1\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu]^2$, если $\pi_{1\nu} \neq 0$. От $(\pi_{k1}\tilde{\tilde{p}}_1 + \int_0^\infty d\nu\, \pi_{k\nu}\tilde{\tilde{p}}_\nu)^2$ они не появятся, если $\pi_{k\nu} = \delta(k-\nu)$ Полагая $\pi_{1\nu} = 0$ и $\pi_{k\nu} = \delta(k-\nu)$, из (27) получаем:

$$\xi_{11}\pi_{11} = 1; \quad \xi_{11}\pi_{k1} + \xi_{1k} = 0;$$
$$\pi_{11}\xi_{k1} = 0; \quad \xi_{k1}\pi_{k'1} + \xi_{kk'} = \delta(k-k'). \tag{28}$$

Из первого и третьего соотношений следует, что $\xi_{k1} = 0$ и тогда $\xi_{kk'} = \delta(k-k')$. Вводя обозначения $\xi_{11} \equiv \xi$ и $\xi_{1k} \equiv \xi(k)$, получаем следующее преобразование

$$q_1 = \xi q'_1 + \int_0^\infty dk\, \xi(k) q'_k; \quad p_1 = \frac{1}{\xi} p'_1;$$
$$q_k = q'_k; \quad p_k = -p'_1\, \xi(k)/\xi + p'_k. \tag{29}$$

Вводя его в (19), получаем

$$h = \frac{m_0}{2}\xi^2 q_1'^2 + \Big[\frac{\kappa_1^2}{2m_0\xi^2} + \frac{1}{2\xi^2}\int_0^\infty dk\, \xi^2(k)\Big] p_1'^2 +$$
$$+ \xi\int_0^\infty dk\,[m_0\xi(k) - \epsilon_\alpha(k)]\, q'_1 q'_k - \frac{1}{\xi}\int_0^\infty dk\, \xi(k) p'_1 p'_k + \tag{30}$$
$$+ \frac{1}{2m_0}\Big[\int_0^\infty dk\,(m_0\xi(k) - \epsilon_\alpha(k))\, q'_k\Big]^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty dk\,(p_k'^2 + k^2 q_k'^2).$$

Равенства форм все еще нет ввиду наличия членов типа $q_k q_{k'}$ (предпоследний член в (30)). Известно, что квадратичную форму от q'_k можно привести к сумме квадратов. Если это сделать ортогональным преобразованием, то квадратичная форма от p_k сохранит вид суммы (интеграла) квадратов, поскольку ее матрица единичная. Это преобразование не затрагивает q_1' и p_1' :

$$q_k' = X_{k\nu}\, q_\nu'' \; ; \quad p_k' = X_{k\nu}\, p_\nu'' \; . \tag{31}$$

X найдено в приложении A в виде обобщенной функции, зависящей от еще неизвестной функции $\xi(k)$, точнее, от комбинации $m_0\,\xi(k) - \epsilon_\alpha(k)$ x). После (31) имеем

$$h = \frac{m_0}{2}\,\xi^2\, q_1'^2 + \Big[\frac{\kappa_1^2}{2 m_0 \xi^2} + \frac{1}{2\xi^2}\int dk\, \xi^2(k)\Big]^2 p_1'^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\,(p_\nu''^2 + \nu^2 q_\nu''^2) +$$

$$+ \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\nu\, \xi\,[\, m_0\,\xi(k) - \epsilon_\alpha(k)\,]\, X_{k\nu}\, q_1'\, q_\nu'' - \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\nu\, \frac{1}{\xi}\,\xi(k)\, X_{k\nu}\, p_1'\, p_\nu'' \; . \tag{32}$$

Прежде чем приравнивать коэффициенты при $q_1'\, q_\nu''$ и $p_1'\, p_\nu''$, сравним коэффициенты при $p_\nu''^2$ и $q_\nu''^2$:

$$q_1' = \tilde{\tilde{q}}_1 \; , \quad p_1' = \tilde{\tilde{p}}_1 \; ;$$

$$q_\nu'' = \tilde{\tilde{q}}_\nu / \sqrt{\nu} \; ; \quad p_\nu'' = \tilde{\tilde{p}}_\nu \sqrt{\nu} \; . \tag{33}$$

