3902

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3902

Р.М.Мурадян

ЛЕКЦИИ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3902

Р.М.Мурадян

ЛЕКЦИИ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Введение

В настоящих лекциях элементарно и кратко изложены некоторые основные положения релятивистской кинематики. Под релятивистской кинематикой подразумевается совокупность принципов и соотношений, вытекающих из свойств симметрии пространства-времени. Эти свойства симметрии описываются неоднородной группой Лоренца. Мы ограничимся рассмотрением собственной неоднородной группы Лоренца, т.е. без включения пространственно-временных отражений. Все наблюдавшиеся до сих пор взаимодействия оказались инвариантными относительно преобразований из этой группы. Это означает, что волновые функции элементарных частиц должны обладать определенными трасформационными свойствами при групповых преобразованиях, т.е. преобразовываться по некоторым представлениям неоднородной группы Лоренца.

Фундаментальные принципы, лежащие в основе релятивистской кинематики, были разработаны в классических работах/I/. Значительное упрощение в рассматриваемый круг вопросов внесла замечательная работа Якоба и Вика/2/, в которой показано, что при описании частиц с произвольным спином удобным квантовым числом является проекция спина на направление импульса, названная ими спиральностью (helicity). Так как проекция орбитального момента на направление импульса равна нулю, то спиральность в то же время является проекцией полного углового момента на направление импульса. Такое рассмотрение приводит к формулам, которые по форме почти не отличаются от соответствующих формул для бесспиновых частиц. При этом вместо полиномов Лежандра появляются несколько более сложные $\mathcal{D}$-функции, являющиеся их естественным обобщением. Для ознакомления с элементарными свойствами $\mathcal{D}$-функций, помимо широко известных монографий Роуза и Эдмондса, мы рекомендуем монографию Бринка и Сетчлера/I4/. Изучению свойств спиральных состояний посвящена часть I настоящего обзора. В частности здесь подробно рассмотрены трасформационные свойства спиральных состояний при лоренцевских преобразованиях и специальное внимание уделено определению углов "вигнеровского вращения". Во II части рассматриваются матричные элементы оператора тока – векторного, аксиального, тензорного и т.д. между одночастичными состояниями в различных лоренцевских системах. В частности , подробно рассмотрен переход из системы с бесконечным импульсом $P=\infty$ в систему Брейта. Обсуждение аналогичных вопросов проводится в лекциях В.П. Шелеста/4/. Часть Ш посвящена изучению двух- и трехчастичных состояний и основана на результатах работ Якоба и Вика/5/.

I. НЕОДНОРОДНАЯ ГРУППА ЛОРЕНЦА И ЕЁ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В квантовой механике физическое состояние описывается вектором в гильбертовом пространстве. Пусть Ψ_L – вектор состояния частицы в лоренцевской системе L, $\Psi_{L'}$ – тот же вектор в системе L', а G – преобразование Лоренца, переводящее систему L в L'. Требование сохранения вероятности накладывает условие:

$$|\langle\Psi_L,\Psi_L\rangle|^2 = |\langle\Psi_{L'},\Psi_{L'}\rangle|^2.$$

Для того, чтобы оно выполнялось, достаточно каждому G сопоставить унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, такой, что

$$\Psi_{L'} = \mathcal{G}\Psi_L .$$

При помощи этого оператора можно сконструировать волновую функцию (вектор состояния) частицы в произвольной лоренцевской системе, исходя из волновой функции, заданной в определенной системе (например, в системе покоя). Таким образом, для полного описания возможных состояний достаточно знать вектор состояния в какой-либо системе и коэффициенты преобразования $\mathcal{G}$. Другими словами, необходимо уметь находить унитарные представления неоднородной группы Лоренца.

I. Коммутационные соотношения.

Одним из следствий изотропности и однородности пространства-времени является тот факт, что квадратичная форма

$$(t-t')^2-(\vec{x}-\vec{x}')^2$$

должна оставаться инвариантной при четырехмерных псевдоэвклидовых вращениях и четырехмерных трансляциях. Вращения определяются 6 - параметрической псевдоортогональной группой $O(1,3)$ с генераторами $J^{\mu\nu}=-J^{\nu\mu}$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}+g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}\right). \qquad (I)$$

Этим соотношением задается алгебра Ли однородной группы Лоренца. Трансляции образуют 4-параметрическую абелеву (т.е. коммутативную) группу T_4 с генераторами P^μ, удовлетворяющими соотношению

$$[P^\mu,P^\nu]=0, \qquad (2)$$

Коммутационное соотношение между $J^{\mu\nu}$ и P^μ имеет вид

$$[J^{\mu\nu},P^\rho]=i(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu). \qquad (3)$$

Соотношения (I), (2) и (3) определяют алгебру Ли 10-параметрической неоднородной группы Лоренца (или группы Пуанкаре), являющейся полупрямым произведением однородной группы Лоренца на группу трасляций T_4 :

$$\mathcal{L}_{неодн.} = \mathcal{L}_{одн.}\cdot T_4 \equiv O(1,3)\cdot T_4 .$$

Вместо шести генераторов $J^{\mu\nu}$ удобнее иметь дело с тремя генераторами $\vec{J}=\{J_1,J_2,J_3\}$ пространственных вращений вокруг трех координатных осей и с тремя генераторами $\vec{K}=\{K_1,K_2,K_3\}$ чисто лоренцевских преобразований вдоль координатных осей:

$$J_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{jk},$$

$$K_i = J^{0i},$$

или

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ J^{10} & 0 & J^{12} & J^{13} \\ J^{20} & J^{21} & 0 & J^{23} \\ J^{30} & J^{31} & J^{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из коммутационных соотношений для $J^{\mu\nu}$ и P^μ, можно выписать коммутационные соотношения для генераторов в трехмерных обозначениях $\vec{J}$, $\vec{K}$, $\vec{P}$ и P_0. Приведем их, сопроводив некоторыми замечаниями физического характера:

$$[J_i,J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k$$

$\vec{J}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям для операторов углового момента.

$$[J_i,K_j]=i\varepsilon_{ijk}K_k$$

$$[J_i,P_j]=i\varepsilon_{ijk}P_k$$

$\vec{K}$ и $\vec{P}$ при пространственных вращениях преобразуются как векторные операторы. Подчеркнем, что вращения вдоль i -ой оси коммутируют с чисто лоренцевскими преобразованиями и сдвигами вдоль этой же оси.

$$[J_i,P_0]=0$$

P_0 при пространственных вращениях ведет себя как скалярный оператор.

$$[K_i,K_j]=-i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Чистые преобразования Лоренца коммутируют друг с другом, если они направлены вдоль одной и той же оси $i=j$. Если $i\neq j$, то важен порядок преобразований. Отсюда, в частности, видно, что чистые преобразования Лоренца образуют группу только тогда, когда они направлены вдоль одной и той же оси.

$$[K_i,P_j]=iP_0\delta_{ij}$$

$$[K_i,P_0]=-iP_i$$

Чистые преобразования Лоренца не коммутируют с временными сдвигами и с пространственными сдвигами вдоль той же оси и коммутируют с пространственными сдвигами в перпендикулярных направлениях.

