ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3900

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе

РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ N ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1968

P2 - 3900

В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе

РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ N ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Значительные успехи в описании системы двух частиц в квантовой теории поля были достигнуты на основе квазипотенциальных уравнений [1] для одновременной волновой функции двух частиц в системе центра масс.

Важным достоинством квазипотенциальных уравнений является их близкая связь с квантово-механическим уравнением Шредингера в сочетании с ясностью и строгостью теоретико-полевого подхода.

Применение этих уравнений для определения спектра связанных состояний двух частиц, нахождение амплитуд рассеяния и исследования их аналитических и асимптотических свойств можно найти в ряде работ [2,3].

Возникает интересная задача вывода квазипотенциальных уравнений для описания системы трех частиц в квантовой теории поля.

Кроме того, представляет интерес проблема релятивистски-ковариантного обобщения квазипотенциальных уравнений.

Следует отметить, что для нахождения спектра масс связанных состояний и амплитуд рассеяния частиц достаточно использовать квазипотенциальные уравнения, справедливые в системе центра инерции. Однако определение вершинных функций или токов связанных состояний требует знания релятивистски-ковариантных волновых функций и уравнений, которым они удовлетворяют.

Впервые релятивистски-ковариантные волновые уравнения для двух бесспиновых частиц, а также для частиц со спином 1/2 были получены в работе [2].

Целью настоящей работы является вывод релятивистски-ковариантных уравнений для N частиц на основе квазипотенциального метода квантовой теории поля.

В основе предлагаемого ниже метода лежит удобный выбор кинематических переменных, позволяющий обобщить определение 2 - временной функции Грина прменительно к произвольной системе отсчёта.

§ 1. Релятивистски-ковариантное волновое уравнение для двух частиц

Предложенное в работе[2] релятивистски-ковариантное волновое уравнение для двух бесспиновых частиц с равными массами имеет вид:

$$[P^2-4(m^2-q^2)]\phi_P(q)=\frac{1}{\sqrt{m^2-q^2}}\int V_P(q,q')\phi_P(q')\delta(nq')dq' \tag{1.1}$$

где $n=\frac{P}{\sqrt{P^2}}$ и P - полный импульс системы двух частиц. Волновая функция двух частиц $\phi_P(q)$ определена для переменных P и q, связанных условием Маркова-Юкавы:

$$(Pq)=0 \tag{1.2}$$

и имеет положительно определенную норму

$$\int|\phi_P(q)|^2\delta(nq)dq=1 \tag{1.3}$$

Ядро $V_P(q,q')$ выбирается так, чтобы в системе центра масс двух частиц $(\vec{P}=0)$ уравнение (1.1) совпадало с квазипотенциальным уравнением для одновременной волновой функции;

$$[E^2-4(m^2+\vec{q}^{\,2})]\,\Psi(\vec{q})=\frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}}}\int V(E,\vec{q},\vec{q}\,')\,\Psi(\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,' \qquad (1.4)$$

Здесь E и $\vec{q}$ – полная энергия и относительный импульс двух частиц в системе центра инерции, а $\Psi(\vec{q})$ связана с амплитудой Бете-Солпитера соотношением

$$\Psi(\vec{q})=\int_{-\infty}^{+\infty} dq_0\, \chi_{\vec{P}=0}(q_0,\vec{q}). \qquad (1.5)$$

Однако подобное релятивистски-ковариантное обобщение квазипотенциального уравнения (1.4) является, вообще говоря, неоднозначным.

Ниже мы дадим обобщенное определение квазипотенциальной волновой функции и 2-временной функции Грина двух частиц применительно к произвольной системе отсчёта и выведем уравнения, которым они удовлетворяют.

Определим фурье-образ 4-временной функции Грина двух скалярных частиц следующим выражением:

$$G(x_1x_2;x_1'x_2')=\frac{1}{(2\pi)^8}\int G(p_1p_2;p_1'p_2')\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,e^{-ip_1x_1-ip_2x_2+ip_1'x_1'+ip_2'x_2'}\,dp_1dp_2dp_1'dp_2' \qquad (1.6)$$

Для двух свободных частиц с массами m_1 и m_2 имеем

$$\overset{(0)}{G}(p_1p_2;p_1'p_2')\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')=-\frac{\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2')}{[p_1^2-m_1^2]\,[p_2^2-m_2^2]} \qquad (1.7)$$