После этого h будет суммой двух одинаковых форм, если

---

x) Аналогичную задачу решал Ван Кампен (4). Но у него спектр собственных частот k фотонных осцилляторов был дискретным (система заключалась в шар конечного объема). Поэтому он имел дело с рядами там, где у нас фигурируют интегралы. Вследствие этого он смог указать конкретное выражение для X только в случае, когда коэффициент при $q_k\, q_{k'}$ является известной простой функцией k (случай точечного электрона). Энц /10/ работал с непрерывным спектром, однако в его работе аналогичная матрица (обозначаемая через $M_{(1)}$) не была найдена, см. раздел 5 в /6/.

$$\frac{m_0}{0}\xi^2 = \frac{\kappa_1^2}{2m_0\xi^2} + \frac{1}{2\xi^2}\int_0^\infty dk\ \xi^2(k) \equiv \frac{\omega_1}{2};\tag{34}$$

$$\frac{\xi}{\sqrt{\nu}}\int_0^\infty dk\,[m_0\xi(k)-\epsilon_\alpha(k)]\,X_{k\nu} = -\frac{\sqrt{\nu}}{\xi}\int_0^\infty dk\ \xi(k)X_{k\nu}.\tag{35}$$

Через ω_1 обозначена собственная частота электронного осциллятора $\frac{1}{2}\omega_1(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2)$, взаимодействующего с полем. Перепишем (35), введя функцию $a(k) = [m_0\,\xi(k) - \epsilon_\alpha(k)]/\sqrt{m_0}$:

$$\frac{\xi^2}{\nu}\int_0^\infty dk\sqrt{m_0}\,a(k)\,X_{k\nu} = -\frac{1}{\sqrt{m_0}}\int_0^\infty dk\ a(k)\,X_{k\nu} - \frac{1}{m_0}\int_0^\infty dk\,\epsilon_\alpha(k)\,X_{k\nu}\tag{36}$$

Используя последовательно (A.2), (A.6) и определение $\lambda(\nu)$ в (A.5), после ряда выкладок получим

$$a(\nu) = -\frac{\nu\,\epsilon_\alpha(\nu)}{\sqrt{m_0}\,(m_0\xi^2+\nu)} + \frac{\nu}{\sqrt{m_0}(m\,\xi^2+\nu)}\,P\int_0^\infty\frac{dk\,a(k)}{k^2-\nu^2}[a(\nu)\epsilon_\alpha(k) - a(k)\epsilon_\alpha(\nu)].\tag{37}$$

Это нелинейное интегральное уравнение для $a(\nu)$. В дальнейшем предполагается, что в $\epsilon_\alpha(k)$ введено обрезание $f(k) = \mu/\sqrt{\mu^2+k^2}$, см. (20). Можно принять, что $\mu = \sqrt{m_0\kappa}$. , см. раздел 1. Тогда (37) можно решать итерациями, причем нулевое приближение

$$a_0(\nu) = -\frac{\nu\,\epsilon_\alpha(\nu)}{\sqrt{m_0}(m_0\xi^2+\nu)},\quad \xi_0(\nu) = \frac{\xi^2\epsilon_\alpha(\nu)}{m_0\xi^2+\nu}\tag{38}$$

является уже достаточно хорошим. Поправку к (38) оценим потом, а сейчас подставим $\xi_0(\nu)$ в (34):

$$m_0 \xi^4 = \frac{\kappa_1^2}{m_0} + \int_0^\infty dk \, \frac{\xi^4 \, \epsilon_\alpha^2(k)}{(m_0 \xi^2 + k)^2} . \tag{39}$$

Не останавливаясь на задаче нахождения положительного корня ξ^2 (ξ в (29) должно быть действительным) этого трансцендентного уравнения, приведем результат

$$\xi^2 = \frac{\kappa_1}{m_0} (1 + \Lambda), \quad \omega_1 = m_0 \xi^2 = \kappa_1 (1 + \Lambda),$$

$$\Lambda < \frac{e^2}{2} \frac{\mu}{m_0} \left(1 + \frac{e^2}{6} \frac{\mu}{\kappa_1}\right) \ll 1 . \tag{40}$$

Частота ω_1 изменилась по сравнению с κ_1 , и это является единственной "перенормировкой" в настоящей модели.