2. Операторы Казимира

Определим следующий четырехмерный псевдовектор :

$$W_\mu = \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, J^{\nu\rho} P^\sigma .$$

Из коммутационных соотношений (I), (2) и (3) следует, что величины $P^2 = P_\mu P^\mu$ и $W^2 = W^\mu W_\mu$ коммутируют со всеми генераторами и друг с другом, и поэтому характеризуют неприводимое представление (операторы Казимира). Состояния частицы могут быть классифицированы при помощи собственных значений операторов $P^2 = m^2$ и $m^2 s(s+1)$, имеющих смысл квадрата массы и спина соответственно. Эти значения проще получить с ситеме покоя $\vec{p}=0$.

3. Неприводимые представления и состояния с определенной спиральностью

Так как операторы P^μ коммутируют друг с другом (а также с P^2 и W^2) , базисные состояния могут быть выбраны как собственные состояния четырехимпульса. В системе покоя одна из компонент $\vec{J}$, например J_3 , также может входить в набор наблюдаемых, так как в этой системе собственные значения операторов P_i равны нулю, а с отличной от нуля P_0 компонентой J_3 коммутирует. Собственное значение оператора J_3 продолжает оставаться хорошим квантовым числом и в том случае, если отлична от нуля только третья компонента импульса, так как $[J_3, P_3]=0$. Однако, если собственные значения операторов P_1 и P_2 отличны от нуля, J_3 уже не может входить в полный набор, так как коммутаторы $[J_3, P_1]$ и $[J_3, P_2]$ отличны от нуля. Однако оператор $\vec{J}\cdot\vec{P}$ коммутирует со всеми P_μ :

$$[\vec{J}\cdot\vec{P}, P_j] = [J_i, P_j]P_i = i\varepsilon_{ijk} P_i P_k = 0 ,$$
$$[\vec{J}\cdot\vec{P}, P_0] = [J_i, P_0]P_i = 0 ,$$

и поэтому его собственные значения могут быть включены в полный набор наблюдаемых при произвольных значениях импульса. Собственные значения оператора $\frac{\vec{J}\vec{P}}{|\vec{P}|}$ характеризуют величину проекции спина частицы на направление его импульса (так как проекция орбитального момента на импульс равна нулю) и называются спиральностью (*helicity*). Собственное значение этого оператора обозначается через λ. Выпишем полный набор коммутирующих операторов с соответствующими им собственными значениями :

$$\begin{aligned}
&P^2\Psi = m\Psi , && m^2>0 ;\\
&W^2\Psi = m^2 s(s+1)\Psi , && s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots ;\\
&P_\mu\Psi = p_\mu\Psi , && p_0 \geq m > 0 ;\\
&\frac{\vec{J}\vec{P}}{|\vec{P}|}\Psi = \lambda\Psi , && -s < \lambda < s .
\end{aligned}$$

Таким образом, состояние частицы может быть задано кет-вектором:

$$|m, s; \vec{p}, \lambda\rangle$$

Здесь m и s характеризуют представление, а $\vec{p}$ и λ определяют состояние внутри данного представления. Зависимость от p_0 явно не указана, так как её можно определить из соотношения $p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$. Якоб и Вик показали, что состояния $|m, s; \vec{p}, \lambda\rangle$ могут быть сконструированы, исходя из состояний $|m, s; 0, \lambda\rangle$, заданных в системе покоя частицы $\vec{p}=0$. Введем для вектора состояния в системе покоя обозначение $|m, s; 0, \lambda\rangle \equiv |s, \lambda\rangle$. Как уже было отмечено выше, в системе покоя в полный набор коммутирующих операторов входят операторы $\vec{J}^2$ и J_3 с собственными значениями $s(s+1)$ и λ соответственно:

$$\vec{J}^2 |s, \lambda\rangle = s(s+1)\,|s, \lambda\rangle ,$$
$$J_3\,|s, \lambda\rangle = \lambda\,|s, \lambda\rangle .$$

Состояния $|s, \lambda\rangle$ ортонормированы :

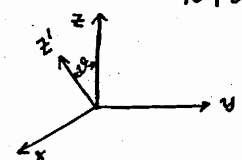
$$\langle s', \lambda' | s, \lambda\rangle = \delta_{ss'}\,\delta_{\lambda\lambda'} ,$$

образуют полный набор в системе покоя частицы:

$$\sum_\lambda |s, \lambda\rangle\langle s, \lambda| = 1$$

и поэтому могут служить основой для конструирования волновой функции частицы в произвольной лоренцевской системе.

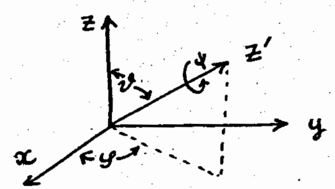
Прежде чем перейти к этому построению, предварительно получим формулу для преобразования волновой функции $|s, \lambda\rangle$ при изменении оси квантования. Пусть новая ось квантования z' повернута относительно старой оси z на угол ϑ и лежит в плоскости zx . Тогда новое состояние $R|s, \lambda\rangle$ получается из старого состояния $|s, \lambda\rangle$ при помощи оператора $R = e^{-i\vartheta J_2}$ вращения вокруг оси y на угол ϑ :



$$\begin{aligned}
R\,|s, \lambda\rangle &= \sum_{\lambda'} |s, \lambda'\rangle\langle s, \lambda'| R |s, \lambda\rangle = \\
&= \sum_{\lambda'} |s, \lambda'\rangle\langle s, \lambda'| e^{-i\vartheta J_2} |s, \lambda\rangle = \\
&= \sum_{\lambda'} |s, \lambda'\rangle\, d^{\,s}_{\lambda'\lambda}(\vartheta) .
\end{aligned}$$

Здесь через $d^{\,s}_{\lambda'\lambda}(\vartheta)$ обозначен матричный элемент оператора $e^{-i\vartheta J_2} = \langle s\lambda' | e^{-i\vartheta J_2} | s\lambda\rangle$. Рассмотрим теперь общий случай, когда новая система координат повернута относительно старой на углы Эйлера φ , ϑ , ψ . Тогда вращение описывается при помощи оператора $R(\varphi, \vartheta, \psi) =$

$$= e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\psi J_3}$$



и закон преобразования волновой функции частицы в системе покоя следующий:

$$R(\varphi,\theta,\psi)\,|s,\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} |s,\lambda'\rangle\langle s,\lambda'|\, e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\psi J_3}\,|s,\lambda\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda'} |s,\lambda'\rangle\, e^{-i\lambda'\varphi}\langle s,\lambda'|\, e^{-i\vartheta J_2}|s,\lambda\rangle\, e^{-i\lambda\psi} =$$

$$= \sum_{\lambda'} |s,\lambda'\rangle\, e^{-i\lambda'\varphi}\, d^{s}_{\lambda'\lambda}(\vartheta)\, e^{-i\lambda\psi} =$$

$$= \sum_{\lambda'} |s,\lambda'\rangle\, D^{s}_{\lambda'\lambda}(\varphi,\vartheta,\psi)\,.$$

Приступим к построению состояний $|m,s;\vec p,\lambda\rangle$. Эти состояния должны быть собственными функциями операторов импульса и спиральности с соответствующими собственными значениями:

$$\vec P\,|m,s;\vec p,\lambda\rangle = \vec p\,|m,s;\vec p,\lambda\rangle\,,$$

$$P_0\,|m,s;\vec p\,\lambda\rangle = \sqrt{m^2+\vec p^{\,2}}\,|m,s;\vec p,\lambda\rangle\,,$$

$$\frac{\vec J\cdot\vec P}{|\vec p|}\,|m,s;\vec p\,\lambda\rangle = \lambda\,|m,s;\vec p,\lambda\rangle\,,$$