Введем новые переменные:

$$p_1 = \alpha_1 \cdot n + q \ ; \qquad p_1' = \alpha_1' \cdot n + q' \ ;$$
$$p_2 = \alpha_2 \cdot n - q \ ; \qquad p_2' = \alpha_2' \cdot n - q' \ ; \tag{1.8}$$

причём

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2' = M = \sqrt{P^2}\,, \tag{1.9}$$

$$(qP) = (q'P) = 0\ . \tag{1.9}$$

Таким образом, получим:

$$G(p_1 p_2 ; p_1' p_2') = G_P(\varepsilon, q ; \varepsilon', q') \tag{1.10}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \ ; \qquad \varepsilon' = \frac{1}{2}(\alpha_1' - \alpha_2')\,.$$

Определим фурье-образ 2-временной функции Грина в произвольной системе отсчёта выражением:

$$\widetilde{G}_P(q, q') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, d\varepsilon'\, G_P(\varepsilon, q ; \varepsilon', q')\,. \tag{1.11}$$

Для свободных частиц, используя формулу (1.7), получим следующее выражение:

$$\tilde{G}_p^{(0)}(q,q') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, d\varepsilon' \frac{\delta\left[n_0(\varepsilon-\varepsilon') + \frac{(\vec{q}-\vec{q}\,';\vec{n})}{n_0}\right]\delta\left[\vec{n}(\varepsilon-\varepsilon') + (\vec{q}-\vec{q}\,')\right]}{\left[\left(\frac{M}{2}+\varepsilon\right)^2 - \omega_1^2\right]\cdot\left[\left(\frac{M}{2}-\varepsilon\right)^2 - \omega_2^2\right]} \qquad (1.12)$$

где

$$\omega_i = \sqrt{m_i^2 - q^2}\ ; \quad i = 1,2. \qquad (1.12)$$

Интегрируя, найдем

$$\tilde{G}_p^{(0)}(q,q') = 2\pi i\, \delta_p(q-q')\, \frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\cdot\omega_2} \cdot \frac{1}{\left[M^2 - (\omega_1+\omega_2)^2\right]}, \qquad (1.13)$$

где

$$\delta_p(q-q') = n_0\, \delta(\vec{q}-\vec{q}\,') \qquad (1.14)$$

– инвариантная δ-функция. Определим обратный оператор $\tilde{G}^{-1}$ следующим образом:

$$\int \tilde{G}_p^{-1}(q,q'')\, \tilde{G}_p(q'';q')\, dq''\, \delta(nq'') = \delta_p(q-q'). \qquad (1.15)$$

Учитывая, что

$$\int \delta_p(q-q'')\,\delta_p(q''-q')\,\delta(nq'')\,dq'' = \delta_p(q-q') . \tag{1.16}$$

получим на основании определения (1.15) обратный оператор $\tilde{G}^{(0)\,-1}$ для функции Грина свободных частиц

$$\tilde{G}_p^{(0)\,-1}(q,q') = \frac{1}{2\pi i}\,\delta_p(q-q')\,\frac{2\omega_1\cdot\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\left[M^2-(\omega_1+\omega_2)^2\right] \tag{1.17}$$

Релятивистски-ковариантное квазипотенциальное уравнение для двух частиц

$$\int \tilde{G}_p^{-1}(q,q')\,\Phi_p(q')\,\delta(nq')\,dq' = 0 \tag{1.18}$$

может быть представлено в следующей форме:

$$\left[P^2-(\omega_1+\omega_2)^2\right]\Phi_p(q) = \frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\cdot\omega_2}\int V_p(q,q')\,\Phi_p(q')\,\delta(nq')\,dq' \tag{1.19}$$

где обобщенный квазипотенциал $V_p(q,q')$ определен соотношением

$$\tilde{G}_p^{-1}(q,q') = \tilde{G}_p^{(0)\,-1}(q,q') - \frac{1}{2\pi i}\,V_p(q,q') . \tag{1.20}$$

Релятивистски-ковариантная волновая функция $\Phi_p(q)$ определена для переменных P и q, удовлетворяющих условию Маркова-Юкавы (1.9), и связана с амплитудой Бете-Солпитера соотношением

$$\phi_p(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_p(\varepsilon \cdot n + q)\, d\varepsilon \,. \tag{1.21}$$

Нетрудно показать, что в системе центра инерции для случая равных масс частиц уравнение (1.19) совпадает с квазипотенциальным уравнением (1.4). Аналогичным образом, используя результаты работы/2/ и предложенный выше метод, можно получить релятивистски-ковариантные уравнения для системы двух частиц со спином 1/2.