Теперь можно оценить поправку к $\alpha_0(\nu)$, подставляя $-k\,\epsilon_\alpha(k)/\sqrt{m_0(\omega_1+k)}$ вместо $\alpha(k)$ в правую часть (37). Получается громозкая функция от ν , во всяком случае меньшая, чем $\alpha_0(\nu) \frac{8e^2}{3\pi} \frac{\mu}{m_0} \ll \alpha_0(\nu)$.

Наконец, коэффициент при $\tilde{\tilde{q}}_1 \tilde{\tilde{q}}_\nu$ и $\tilde{\tilde{p}}_1 \tilde{\tilde{p}}_\nu$ равен

$$E(\nu) = \xi \sqrt{\frac{m_0}{\nu}} \int_0^\infty dk \, \alpha(k) \, X_{k\nu} =$$

$$= \xi \sqrt{\frac{m_0}{\nu}} \, \alpha(\nu) \left[\frac{\pi^2 \alpha^4(\nu)}{4\nu^2} + (1 + \pi\lambda(\nu)/2\nu)^2 \right]^{-1/2} = -\sqrt{\frac{\omega_1}{m_0}} \, \frac{\sqrt{\nu}\,\epsilon_\alpha(\nu)}{\omega_1 + \nu} . \tag{41}$$

Использовано (A.2) и (A.8) и выписан только нулевой порядок. Поправки к нему очень малы.

Итак, мы получили следующее выражение гамильтониана через физические операторы:

$$h = \frac{\omega_1}{2} (\tilde{\tilde{p}}_1^2 + \tilde{\tilde{q}}_1^2) + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \, \nu \, (\tilde{\tilde{p}}_\nu^2 + \tilde{\tilde{q}}_\nu^2) + \int_0^\infty d\nu \, E(\nu) [\tilde{\tilde{q}}_1 \tilde{\tilde{q}}_\nu + \tilde{\tilde{p}}_1 \tilde{\tilde{p}}_\nu] . \tag{42}$$

Приведение его к виду (23) ("диагонализация") теперь может быть выполнено ортогональным преобразованием, см. приложение Б.

$$\overset{\approx}{q} = O\,\hat{q}\ ;\quad \overset{\approx}{p} = O\,\hat{p}\ . \tag{43}$$

Несколько замечаний о единственности физических операторов. Прежде всего отметим, что новый оператор $\overset{\approx}{p}_1$ просто пропорционален оператору r, см. (15), (29) и (33). Операторы же q_ν выражаются только через q_k. Покажем, что существуют и другие физические операторы с таким же свойством. Действительно, любое ортогональное преобразование фотонных операторов $\overset{\approx}{q}_\nu$ и $\overset{\approx}{q}_\nu$ тоже приводит к гамильтониану в виде суммы двух одинаковых q – и p – форм.

Отметим еще, что преобразования вида

$$q = Q\,\overset{\approx}{q} + \Xi\,\overset{\approx}{p}\ ,\quad p = \Pi\,\overset{\approx}{q} + P\,\overset{\approx}{p}\ ,$$

конечно, не удовлетворяют требованию минимальности, раз нам удалось решить задачу более простым (неперемешивающим q и p) преобразованием.

3. *Заключение*

Обсудим некоторые качественные следствия новой корпускулярной интерпретации модели.