и могут быть построены из состояний $|s,\lambda\rangle$ следующим образом:

1. Применением преобразования Лоренца $e^{-i\alpha K_3}$ вдоль положительного направления оси z со скоростью $th\,\alpha = \dfrac{|\vec p|}{p_0}$:

$$e^{-i\alpha K_3}\,|s,\lambda\rangle\,.$$

При этом состояние $|s,\lambda\rangle$ переходит в состояние с тем же значением спиральности λ с импульсом $|\vec p| = m\,sh\,\alpha$, направленным вдоль оси z и с энергией $p_0 = m\,ch\,\alpha$. В этом легко убедиться, вычисляя собственные значения операторов J_3, $\vec P$ и P_0. В обозначениях $|\vec p,\lambda\rangle = |p_x,p_y,p_z,\lambda\rangle$ полученное состояние запишется так:

$$e^{-i\alpha K_3}\,|s,\lambda\rangle = |0,0,|\vec p|,\lambda\rangle\,.$$

2. Далее, чтобы получить состояние $|\vec p,\lambda\rangle$, необходимо совершить поворот $R(\varphi,\vartheta,\psi) = e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\psi J_3}$, определяемый углами Эйлера φ, ϑ, ψ, где φ и ϑ – полярный и азимутальный углы вектора $\vec p$, а третий угол Эйлера ψ может быть выбран по нашему желанию, так как разные выборы угла ψ приводят лишь к изменению фазы волновой функции на $e^{-i\lambda\psi}$. Иногда полагают $\psi=-\varphi$ или $\psi=0$. Мы будем придерживаться последнего условия, как более простого. Учитывая это, определим состояние $|\vec p,\lambda\rangle$ для частицы с импульсом $\vec p$ и спиральностью λ следующим образом:

$$|\vec p,\lambda\rangle = R(\varphi,\vartheta,0)\,|0,0,|\vec p|,\lambda\rangle =$$

$$= R(\varphi,\vartheta,0)\, e^{-i\alpha K_3}\,|s,\lambda\rangle =$$

$$= e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\alpha K_3}\,|s,\lambda\rangle \equiv \mathcal{H}(\vec p)\,|s,\lambda\rangle\,.$$

Можно проверить, что сконструированное состояние является собственной функцией операторов $\vec P, P_0$ и $\dfrac{\vec J\vec P}{|\vec p|}$ с собственными значениями, указанными выше. Для удобства в дальнейшем введено обозначение:

$$\mathcal{H}(\vec p) = e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\alpha K_3}\,.$$

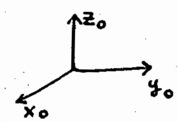
4. Трансформационные свойства спиральных состояний при лоренцевских преобразованиях.

Рассмотрим преобразование Лоренца G, переводящее вектор $\vec p$ в $g\vec p$ и попробуем найти закон преобразования волновой функции $|\vec p,\lambda\rangle$ при действии на неё оператора G. Наряду с G, введем в рассмотрение преобразования Лоренца $\mathcal{H}(\vec p)$ и $\mathcal{H}(\vec p\,')$, переводящие частицу из состояния покоя в состояние с импульсом $\vec p$ и $g\vec p\,''$ соответственно. Ясно, что преобразование $\mathcal{H}^{-1}(g\vec p)$ переводит частицу из состояния с импульсом $g\vec p$ в состояние покоя. Три последовательных преобразованиях $\mathcal{H}^{-1}(g\vec p)G\mathcal{H}(\vec p)$ переводят покоящуюся частицу в покоящуюся же и поэтому соответствуют чисто пространственному вращению

$$\mathcal{H}^{-1}(g\vec p)\,G\,\mathcal{H}(\vec p) = R_G\,. \qquad (*)$$

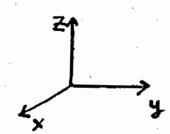
Вращение R_G характеризует относительную ориентацию осей первоначальной и конечной систем покоя ("вигнеровское вращение"). Поясним подробнее смысл равенства $(*)$. Для этого рассмотрим четыре системы: Σ_0, Σ, Σ' и Σ_0'.

Система Σ_0.



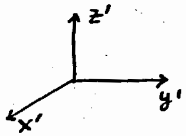
Это первоначальная система покоя частицы.
$|s,\lambda\rangle$ – волновая функция частицы в этой системе,
λ – проекция спина на ось.

Система Σ.



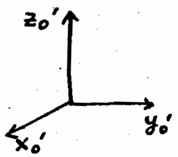
Получается из Σ_0 преобразованием Лоренца $\mathcal{H}(\vec p) = e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}\, e^{-i\alpha K_3}$, которое состоит из чисто лоренцевского преобразования вдоль оси z_0 со скоростью $v = th\,\alpha = \dfrac{|\vec p|}{\sqrt{m^2+\vec p^{\,2}}}$ и вращения $R(\varphi,\vartheta,0) = e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\vartheta J_2}$, где φ, ϑ – углы импульса $\vec p$. Волновая функция частицы в этой системе $|\vec{p},\lambda\rangle = \mathcal{H}(\vec{p})\,|s,\lambda\rangle$.

Система Σ'.



Получается из Σ преобразованием Лоренца G . В этой системе частица имеет импульс $g\vec{p}$ и волновую функцию $G|\vec{p},\lambda\rangle$. Явный вид этой волновой функции получен ниже.

Система Σ_0'.



Конечная система покоя частицы. Получается из системы Σ' при помощи преобразования $\mathcal{H}^{-1}(g\vec{p})$. $|s,\lambda'\rangle$ – волновая функция частицы в этой системе, λ' –проекции спина на ось z_0' . Относительная ориентация осей (x_0,y_0,z_0) и (x_0',y_0',z_0') определяет углы вигнеровского вращения R_G .

Равенство $(*)$ может быть переписано так:

$$G\mathcal{H}(\vec{p}) = \mathcal{H}(g\vec{p})\,R_G \, .$$

Поэтому

$$\begin{aligned} G\,|\vec{p},\lambda\rangle &= G\mathcal{H}(\vec{p})\,|s,\lambda\rangle = \\ &= \mathcal{H}(g\vec{p})\,R_G\,|s,\lambda\rangle = \\ &= \mathcal{H}(g\vec{p})\,\sum_{\lambda'}|s,\lambda'\rangle\langle s,\lambda'|R_G|s,\lambda\rangle \ , \end{aligned}$$

или

$$G\,|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{\lambda'}|g\vec{p},\lambda'\rangle\,\mathcal{D}^{s}_{\lambda'\lambda}(r_G) \, .$$

где , по определению, $\mathcal{D}$–функция равна матричному элементу оператора вращения в системе покоя:

$$\mathcal{D}^{s}_{\lambda'\lambda}(r_G) = \langle s,\lambda'|\,R_G\,|s,\lambda\rangle \, .$$

Оператор R_G в общем случае выглядит так:

$$\begin{aligned} R_G &= \mathcal{H}^{-1}(g\vec{p})\,G\,\mathcal{H}(\vec{p}) = \\ &= e^{i\alpha_g\mathcal{K}_3}\,e^{i\vartheta_g\mathcal{J}_2}\,e^{i\varphi_g\mathcal{J}_3}\;G\,e^{-i\varphi\mathcal{J}_3}\,e^{-i\vartheta\mathcal{J}_2}\,e^{-i\alpha\mathcal{K}_3} \, . \end{aligned}$$

Существуют несколько способов вычисления углов вигнеровского вращения. Способ , основанный на введении релятивистской тетрады $n_\mu^{(i)}$ $i,\mu=0,1,2,3$, подробно рассмотрен в лекциях В.П. Шелеста/4/. Другой способ основан на использовании конечномерного (неунитар-

ного 2×2 представления группы Лоренца

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i \ , \quad \mathcal{K}_i = \frac{i}{2}\sigma_i \ , \quad i=1,2,3 \ ,$$

где σ_i –обычные матрицы Паули.