§2. *Релятивистски-ковариантное квазипотенциальное уравнение для трех частиц*

Рассмотрим для иллюстрации систему из трех невзаимодействующих скалярных частиц. Амплитуда Бете–Солпитера трех свободных частиц в импульсном представлении удовлетворяет системе уравнений

$$(p_i^2 - m_i^2)\, \chi(p_1 p_2 p_3) = 0 \quad ; \qquad i = 1, 2, 3 \,. \tag{2.1}$$

Введем новые переменные:

$$p_i = \alpha_i \cdot n + q_i \quad ; \qquad n = \frac{P}{\sqrt{P^2}} \,, \tag{2.2}$$

где P – полный импульс системы из трех частиц, причём

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = M \quad ; \qquad M = \sqrt{P^2} \,, \tag{2.3}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad ; \qquad (q_i P) = 0 \,.$$

(2.3)

Таким образом, уравнение (2.1) принимает вид

$$(\alpha_i^2-\omega_i^2)\,\chi_p(\alpha_j,q_j)=0\quad;\qquad i=1,2,3 \tag{2.4}$$

где

$$\omega_i=\sqrt{m_i^2-q_i^2}\,. \tag{2.4}$$

Решение уравнений (2.4) имеет вид:

$$\chi_p(\alpha_i,q_i)=\delta(\alpha_1^2-\omega_1^2)\,\delta(\alpha_2^2-\omega_2^2)\,\delta(\alpha_3^2-\omega_3^2)\,A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,, \tag{2.5}$$

где $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ - некоторая функция α_i, не содержашая δ-образных особенностей. Будем считать, что $A(\alpha_i)$ отлична от нуля лишь в том случае, когда все α_i принимают одновременно либо положительные, либо отрицательные значения. Определим теперь волновую функцию трех частиц:

$$\Psi_p(q_1q_2q_3)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-M)\,\chi_p(\alpha_i,q_i)\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \tag{2.6}$$

Для свободных частиц, используя решение (2.5), получим

$$\Psi_p^{(0)}(q_1q_2q_3)=\delta\left[M^2-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2\right]\cdot A \tag{2.7}$$

Таким образом, волновая функция трех свободных частиц удовлетворяет уравнению

$$[P^2-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2]\,\Psi_P^{(0)}(q_1 q_2 q_3)=0 \tag{2.8}$$

при этом дополнительные условия Маркова-Юкавы $(Pq_i)=0$ выполняются автоматически.

Волновая функция $\Psi_P(q_i)$ может быть нормирована релятивистски-инвариантным образом:

$$\int|\Psi_P(q_i)|^2(dq)\,\delta_P(q_1+q_2+q_3)=1, \tag{2.9}$$

где

$$(dq)=dq_1 dq_2 dq_3\,\delta(\kappa q_1)\,\delta(\kappa q_2)\,\delta(\kappa q_3) \tag{2.10}$$

$$\delta_P(q_1+q_2+q_3)=n_0\cdot\delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3). \tag{2.10'}$$

Покажем теперь, что в системе центра инерции $(\vec{P}=0)$ волновая функция $\Psi_{\vec{P}=0}(\vec{q}_i)$, определенная выражением (2.6), является фурье-образом амплитуды Бете-Солпитера трех частиц, взятой при равных временах частиц.

Действительно, используя представление

$$(2\pi)^4\delta(P_1+P_2+P_3-P)\,\chi(P_1 P_2 P_3)=\int dx_1 dx_2 dx_3\, e^{i\sum_{k=1}^{3}x_k p_k}\,\chi_P(x_1 x_2 x_3), \tag{2.11}$$

где

$$\chi_p(x_1 x_2 x_3) = \langle 0 | T\left(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\right) | p \rangle , \qquad (2.12)$$

и произведя интегрирование согласно выражению (2.6), найдем в системе $\vec{p}=0$:

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3)\, \Psi_{\vec{p}=0}(\vec{q}_i) = \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3\, e^{-i\sum_{k=1}^{3} \vec{x}_k \vec{q}_k}\, \chi_{\vec{p}=0}(0,\vec{x}_1;0,\vec{x}_2;0,\vec{x}_3) . \qquad (2.13)$$

Найдем теперь уравнение, которому удовлетворяет волновая функция трех частиц (2.6) в присутствии взаимодействия.