Если в (42) вместо $\overset{\approx}{q}$ и $\overset{\approx}{p}$ ввести операторы рождения-уничтожения $\overset{\approx}{a}^+$ и $\overset{\approx}{a}$ по формуле (8), то получим

$$h = \frac{\omega_1}{2}(\overset{\approx}{a}{}_1^+\overset{\approx}{a}_1 + \overset{\approx}{a}_1\overset{\approx}{a}{}_1^+) + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\,\nu\,[\overset{\approx}{a}{}_\nu^+\overset{\approx}{a}_\nu + \overset{\approx}{a}_\nu\overset{\approx}{a}{}_\nu^+] + \int_0^\infty d\nu\,E(\nu)\,[\overset{\approx}{a}{}_1^+\overset{\approx}{a}_\nu + \overset{\approx}{a}_1\overset{\approx}{a}{}_\nu^+]\ . \tag{44}$$

Бросается в глаза отсутствие членов $\overset{\approx}{a}{}_1^+\overset{\approx}{a}{}_\nu^+$ и $\overset{\approx}{a}_1\overset{\approx}{a}_\nu$ во взаимодействии. Такое следствие введения физических операторов отмечали для других моделей Гринберг и Швебер /1/. Оно ведет к сохранению оператора $n = \tilde{\tilde{a}}_1^+ \tilde{\tilde{a}}_1 + \int_0^\infty d\nu \; \tilde{\tilde{a}}_\nu^+ \tilde{\tilde{a}}_\nu$:

$$[n, h] = [\tilde{\tilde{a}}_1^+ \tilde{\tilde{a}}_1 + \int_0^\infty d\nu \; \tilde{\tilde{a}}_\nu^+ \tilde{\tilde{a}}_\nu , \int_0^\infty d\nu' E(\nu')(\tilde{\tilde{a}}_1^+ \tilde{\tilde{a}}_{\nu'} + \tilde{\tilde{a}}_1 \tilde{\tilde{a}}_{\nu'}^+)] = 0. \tag{45}$$

Вспоминая, что $H = h_x + h_y + h_z$, можно назвать (45) законом сохранения суммарного числа фотонов и фононов сорта x (или y или z). Он означает, что осциллятор, находящийся в состоянии с энергией $N\omega_1$, не может перейти в состояние $(N+1)\omega_1$ и к тому же испустить фотон. В частности, отсутствует процесс "осциллятор в основном состоянии → возбужденный осциллятор + фотон → осциллятор в основном состоянии", который при "голой" интерпретации приводит к "сдвигу" уровня основного состояния.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (37) в случае отсутствия обрезания, когда $\epsilon_a(k) = 2ek/\sqrt{3\pi}$. Решение его существует, если интеграл в (37) сходится. Для этого $a(k)$ должно убывать на бесконечности (например, как k^{-a} с $a > 0$). Это ведет к тому, что $E(\nu)$ в (42) будет убывать быстрее, чем $1/\sqrt{\nu}$, см. (41). В то же время при "голой" интерпретации коэффициент $\epsilon_s(k)$ при $(q_1 q_k)$ в соответствующей форме гамильтониана (16) ведет себя как $\sqrt{k}$ при больших k . Таким образом, если решение (37) при $f(k) = 1$ существует, то оно будет таким, что сходимость высших порядков теории возмущений при физической корпускулярной интерпретации существенно улучшается. Это следствие введения физических операторов в теорию уже отмечалось для других моделей, см. /7/ и /2/.

Проведенная диагонализация гамильтониана модели означает, что гейзенберговское уравнение для диагонализующих операторов $\hat{a}_\omega = (\hat{q}_\omega + i\hat{p}_\omega)/\sqrt{2}$ и его решение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}_\omega(t) = -i[\hat{a}_\omega, H] = -i\omega\hat{a}_\omega(t) ; \quad \hat{a}_\omega(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}_\omega(0) . \tag{46}$$

Отсюда следует такая зависимость от времени физического гейзенберговского оператора $\tilde{\tilde{a}}_\nu(t)$;

$$\tilde{\tilde{a}}_\nu(t) = O_{\nu\omega}\hat{a}_\omega(t) = O_{\nu\omega}e^{-i\omega t}O_{\nu'\omega}\tilde{\tilde{a}}_{\nu'}(0). \qquad (47)$$

(Использовано (25) и обратное преобразование $\hat{a}(0) = O^T\tilde{\tilde{a}}(0)$). В (47) свертка по ω означает интеграл $\int_0^\infty d\omega$, а свертка по ν' означает $O_{1\omega}\tilde{\tilde{a}}_1 + \int_0^\infty d\nu' \, O_{\nu'\omega}\tilde{\tilde{a}}_{\nu'}$. Такой же оператор эволюции $U_{\nu\nu'}(t) = O_{\nu\omega}\exp(-i\omega t)O_{\nu'\omega}$ появляется в шредингеровской картине при выражении вектора состояния в момент t через начальный вектор .