Наконец, третий способ, основанный на использовании геометрических свойств пространства скоростей (пространства Лобачевского), был рассмотрен Виком/6/. Ниже мы вычислим углы вигнеровского вращения для одного наиболее часто встречающегося преобразования Лоренца G и при определенной конфигурации начального и конечного импульсов.

II. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТОКОВ МЕЖДУ ОДНОЧАСТИЧНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И ИХ СВОЙСТВА ПРИ ЛОРЕНЦЕВСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Пусть $\Gamma(x)$–некоторый локальный оператор, обладающий определенными трансформационными свойствами при лоренцовских преобразованиях. Рассмотрим матричный элемент

$$\langle m',s';\,\vec{p}',\lambda'|\,\Gamma(x)\,|\,m,s;\,\vec{p},\lambda\rangle \ ,$$

где m,m'– масса , s,s' –спин, $\vec{p},\vec{p}'$ –импульс, λ,λ' –спиральность начального и конечного состояний. Ниже подробно будут рассмотрены случаи, когда $\Gamma(x)$ равно плотности скалярного $S(x)$, векторного $V^{\mu}(x)$, аксиально-векторного $A^{\mu}(x)$, антисимметричного тензорного $T^{\mu\nu}$ и псевдоскалярного $P(x)$ токов. В силу трансляционной инвариантности достаточно ограничиться рассмотрением матричных элементов от плотностей, взятых при $x=0$:

$$\langle m',s';\,\vec{p}',\lambda'\,|\,\Gamma(0)\,|\,m,s;\,\vec{p},\lambda\rangle \ .$$

Этот матричный элемент иногда проще вычислить в некоторой частной лоренцевской системе, связанной с первоначальной системой преобразованием G . Это всегда возможно, если Γ обладает определенными трансформационными свойствами:

$$\Gamma'(0) = G\,\Gamma(0)\,G^{-1}$$

I. Случай равных масс и импульсов

Прежде чем перейти к рассмотрению общего случая произвольных начальных и конечных состонний, рассмотрим вначале простой частный случай, когда у начального и конечного состояний равные массы $m'=m$, спины $s'=s$ и импульсы $\vec{p}'=\vec{p}$, причем для удобства направим импульс по оси z, $\vec{p}=\{0,0,p\}$. Кроме того, будем предполагать, что четности начальной и конечной частиц также одинаковы. Для этого матричного элемента

$$\langle m,s;\,0,0,p,\lambda'\,|\,\Gamma(0)\,|\,m,s;\,0,0,p,\lambda\rangle$$

введем сокращенное обозначение

$$\langle p,s'|\Gamma(0)|p,s\rangle .$$

Для того, чтобы изучить некоторые свойства этого матричного элемента, удобно совершить переход в систему покоя с помощью преобразования Лоренца

$$G=e^{i\alpha K_3}, \text{ где } \quad th\alpha=\frac{p}{p_0}, \quad p_0=\sqrt{m^2+p^2} .$$

При этом преобразовании матричные элементы в разных системах связаны соотношением:

$$\langle p,s'|\Gamma(0)|p,s\rangle = \frac{m}{p_0}\langle 0,s'|e^{i\alpha K_3}\Gamma(0)e^{-i\alpha K_3}|0,s\rangle . \qquad (1)$$

Плотности токов $\Gamma(0)=S(0),V^{\mu}(0),A^{\mu}(0),T^{\mu\nu}(0),P(0)$ преобразуются следующим образом:

$$GS(0)G^{-1}=S(0),$$
$$GV^{\mu}(0)G^{-1}=a^{\mu}_{\nu}V^{\nu}(0),$$
$$GA^{\mu}(0)G^{-1}=a^{\mu}_{\nu}A^{\nu}(0),$$
$$GT^{\mu\nu}(0)G^{-1}=a^{\mu}_{\mu'}a^{\nu}_{\nu'}T^{\mu'\nu'}(0),$$
$$GP(0)G^{-1}=P(0),$$

при помощи 4×4 матрицы a^{μ}_{ν}

$$a^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix} ch\alpha & 0 & 0 & sh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\alpha & 0 & 0 & ch\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{где } ch\alpha=\frac{p_0}{m}, \; sh\alpha=\frac{p}{m} .$$

Перейдем к изучению свойств матричных элементов от конкретных токов S, V^{μ}, A^{μ}, $T^{\mu\nu}$ и P.

<u>Скалярный и псевдоскалярный токи</u>. Из (1) и законов преобразования скалярных и псевдоскалярных токов легко видеть, что при произвольных p имеют место следующие соотношения;

$$\langle p,s'|S(0)|p,s\rangle=\frac{m}{p_0}\langle 0,s'|S(0)|0,s\rangle \qquad (2)$$

и

$$\langle p,s'|P(0)|p,s\rangle=0 . \qquad (3)$$

Для вывода последнего соотношения было использовано свойство псевдоскалярного тока при отражении менять знак $\mathcal{P}P(0)\mathcal{P}^{-1}=-P(0)$ и учтено, что четности начальных и конечных частиц одинаковы. Поэтому в системе покоя имеет место равенство $\langle 0,s'|P(0)|0,s\rangle=-\langle 0,s'|P(0)|0,s\rangle$, откуда следует (3). Из (2) видно, что в пределе $p\to\infty$ матричный элемент от плотности скалярного тока также обращается в нуль.

<u>Векторный ток</u>

Из закона преобразования векторного тока следует, что отдельные компоненты преобразуются следующим образом:

$$GV^0G^{-1}=ch\alpha V^0+sh\alpha V^3,$$
$$GV^1G^{-1}=V^1,$$
$$GV^2G^{-1}=V^2,$$
$$GV^3G^{-1}=sh\alpha V^0+ch\alpha V^3 .$$

Таким образом,

$$\langle p,s'|V^0|p,s\rangle=\frac{m}{p_0}\langle 0,s'|\frac{p_0}{m}V^0+\frac{p}{m}V^3|0,s\rangle . \qquad (4)$$

Из свойств векторного тока при отражении следует, что в системе покоя матричный элемент от V^3 равен нулю (четности начального и конечного состояний считаются одинаковыми): $\langle 0|V^3|0\rangle=0$. Поэтому из (4) следует равенство

$$\langle p,s'|V^0|p,s\rangle=\langle 0,s'|V^0|0,s\rangle$$

при любом импульсе. Это равенство означает, что матричный элемент от нулевой компоненты векторного тока между одночастичными состояниями с одинаковой массой и четностью не зависит от импульса, и поэтому имеет место также равенство:

$$\langle p,s'|V^0|p,s\rangle=\langle q,s'|V^0|q,s\rangle$$

при любых p и q. Аналогичным образом могут быть рассмотрены матричные элементы от пространственных компонент векторного тока. В результате такого рассмотрения получим следующие равенства при произвольных p и q:

$$\langle p,s'|V^1|p,s\rangle=0,$$
$$\langle p,s'|V^2|p,s\rangle=0,$$
$$\langle p,s'|V^3|p,s\rangle=\frac{p}{p_0}\langle 0,s'|V^3|0,s\rangle=\frac{p}{p_0}\langle q,s'|V^0|q,s\rangle .$$