Приложение А

Приведение формы $\int_0^\infty dk\, k^2 q_k^2 + \left(\int_0^\infty dk\ \alpha(k)\, q_k\right)^2$ *к "сумме квадратов" ортогональным преобразованием*

Пусть F обозначает "матрицу" формы, ее элементы нумеруются непрерывным индексом k . Задача сводится к нахождению такого ортогонального преобразования X , что $X^T F X$ будет диагональной "матрицей" D . Обозначим ее диагональные элементы через ν^2 . Тогда $FX = XD$ расписывается так:

$$k^2 X_{k\nu} + \alpha(k)\int_0^\infty dk'\alpha(k')X_{k'\nu} = X_{k\nu}\nu^2 . \qquad (A.1)$$

Столбцы X занумерованы возможными значениями ν , которые еще надо найти. Введем обозначение

$$\beta(\nu) = \int_0^\infty dk'\alpha(k')X_{k'\nu} . \qquad (A.2)$$

Если ν^2 отрицательное или комплексное, то $X_{k\nu} = \alpha(k)\beta(\nu)(\nu^2 - k^2)$. Подставляя это в (A.2), получим

$$\beta(\nu)\left[1-\int_0^\infty dk' \frac{\alpha^2(k')}{\nu^2-k'^2}\right]=0. \tag{A.3}$$

У нас $\alpha(k)=[m_0\xi(k)-\epsilon_\alpha(k)]/\sqrt{m_0}$ является действительным (действительность $\xi(k)$ следует из требуемой действительности преобразования (29)). Если $\nu^2<0$, то квадратная скобка в (А.3) есть существенно положительная величина. Если $\nu=a+ib$, то мнимая часть квадратной скобки $ib\int_0^\infty dk \frac{\alpha^2(k)}{(a-k)^2+b^2}$ не равна нулю при любых a и $b\neq 0$. Поэтому при обсуждаемых значениях ν^2 из (А.3) следует, что $\beta(\nu)=0$. Это значит, что соответствующие столбцы $X_{k\nu}$ являются нулевыми и спектр состоит только из действительных значений ν. Для таких ν можно проверить, что

$$X_{k\nu}=P\frac{\alpha(k)\beta(\nu)}{\nu^2-k^2}+C(k)\delta(\nu^2-k^2) \tag{A.4}$$

является решением (А.1) при любом $C(k)$. Символ главного значения P означает, что точка $\nu^2=k^2$ исключается. Рассмотрим сначала случай $0<\nu<\infty$. Подставляя (А.4) в (А.2), получаем тогда

$$\frac{C(\nu)}{2\nu}=\frac{\beta(\nu)}{\alpha(\nu)}\left[1+\frac{\pi}{2\nu}\lambda(\nu)\right], \qquad \lambda(\nu)=\frac{2\nu}{\pi}P\int_0^\infty dk\frac{\alpha^2(k)}{k^2-\nu^2}, \tag{A.5}$$

$$X_{k\nu}=\beta(\nu)\left\{P\frac{\alpha(k)}{\nu^2-k^2}+\frac{1+\pi\lambda(\nu)/2\nu}{\alpha(\nu)}\delta(k-\nu)\right\}. \tag{A.6}$$