В пределе $p\to\infty$, так как $\frac{p}{p_0}\approx1$, имеем дополнительное равенство:

$$\lim_{p\to\infty}\langle p,s'|V^3|p,s\rangle=\langle p,s'|V^0|p,s\rangle .$$

<u>Аксиально-векторный ток</u>

В случае аксиального тока в системе покоя обращается в нуль матричный элемент от нулевой компоненты A^0:

$$\langle 0,s'|A^0(0)|0,s\rangle=0 .$$

Поэтому легко видеть, что матричный элемент от третьей компоненты A^3 не зависит от импульса. Как и в случае векторного тока, матричные элементы от A^1 и A^2 равны нулю. Таким образом при произвольных p и q имеют место следующие равенства:

$$\langle p,s'|A^0(0)|p,s\rangle = \frac{p}{p_0}\langle q,s'|A^3(0)|q,s\rangle ,$$
$$\langle p,s'|A^1(0)|p,s\rangle = 0 ,$$
$$\langle p,s'|A^2(0)|p,s\rangle = 0 ,$$
$$\langle p,s'|A^3(0)|p,s\rangle = \langle q,s'|A^3(0)|q,s\rangle .$$

В пределе $p\to\infty$ имеет место также равенство матричных элементов от нулевой и третьей компонент

$$\lim_{p\to\infty}\langle p,s'|A^0(0)|p,s\rangle = \langle p,s'|A^3(0)|p,s\rangle .$$

Все матричные элементы отличны от нуля только при услови $s'=s$.

Тензорный ток

Из закона преобразования компонент тензорного тока имеем:

$$G T^{01} G^{-1} = \operatorname{ch}\alpha\, T^{01} + \operatorname{sh}\alpha\, T^{31} ,$$
$$G T^{02} G^{-1} = \operatorname{ch}\alpha\, T^{02} + \operatorname{sh}\alpha\, T^{32} ,$$
$$G T^{03} G^{-1} = T^{03} ,$$
$$G T^{31} G^{-1} = \operatorname{sh}\alpha\, T^{01} + \operatorname{ch}\alpha\, T^{31} ,$$
$$G T^{32} G^{-1} = \operatorname{sh}\alpha\, T^{02} + \operatorname{ch}\alpha\, T^{32} ,$$
$$G T^{12} G^{-1} = T^{12} .$$

В системе покоя равны нулю матричные элементы от компонент T^{01}, T^{02}, T^{03} :

$$\langle 0,s'|T^{01}(0)|0,s\rangle = \langle 0,s'|T^{02}(0)|0,s\rangle = \langle 0,s'|T^{03}(0)|0,s\rangle = 0 ,$$

откуда следует, что матричные элементы от T^{31} и T^{32} не зависят от импульсов. Таким образом при произвольных p и q имеют место следующие равенства:

$$\langle p,s'|T^{01}(0)|p,s\rangle = \frac{p}{p_0}\langle q,s'|T^{31}(0)|q,s\rangle ,$$
$$\langle p,s'|T^{02}(0)|p,s\rangle = \frac{p}{p_0}\langle q,s'|T^{32}(0)|q,s\rangle ,$$
$$\langle p,s'|T^{03}(0)|p,s\rangle = 0 ,$$

$$\langle p,s'|T^{31}(0)|p,s\rangle = \langle q,s'|T^{31}(0)|q,s\rangle ,$$
$$\langle p,s'|T^{32}(0)|p,s\rangle = \langle q,s'|T^{32}(0)|q,s\rangle ,$$
$$\langle p,s'|T^{12}(0)|p,s\rangle = \frac{m}{p_0}\langle 0,s'|T^{12}(0)|0,s\rangle .$$

2. Случай разных масс и ненулевой передачи импульса.

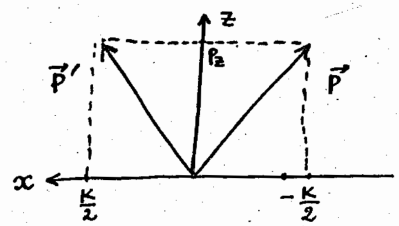
Перейдем к рассмотрению общего случая произвольных масс, спинов и импульсов начального и конечного состояний:

$$\langle m',s';\ \vec{p}',s'|\Gamma(0)|m,s;\ \vec{p},s\rangle .$$

Без существенного ограничения общности положим, что начальное и конечное состояния имеют импульсы

$$\vec{p}' = \left\{\frac{K}{2}, 0, p_z\right\} \quad и \quad \vec{p} = \left\{-\frac{K}{2}, 0, p_z\right\} .$$

Расположение импульсов в I системе



Соответствующие энергии равны:

$$E' = \sqrt{m'^2 + \frac{K^2}{2} + p_z^2} \quad и \quad E = \sqrt{m^2 + \frac{K^2}{2} + p_z^2} .$$

Общие свойства матричного элемента вида

$$\langle m',s';\ \frac{K}{2},0,p_z\,|\Gamma(0)|\,m,s;\ -\frac{K}{2},0,p_z\rangle$$

проще всего изучить, совершив преобразование Лоренца в систему Брейта, где начальный и конечный импульс имеют равные по модулю значения и противоположно направлены , т.е. их сумма равна нулю. Система Брейта является обобщением системы покоя на случай разных масс начального и конечного состояний и ненулевой передачи импульса. Совершим чистое преобразование Лоренца вдоль оси z

$$e^{i\zeta K_3}$$

с некоторым параметром ζ, который мы определим из условия перехода в систему Брейта.
При этом преобразовании четырехмерные импульсы

$$\begin{pmatrix} E \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \\ P_z \end{pmatrix} \quad и \quad \begin{pmatrix} E' \\ \frac{K}{2} \\ 0 \\ P_z \end{pmatrix}$$

преобразуются при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} ch\zeta & 0 & 0 & -sh\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh\zeta & 0 & 0 & ch\zeta \end{pmatrix}.$$

Условие того, что мы находили в системе Брейта, можно записать в виде равенства со знаком „минус" преобразованных z- компонент импульсов начального и конечного состояний (так как x - компоненты уже равны и противоположны):

$$(-sh\zeta E + ch\zeta P_z) = -(-sh\zeta E' + ch\zeta P_z).$$

Откуда найдем скорость преобразования Лоренца, переводящего первоначальную систему в систему Брейта:

$$th\zeta = \frac{2P_z}{E+E'}.$$

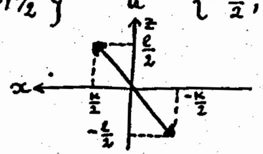
Обозначим преобразованное значение z- компоненты импульса начального состояния через $-\frac{\ell}{2}$.
Тогда имеем:

$$-\frac{\ell}{2} = -sh\zeta E + ch\zeta P_z = \frac{P_z(E'-E)}{\sqrt{(E+E')^2-4P_z^2}}.$$

Таким образом, мы приходим к расположению импульсов в следующем виде:

Расположение импульсов во II системе

$$\left\{\frac{K}{2}, 0, \frac{\ell}{2}\right\} \quad и \quad \left\{-\frac{K}{2}, 0, -\frac{\ell}{2}\right\}$$



Соответствующие энергии в системе Брейта равны:

$$\mathcal{E}' = \sqrt{m'^2 + \frac{K^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}} \quad и \quad \mathcal{E} = \sqrt{m^2 + \frac{K^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}}.$$

Для того, чтобы направить импульсы по оси z, совершим поворот вокруг оси y на угол θ,

$$e^{i\theta J_2},$$

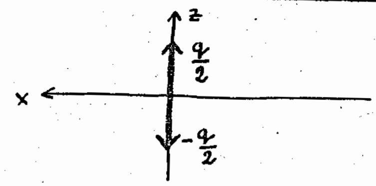
тангес которого равен:

$$tg\theta = \frac{K}{\ell}.$$

Окончательно, мы придем к следующему расположению импульсов:

$$\left\{0, 0, \frac{q}{2}\right\} \quad и \quad \left\{0, 0, -\frac{q}{2}\right\}.$$

Расположение импульсов в III системе



где $q = \sqrt{K^2+\ell^2}$.
Таким образом, преобразование G, переводящее первоначальную систему I в систему III, имеет вид

$$G = e^{i\theta J_2} e^{i\zeta K_3}$$

с углами θ и ζ, определенными выше. Под действием этого преобразования вектор состояния начальной частицы преобразуется согласно общему закону, приведенному на стр. 10, следующим образом:

$$G|m,s;\vec{p},\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{E}} \sum_{\mu} |m,s;g\vec{p},\mu\rangle D^s_{\mu\lambda}(r_G),$$

или

$$G|m,s;-\frac{K}{2},0,P_z,\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{E}} \sum_{\mu} |m,s;0,0,-\frac{q}{2},\mu\rangle D^s_{\mu\lambda}(r_G),$$

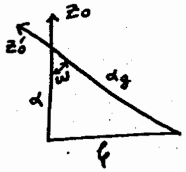
где r_G - углы вигнеровского вращения, определенные согласно общей формуле на стр. 10:

$$R_G = \mathcal{H}^{-1}(g\vec{p})\, G\, \mathcal{H}(\vec{p}).$$

Так как все преобразования не выводят импульсы из плоскости xz, то вращение R_G может быть лишь вращением вокруг второй оси на некоторый угол ω:

$$R_G = e^{-i\omega J_2}.$$

Угол ω – это угол между осью z_0 и z_0' (см. стр. 9и10) и может быть найден из гиперболического треугольника



при помощи соотношения

$$ch\,\zeta = ch\,\alpha\; ch\,\alpha_g - sh\,\alpha\; sh\,\alpha_g \cos\omega,$$

где

$$ch\,\zeta = \frac{th\,\zeta}{\sqrt{1-th^2\zeta}} = \frac{2P_z}{\sqrt{(E+E')^2-4P_z^2}},$$

$$ch\,\alpha = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{m^2+\frac{K^2}{4}+P_z^2}}{m}, \quad sh\,\alpha = \frac{\sqrt{\frac{K^2}{4}+P_z^2}}{m},$$

$$ch\,\alpha_g = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{\sqrt{m^2+\frac{q^2}{4}}}{m}, \quad sh\,\alpha_g = \frac{q}{2m}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующее, несколько громоздкое, но точное значение угла вигнеровского вращения:

$$\cos\omega = \left(\frac{E\varepsilon}{m^2} - \frac{2P_z}{\sqrt{(E+E')^2-4P_z^2}}\right)\frac{2m^2}{q\sqrt{\frac{K^2}{4}+P_z^2}}.$$

Если устремить компоненту $P_z\to\infty$, то это выражение упрощается, принимая вид:

$$\cos\omega = \frac{m'^2-m^2+K^2}{\sqrt{(K^2+m'^2-m^2)^2+4m^2K^2}},$$

откуда :

$$tg\,\omega = \frac{2mK}{m'^2-m^2+K^2}.$$

Ниже мы рассмотрим подробнее именно этот предельный случай, который представляет особый интерес с точки зрения построения релятивистских представлений локальной алгебры токов при бесконечном импульсе [11,4]. Начальные и конечные состояния с бесконечным импульсом $P_z=\infty$ преобразуются следующим образом под действием преобразований G :

$$G|m,s;-\tfrac{K}{2},0,P_z=\infty,\lambda\rangle = \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{E}}\sum_{\mu}|m,s;0,0,-q/2,\mu\rangle\, d^s_{\mu\lambda}(\omega),$$

$$\langle m',s';\tfrac{K}{2},0,P_z=\infty,\lambda'|G^{-1} = \sqrt{\tfrac{\varepsilon'}{E'}}\sum_{\mu'} d^{s'}_{\lambda'\mu'}(\omega')\langle m',s';0,0,q/2,\mu'|,$$

где $tg\,\omega$ уже определен выше, а ω' получается из ω заменой $m'\rightleftarrows m$, $K\to -K$:

$$tg\,\omega' = \frac{2m'K}{m'^2-m^2-K^2}.$$

Напомним, что маленькая d- функция определена обычным образом:

$$d^s_{\mu\lambda}(\omega) = \langle s,\mu|\, e^{i\omega J_2}|s,\lambda\rangle.$$

Таким образом, имеет место следующее соотношение между матричными элементами оператора $\Gamma(0)$, вычисленными в системе $P_z=\infty$ и в системе Брейта:

$$\langle m',s';\tfrac{K}{2},0,P_z,\lambda'|\Gamma(0)|m,s;-\tfrac{K}{2},0,P_z,\lambda\rangle = \qquad (*)$$

$$= \sqrt{\tfrac{\varepsilon\varepsilon'}{EE'}}\sum_{\mu\mu'} d^{s'}_{\lambda'\mu'}(\omega')\langle m',s';0,0,q/2,\mu'|G\Gamma(0)G^{-1}|m,s;0,0,-q/2,\mu\rangle\, d^s_{\mu\lambda}(\omega).$$

Пользуясь ортогональностью d- функций, это равенство можно переписать также в виде:

$$\sum_{\lambda'\lambda} d^{s'}_{\mu'\lambda'}(\omega)\langle m',s';\tfrac{K}{2},0,P_z=\infty,\lambda'|\Gamma(0)|m,s;-\tfrac{K}{2},0,P_z=\infty,\lambda\rangle\, d^s_{\lambda\mu}(\omega) = \qquad (**)$$

$$= \sqrt{\tfrac{\varepsilon\varepsilon'}{EE'}}\langle m',s';0,0,q/2,\mu'|G\Gamma(0)G^{-1}|m,s;0,0,-q/2,\mu\rangle.$$

Такая форма записи удобна при изучении так называемых угловых свойств или правил отбора по спиральности. Заметим, что преобразованию $G=e^{i\theta J_2}e^{i\zeta K_3}$ соответствует 4×4 матрица a^μ_ν :

$$a^\mu_\nu = \begin{pmatrix} ch\,\zeta & sh\,\zeta\sin\theta & 0 & sh\,\zeta\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\,\zeta & ch\,\zeta\sin\theta & 0 & ch\,\zeta\cos\theta \end{pmatrix},$$

и перейдем к изучению свойств матричных элементов в конкретных случаях, когда $\Gamma(0)=$ $S(0), V^\mu(0), A^\mu(0), T^{\mu\nu}(0), P(0)$.

Скалярный и псевдоскалярный токи.

Если в равенство $(*)$ подставить вместо $\Gamma(0)$ плотность скалярного $S(0)$ или псевдоскалярного $P(0)$ токов, получим, что в системе $P_z=\infty$ соответствующие элементы стремятся к нулю как $\frac{1}{P_z}$.