Функция $\beta(\nu)$ теперь может быть найдена из условия ортонормировки $X^T X=1$ или

$$\int_0^\infty dk\ X_{k\nu'}X_{k\nu''}=\delta(\nu'-\nu''). \tag{A.7}$$

Замечательно, что левая часть (А.7) с помощью формулы (В.2) может быть вычислена для произвольных $a(k)$. Она оказывается пропорциональной $\delta(\nu'-\nu'')$ (т.е. ортогональность действительно имеет место) и окончательно из (А.7) получаем

$$\beta^2(\nu) = \left\{ \frac{\pi^2}{4\nu^2} a^2(\nu) + \left[1 + \frac{\pi\lambda(\nu)}{2\nu} \right]^2 / a^2(\nu) \right\}^{-1}. \tag{А.8}$$

Случай $-\infty < \nu < 0$, когда X содержит $\delta(k+\nu)$, рассматривается совершенно так же. Однако, хотя столбцы с отрицательными ν ортогональны между собой, они не ортогональны столбцам с положительным ν. Действительно,

$$\int_0^\infty dk\, X_{k\nu-} X_{k\nu+} \neq 0$$

из-за появления $\delta(\nu_+ + \nu_-) = \delta(\nu_+ - |\nu_-|)$, не равной нулю при $|\nu_-| = \nu_+$. Это означает, что $X_{k\nu_-}$ не являются независимыми, они могут быть разложены по (А.6). Поэтому они не должны использоваться для построения X. Таким образом, ν могут быть только положительными. Все столбцы с $\nu > 0$ взаимно ортогональны, допустимо любое значение $\nu > 0$. Другими словами, спектр ν непрерывен и простирается от 0 до ∞.

Приложение Б

Диагонализация гамильтониана

Задача состоит в приведении формы

$$F(x) = \omega_1 x_1^2 + \int_0^\infty d\nu\, \nu\, x_\nu^2 + \int_0^\infty d\nu\, E(\nu)[x_1 x_\nu + x_\nu x_1] = x^T F x \tag{Б.1}$$

с "матрицей" $F = \left(\begin{array}{c|c} \omega_1 & E(\nu') \\ \hline E(\nu) & \nu\delta(\nu'-\nu') \end{array} \right)$ к "сумме квадратов" ортогональным преобразованием O. Обозначая диагональные элементы диагональной матрицы $D = O^T F O$ буквой ω, основное уравнение $FO = OD$ распишем в виде:

$$\omega_1 O_{1\omega} + \int_0^\infty d\nu' E(\nu') O_{\nu'\omega} = O_{1\omega}\, \omega , \qquad (\text{Б.2})$$

$$E(\nu) O_{1\omega} + \int_0^\infty d\nu' \nu \delta(\nu - \nu') O_{\nu'\omega} = O_{\nu\omega}\omega \quad \text{или} \quad (\omega - \nu) O_{\nu\omega} = E(\nu) O_{1\omega} . \qquad (\text{Б.3})$$

Если ω отрицательное или комплексное, то решение (Б.3) имеет вид $O_{\nu\omega} = E(\nu) O_{1\omega} / (\omega - \nu)$. Подставляя его в (Б.2), получаем

$$O_{1\omega}[\omega_1 - \omega + \int_0^\infty d\nu \frac{E^2(\nu)}{\omega - \nu}] = 0 . \qquad (\text{Б.4})$$

При $\omega < 0$ квадратная скобка больше нуля: хотя интеграл и является отрицательным, можно показать, что он много меньше ω_1. Если $\omega = a + i\, b$, то мнимая часть этой скобки

$$i b (-1 - \int_0^\infty d\nu \frac{E^2(\nu)}{(a - \nu)^2 + b^2})$$

при $b \neq 0$ не равна нулю. Поэтому из (Б.4) следует, что $O_{1\omega} = 0$. Поскольку $O_{\nu\omega} \approx O_{1\omega}$, то столбцы O, соответствующие обсуждаемым значениям ω, являются нулевыми и ω могут быть только положительными. При $\omega > 0$

$$O_{\nu\omega} = O_{1\omega} P \frac{E(\nu)}{\omega - \nu} + C(\omega) \delta(\omega - \nu) . \qquad (\text{Б.5})$$

Подставляя (Б.5) в (Б.2), получаем

$$O_{1\omega}[\omega - \omega_1 - P \int_0^\infty d\nu \frac{E^2(\omega)}{\omega - \nu}] = C(\omega) E(\omega) . \qquad (\text{Б.6})$$