Векторный ток

Компоненты векторного тока $V^\mu(0)$ при лоренцевских преобразованиях $G=e^{i\theta J_2}e^{i\zeta K_3}$

преобразуются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&G V^0 G^{-1} = ch\,\zeta\, V^0 + sh\,\zeta \sin\theta\, V^1 + sh\,\zeta \cos\theta\, V^3 , \\
&G V^1 G^{-1} = \cos\theta\, V^1 - \sin\theta\, V^3 , \\
&G V^2 G^{-1} = V^2 , \\
&G V^3 G^{-1} = sh\,\zeta\, V^0 + ch\,\zeta \sin\theta\, V^1 + ch\,\zeta \cos\theta\, V^3 ;
\end{aligned}
\qquad (***)
$$

легко показать, что в пределе $P_z = \infty$ с точностью до членов порядка $\frac{1}{P_z}$ имеет место равенство

$$sh\,\zeta = ch\,\zeta \approx \frac{2P_z}{\sqrt{2m^2+2m'^2+K^2}} = \frac{2P_z}{\varepsilon+\varepsilon'} .$$

Используя этот факт и равенства $(*)$, $(***)$ легко видеть, что матричные элементы от V^0 и V^3 в системе $P_z = \infty$ совпадают :

$$\langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | V^0(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | V^3(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}}{\varepsilon+\varepsilon'} \sum_{\mu\mu'} d^{s'}_{\lambda'\mu'}(\omega') \langle m', s'; 0, 0, q/2, \mu' | V^0(0) + \sin\theta\, V^1(0) + \cos\theta\, V^3(0) | m, s; 0, 0, -q/2, \mu \rangle d^{s}_{\mu\lambda}(\omega),$$

а матричные элементы от V^1 и V^2 стремятся к нулю, как $\frac{1}{P_z}$. Для матричных элементов оператора $V^0(0)$ (а также $V^3(0)$) имеет место соотношение типа $(**)$:

$$\sum_{\lambda\lambda'} d^{s'}_{\mu'\lambda'}(\omega') \langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | V^0(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle d^{s}_{\lambda\mu}(\omega) =$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}}{\varepsilon+\varepsilon'} \langle m', s'; 0, 0, q/2, \mu' | V^0(0) + \sin\theta\, V^1(0) + \cos\theta\, V^3(0) | m, s; 0, 0, -q/2, \mu \rangle .$$

Из сохранения J_3 следует, что правая часть этого равенства отлична от нуля лишь при условии $\mu' + \mu = 0, \pm 1$.

Аксиально-векторный ток.

Аналогичные соотношения имеют место и в случае аксиально-векторного тока. Соответствующие соотношения получаются из соотношений для векторного тока заменой плотностей $V^{\mu}(0)$ на $A^{\mu}(0)$.

Тензорный ток.

Компоненты антисимметричного тензора под действием $G = e^{i\theta J_2} e^{i\zeta K_3}$ преобразуются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&G T^{01}(0) G^{-1} = ch\,\zeta \cos\theta\, T^{01}(0) + sh\,\zeta\, T^{31}(0) - ch\,\zeta \sin\theta\, T^{03}(0) , \\
&G T^{02}(0) G^{-1} = ch\,\zeta\, T^{02}(0) + sh\,\zeta \sin\theta\, T^{12}(0) + sh\,\zeta \cos\theta\, T^{32}(0) , \\
&G T^{03}(0) G^{-1} = \cos\theta\, T^{03}(0) + \sin\theta\, T^{01}(0) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G T^{31}(0) G^{-1} = sh\,\zeta \cos\theta\, T^{01} + ch\,\zeta\, T^{31} - sh\,\zeta \sin\theta\, T^{03} , \\
&G T^{32}(0) G^{-1} = sh\,\zeta\, T^{02} + ch\,\zeta \sin\theta\, T^{12} + ch\,\zeta \cos\theta\, T^{32} , \\
&G T^{12}(0) G^{-1} = \cos\theta\, T^{12} - \sin\theta\, T^{32} .
\end{aligned}
$$

При помощи $(*)$ можно установить следующие соотношения между матричными элементами при $P_z = \infty$:

I.

$$\langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{01}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{31}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}}{\varepsilon+\varepsilon'} \sum_{\mu\mu'} d^{s'}_{\lambda'\mu'}(\omega') \langle m', s'; 0, 0, q/2, \mu' | \cos\theta\, T^{01}(0) + T^{31}(0) - \sin\theta\, T^{03}(0) | m, s; 0, 0, -q/2, \mu \rangle d^{s}_{\mu\lambda}(\omega) .$$

2.

$$\langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{02}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \langle m' s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{32}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}}{\varepsilon+\varepsilon'} \sum_{\mu\mu'} d^{s'}_{\lambda'\mu'}(\omega') \langle m', s'; 0, 0, q/2, \mu' | T^{02}(0) + \sin\theta\, T^{12} + \cos\theta\, T^{32}(0) | m, s; 0, 0, -q/2, \mu \rangle d^{s}_{\mu\lambda}(\omega) .$$

3.

$$\langle m', s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{03}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle =$$

$$= \langle m' s'; \tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda' | T^{12}(0) | m, s; -\tfrac{K}{2}, 0, P_z=\infty, \lambda \rangle = 0 .$$

III. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ДВУХ- И ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ С ОПРЕДЕЛЕННОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ

В предыдущих разделах мы подробно рассмотрели свойства одночастичных спиральных состояний. Это описание можно обобщить на любое число невзаимодействующих частиц и встречающиеся при этом усложнения, как говорят, чисто кинематические.

Ниже мы рассмотрим двухчастичное состояние, следуя работе Якоба и Вика /2/, и трехчастичное состояние на основании работ Вика /5/, М.И. Широкова /6/. Эти состояния, в частности, используются для разложения амплитуд рассеяния, рождения и распадов по парциальным волнам.

I. Двухчастичное состояние с определенной спиральностью

Описание двухчастичного состояния в системе центра масс имеет много общего с одночастичным состоянием, заданным при помощи полного момента J и его проекции $J_3 = M$. Поэтому мы рассмотрим вначале одночастичное состояние с этой точки зрения. До сих пор мы описывали состояние одной частицы с массой m и спином s при помощи кет-вектора:

$$|m, s; \vec{p}, \lambda\rangle,$$

или сокращенно:

$$|\vec{p}, \lambda\rangle \equiv |\,|\vec{p}|, \vartheta, \varphi, \lambda\rangle \equiv |\vartheta, \varphi, \lambda\rangle .$$

Существует, однако, другой способ задания того же самого состояния при помощи другого набора квантовых чисел, именно, вместо углов вектора $\vec{p}$ – азимутального ϑ и полярного φ можно задать полный угловой момент частицы J и его проекцию $J_3 = M$ на ось z. Кет-вектор состояния частицы при этом способе описания запишется так:

$$|m, s; |\vec{p}|, J, M, \lambda\rangle ,$$

или сокращенно :

$$|J, M, \lambda\rangle .$$

Переход от одного представления к другому осуществляется согласно теории представлений Дирака при помощи функции преобразования. Как показали Якоб и Вик /2/, функция преобразования от представления $|\vartheta, \varphi, \lambda\rangle$ к представлению $|J, M, \lambda\rangle$ выражается через D-функцию следующим образом:

$$\langle J, M, \lambda' | \vartheta, \varphi, \lambda\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, D^J_{M,\lambda}(\varphi, \vartheta, 0) .$$