Вместо того чтобы выразить $C(\omega)$ через $O_{1\omega}$, мы выразим $C(\omega)$ и $O_{1\omega}$ через одну произвольную пока функцию $g(\omega)$ так, чтобы (Б.6) удовлетворялось:

$$O_{1\omega}=E(\omega)\,g(\omega)\;;\;C(\omega)=[\,\omega-\omega_1+\pi\lambda(\omega)]\,g(\omega), \tag{Б.7}$$

$$\lambda(\omega)=\frac{1}{\pi}\,P\int_0^\infty d\nu\,\frac{E^2(\nu)}{\nu-\omega}. \tag{Б.8}$$

Итак, мы получили

$$O_{1\omega}=g(\omega)\,E(\omega),$$

$$O_{\nu\omega}=g(\omega)\{\,P\,\frac{E(\nu)\,E(\omega)}{\omega-\nu}+[\,\omega-\omega_1+\pi\lambda(\omega)]\,\delta(\omega-\nu)\,\}. \tag{Б.9}$$

Из условия $O^TO=1$, пользуясь (В.3), получим

$$f(\omega)=\{\,\pi^2\,E^2(\omega)+[\,\omega-\omega_1+\pi\lambda(\omega)]^2\,\}^{-1/2}.$$

Столбцы, соответствующие всем положительным ω, ортогональны и, следовательно, независимы. Поэтому все они должны входить в матрицу O, чтобы выполнялось условие полноты $OO^T=1$.

При любом ω они нормируются на δ-функцию и поэтому у F нет ни одного дискретного собственного значения. Рассмотрим, например, значение ω, обращающее в нуль квадратную скобку в (Б.6). Обозначим его через ω'. В этом случае $C(\omega')=0$ и получается такой столбец:

$$\{\,O_{1\omega'},\,O_{1\omega'}\,P\,\frac{E(\nu)}{\omega'-\nu}\,\}. \tag{Б.10}$$

Его норма бесконечна

$$O^2_{1\omega'}[\,1 + P\int_0^{\infty} \frac{E^2(\nu)}{(\omega' - \nu)^2}\, d\nu\,] = \infty\ , \tag{Б.11}$$

(точнее, интеграл в (Б.11) не существует) и этот столбец может существовать лишь в составе непрерывного спектра.

При $e^2 = 0$ форма (Б.1) уже имеет вид суммы квадратов и видно, что у F есть одно дискретное значение ω_1. Как оно появляется из наших уравнений (Б.2) и (Б.3)? Последнее принимает вид $(\omega - \nu)O_{\nu\omega} = 0$ с решением $O_{\nu\omega} = C(\omega)\,\delta(\omega - \nu)$, годным при <u>всех ω</u>. Уравнение (Б.2) имеет вид $(\omega - \omega_1)O_{1\omega} = 0$, откуда следует, что $O_{1\omega} = 0$ при $\omega \neq \omega_1$. Значение $\omega = \omega_1$ оказывается своеобразно вырожденным: допустимо как $O_{1\omega_1} \neq 0$, так и $O_{1\omega_1} = 0$. Два соответствующие столбца

$$\{\,O_{1\omega_1},\, C\,\delta(\omega_1 - \nu)\,\}\ ;\ \ \{\,0,\, C\,\delta(\omega_1 - \nu)\,\} \tag{Б.12}$$

оказываются неортогональными, как это обычно бывает в случае вырождения, но их разность, столбец $\{\,O_{1\omega_1},\, 0\,\}$, ортогонален не только ко второму столбцу в (Б.12), но и ко всем остальным $\{\,0,\ C(\omega)\,\delta(\omega - \nu)\,\}$ с $\omega \neq \omega_1$. Он может быть нормирован на единицу. Это как раз столбец (Б.10) в случае $E(\nu) = 0$. Таким образом, дискретное значение ω отсутствует при любом сколь угодно малом $e^2 \neq 0$ и скачком появляется при $e^2 = 0$.

Приложение В

Вычисление некоторых интегралов

1. Вычисление интеграла

$$I(\nu_1, \nu_2) = PP\int_0^{\infty} dk\ \frac{a^2(k)}{(k^2 - \nu_1^2)(k^2 - \nu_2^2)}$$

в случае положительных ν_1 и ν_2 .

$$I(\nu_1,\nu_2)=\int_0^\infty dk\, a^2(k)\left[\frac{1}{k^2-\nu_1^2-i\epsilon_1}-i\pi\delta(k^2-\nu_1^2)\right]\left[\frac{1}{k^2-\nu_2^2+i\epsilon_2}+i\pi\delta(k^2-\nu_2^2)\right]=$$

$$=\int_0^\infty dk\,\frac{a^2(k)}{\nu_1^2-\nu_2^2+i(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left[\frac{1}{k^2-\nu_1^2-i\epsilon_1}-\frac{1}{k^2-\nu_2^2+i\epsilon_2}\right]+$$

$$+\frac{i\pi}{2\nu_2}\,\frac{a^2(\nu_2)}{\nu_2^2-\nu_1^2-i\epsilon_1}-\frac{i\pi}{2\nu_1}\,\frac{a^2(\nu_1)}{\nu_1^2-\nu_2^2+i\epsilon_2}+\frac{\pi^2a^2(\nu_1)}{4\nu_1\nu_2}\,\delta(\nu_1-\nu_2)\ .$$

Полученные интегралы можно свести к функциям $\lambda(\nu)$, см. (А.5):

$$\int_0^\infty dk\,\frac{a^2(k)}{k^2-\nu^2\pm i\epsilon}=\int_0^\infty dk\,a^2(k)\left\{P\frac{1}{k^2-\nu^2}\mp i\pi\delta(k^2-\nu^2)\right\}=\frac{\pi}{2\nu}\,\lambda(\nu)\mp i\pi\,\frac{a^2(\nu)}{2\nu}\ . \qquad (B.1)$$

С помощью (В.1) получаем

$$I(\nu_1,\nu_2)=\frac{\pi^2a^2(\nu_1)}{4\nu_1^2}\,\delta(\nu_1-\nu_2)+\frac{\pi}{2}\,\frac{\lambda(\nu_1)/\nu_1-\lambda(\nu_2)/\nu_2}{\nu_1^2-\nu_2^2}\ . \qquad (B.2)$$

Использован тот факт, что разность $[\nu_1^2-\nu_2^2+i(\epsilon_1+\epsilon_2)]^{-1}-[\nu_1^2-\nu_2^2+i\epsilon_1]^{-1}$ стремится в нулю при ϵ_1 и $\epsilon_2\to 0$. В знаменателе последнего члена в (В.2) опущено $i(\epsilon_1+\epsilon_2)$, поскольку и числитель этого члена стремится к нулю при $\nu_1\to\nu_2$. Если $a(k)=\mathrm{Const}$, то $\lambda=0$ и (В.2) дает представление δ -функции.

2. Точно таким же образом показывается, что

$$PP\int_0^\infty d\nu\,\frac{E^2(\nu)}{(\nu-\omega')(\nu-\omega'')}=\pi^2E^2(\omega')\,\delta(\omega'-\omega'')+\pi\,\frac{\lambda(\omega')-\lambda(\omega'')}{\omega'-\omega''}\ . \qquad (B.3)$$

Здесь λ определена соотношением (Б.8).

Литература

1. O.W.Greenberg, S.S.Schweber. Nuovo Cim., 8, 378, 1958.
2. М.И.Широков. Ядерная физика. 6, 1277, 1967.
3. W.R.Frazer, L.Van Hove. Physica 24, 137, 1958.
4. N.G. van Kampen. Dan. Mat. Fys. Medd. 26, N15, 1951.
5. М.Роуз. Поля мультиполей. ИЛ Москва, 1957.
6. C.P.Enz. Suppl. Nuovo Cim., 3, N3, 363, 1956.
7. Th. W.Ruijgrok Physica 24, 211, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1968 года.