Используя условие полноты состояний с определенным J и M :

$$1 = \sum_{JM\lambda'} |JM\lambda'\rangle\langle JM\lambda'| ,$$

получим разложение состояний с определенным импульсом по состояниям с определенным J и M :

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = \sum_{JM} |JM\lambda\rangle \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, D^J_{M\lambda}(\varphi, \vartheta, 0) . \qquad (*)$$

Заметим, что для бесспиновой частицы $\lambda = 0$, а

$$D^J_{M,0}(\varphi, \vartheta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}}\, Y_{JM}(\vartheta, \varphi)$$

и разложение $(*)$ переходит в более знакомое разложение плоской волны бесспиновой частицы. Обратное разложение легко получить с помощью свойств ортогональности D-функций:

$$\int D^J_{M\lambda}(\varphi, \vartheta, 0)\, D^{J'*}_{M'\lambda'}(\varphi, \vartheta, 0)\, d\Omega = \frac{4\pi}{2J+1}\, \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{\lambda\lambda'} ,$$

откуда

$$|JM\lambda\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int D^{J*}_{M\lambda}(\varphi, \vartheta, 0)\, |\vartheta, \varphi, \lambda\rangle\, d\Omega .$$

Перейдем к рассмотрению двухчастичного состояния. Рассмотрим две свободные частицы с массами m_1 и m_2 и спинами s_1 и s_2. Кет-вектор этого состояния в произвольной системе имеет вид:

$$|m_1 s_1, m_2, s_2;\ \vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2\, \lambda_2\rangle .$$

Нас, однако, будет интересовать это состояние в системе центра масс, когда $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p} \qquad \vec{p} = \{p, \vartheta, \varphi\}$$

с кет-вектором (в сокращенном виде):

$$|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2\rangle .$$

Якоб и Вик /2/ (см. также /5/) показали, что это состояние может быть задано с помощью квантовых чисел полного момента J и его проекции на ось z M, которые в некотором смысле заменяют углы ϑ и φ :

$$|p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle .$$

Функция преобразования от одного представления к другому является $\mathcal{D}$- функцией:

$$\langle JM\lambda_1'\lambda_2'|\vartheta,\varphi,\lambda_1,\lambda_2\rangle = \delta_{\lambda_1\lambda_1'}\,\delta_{\lambda_2\lambda_2'}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\,\mathcal{D}^J_{M,\lambda_1-\lambda_2}(\varphi,\vartheta,0)\,. \quad (**)$$

Здесь принято соглашение работы [5] о выборе фазы. Из сравнения формул (*) и (**) видно, что две свободные частицы в системе центра масс эквивалентны одной частице с эффективной массой $W=\sqrt{m_1^2+p^2}+\sqrt{m_2^2+p^2}$. Условие полноты запишется так:

$$1=\sum_{J,M,\lambda_1',\lambda_2'}|JM\lambda_1'\lambda_2'\rangle\langle JM\lambda_1'\lambda_2'|\,,$$

а разложение состояний с определенным импульсом в системе центра масс по состояниям с определенным J и M имеет вид

$$|\vartheta,\varphi,\lambda_1,\lambda_2\rangle=\sum_{JM\lambda_1'\lambda_2'}|JM\lambda_1'\lambda_2'\rangle\langle JM\lambda_1'\lambda_2'|\vartheta,\varphi,\lambda_1\lambda_2\rangle=$$

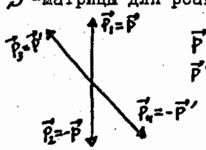
$$=\sum_{JM}|JM\lambda_1\lambda_2\rangle\,\mathcal{D}^J_{M,\lambda}(\varphi,\vartheta,0),\quad \lambda=\lambda_1-\lambda_2\,.$$

Используя ортогональность $\mathcal{D}$- функций, легко выписать обратное разложение:

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle=\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\int|\vartheta,\varphi,\lambda_1,\lambda_2\rangle\,\mathcal{D}^{J*}_{M,\lambda_1-\lambda_2}(\varphi,\vartheta,0)\,d\Omega\,.$$

2. Разложение амплитуды рассеяния 2 ⟶ 2 по парциальным волнам.

Рассмотрим матричный элемент S-матрицы для реакции $1+2\to3+4$. В системе центра масс:



$\vec p\sim\vartheta_0,\varphi_0$

$\vec p'\sim\vartheta',\varphi'$

Используя условие полноты состояний с определенным J и M, можно представить S-матрицу в виде

$$S=\sum_{\substack{JM\lambda_1\lambda_2\\ J'M'\lambda_3\lambda_4}}|J'M'\lambda_3\lambda_4\rangle\langle J'M'\lambda_3\lambda_4|S|JM\lambda_1\lambda_2\rangle\langle JM\lambda_1\lambda_2|\;=$$

$$=\sum_{JM\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}|JM\lambda_3\lambda_4\rangle\,S^J_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\langle JM\lambda_1\lambda_2|\,,$$

где, по определению:

$$\langle J'M'\lambda_3\lambda_4|S|JM\lambda_1\lambda_2\rangle=\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,S^J_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\,.$$

Откуда следует, что

$$\langle\vec p'\lambda_3\lambda_4|S|\vec p\lambda_1\lambda_2\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_{JM}(2J+1)\,\mathcal{D}^{J*}_{M,\lambda_3-\lambda_4}(\varphi',\vartheta',0)\,\mathcal{D}^J_{M,\lambda_1-\lambda_2}(\varphi,\vartheta,0)\;S^J_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\,.$$

Полагая $\varphi=0$, $\vartheta=0$ и учитывая, что

$$\mathcal{D}^J_{M,\lambda_1-\lambda_2}(0,0,0)=\delta_{M,\lambda_1-\lambda_2}\,,$$

получим окончательно формулу Якоба и Вика:

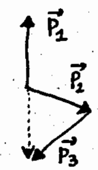
$$\langle\vec p'\lambda_3\lambda_4|S|\vec p\lambda_1\lambda_2\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_J(2J+1)\,\mathcal{D}^{J*}_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3-\lambda_4}(\varphi',\vartheta',0)\,S^J_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_J(2J+1)\,S^J_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\,e^{i(\lambda_1-\lambda_2)\varphi'}\,d^J_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3-\lambda_4}(\vartheta')\,.$$

При получении матрицы рассеяния в этой форме была использована лишь инвариантность относител но собственной неоднородной группы Лорэнца. Использование P и T -инвариантности приводит к дальнейшим ограничениям. Однако на этом мы останавливаться не будем и отсылаем читателей к литературе [2,3,6].

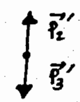
3. Трехквазичастичное состояние

Рассмотрим три свободные частицы с масами m_1,m_2,m_3 и спинами S_1,S_2,S_3 в системе центра масс $\vec p_1+\vec p_2+\vec p_3=0$:



$\vec p_1=-(\vec p_2+\vec p_3)=\vec p \qquad \vec p=\{p,\vartheta,\varphi\}$

Кроме этого, мы будем рассматривать другую лоренцевскую систему, а именно, систему центра масс частиц 2 и 3, где



$\vec p_2'=-\vec p_3'=\vec p' \qquad \vec p'=\{p',\vartheta',\varphi'\}$

Состояния 3 частиц удобно описать при помощи переменных, часть которых задана в системе центра масс всех трех частиц, а часть - в системе центра масс какой-нибудь пары, например, (23). Тогда кет-вектор такого состояния можно записать в виде:

$$|\vec p,\vec p',\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\rangle\,,$$