Определим фурье-образ 2-временной функции Грина следующим образом:

$$\tilde{G}_p(q_i, q_i') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\, d\alpha_1' d\alpha_2' d\alpha_3'\, \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-M)\, G_p(\alpha_i q_i; \alpha_i' q_i') \qquad (2.14)$$

где

$$G_p(\alpha_i q_i ; \alpha_i' q_i') \equiv G(P_1 P_2 P_3 ; P_1' P_2' P_3') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int G(x_1 x_2 x_3 ; x_1' x_2' x_3')\, e^{i\sum_{k=1}^{3}(x_k P_k - x_k' P_k')}\, dx_1 dx_2 dx_3\, dx_1' dx_2' dx_3' . \qquad (2.15)$$

Для свободных частиц имеем

$$G^{(0)}(p_i, p_i') = -i \frac{\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_3-p_3')}{[p_1^2-m_1^2]\,[p_2^2-m_2^2]\,[p_3^2-m_3^2]}\,, \tag{2.16}$$

откуда после интегрирования согласно определению (2.14) найдем:

$$\tilde{G}_p^{(0)}(q_i, q_i') = i\pi^2 \frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\omega_3} \frac{\Delta_p^{(3)}(q_i-q_i')}{[M^2-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2]}\,, \tag{2.17}$$

где

$$\Delta_p^{(3)}(q_i-q_i') = \delta_p(q_1-q_1')\,\delta_p(q_2-q_2')\,\delta_p(q_3-q_3'). \tag{2.18}$$

Определим обратный оператор $\tilde{G}^{-1}$ соотношением

$$\int \tilde{G}_p^{-1}(q_i, q_i'')\,\tilde{G}_p(q_i'', q_i')\,(dq'')\,\delta_p(q_1''+q_2''+q_3'') = \tag{2.19}$$

$$= \Delta_p^{(3)}(q_i-q_i')\,\delta_p(q_1+q_2+q_3)\,.$$

Учитывая равенство

$$\int \Delta_p^{(3)}(q_i-q_i'')\,\Delta_p^{(3)}(q_i''-q_i')\,(dq'')\,\delta_p(q_1''+q_2''+q_3'') = \tag{2.20}$$

$$= \Delta_p^{(3)}(q_i-q_i')\,\delta_p(q_1+q_2+q_3)\,.$$

получим для свободных частиц:

$$\tilde{G}_p^{(0)-1}(q_i,q_i') = \frac{1}{i\pi^2}\Delta_p^{(3)}(q_i-q_i')\frac{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\omega_3}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}\left[M^2-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2\right]. \tag{2.21}$$

Квазипотенциал для задачи трех тел определяется выражением

$$\tilde{G}_p^{-1}(q_i,q_i') = \tilde{G}_p^{(0)-1}(q_i,q_i') - \frac{1}{i\pi^2}V_p(q_i,q_i'). \tag{2.22}$$

Таким образом, уравнение для квазипотенциальной волновой функции трех частиц будет иметь вид:

$$\left[P^2-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2\right]\Psi_p(q_i) = \frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\omega_3}\int V_p(q_i,q_i')\Psi_p(q_i')\times$$
$$\times\,\delta_p(q_1'+q_2'+q_3')\,(dq'). \tag{2.23}$$

Структура уравнения (2.23) для трех частиц в приближении парных взаимодействий будет исследована особо в другом месте.

§3. Обобщение для N частиц

Аналогично случаю трех частиц могут быть получены релятивистски-ковариантные волновые уравнения для N частиц.

Фурье-образ $2N$ -временной функции Грина N частиц с массами m_i определяется выражением

$$G(p_i,p_i') = \frac{1}{(2\pi)^{4N}}\int G(x_i;x_i')\,e^{i\sum_{k=1}^{N}(x_kp_k-x_k'p_k')}\,dx_1\cdots dx_N\,dx_1'\cdots dx_N'. \tag{3.1}$$

Для свободных частиц имеем

$$G^{(0)}(p_i; p_i') = i^N \frac{\delta(p_1-p_1')\delta(p_2-p_2')\cdots\delta(p_N-p_N')}{[p_1^2-m_1^2][p_2^2-m_2^2]\cdots[p_N^2-m_N^2]} . \tag{3.2}$$

Введем новые переменные:

$$p_i = \alpha_i \cdot n + q_i \quad ; \quad p_i' = \alpha_i' n + q_i' ; \tag{3.3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N .$$

Причем

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i' = M \quad ; \quad M = \sqrt{P^2} , \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \sum_{i=1}^{N} q_i' = 0 \quad ; \quad (q_i \cdot P) = (q_i' P) = 0 . \tag{3.4}$$

Определим теперь фурье-образы 2-временной функции Грина частиц:

$$\tilde{G}_P(q_i, q_i') = \int \delta(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N-M)\, G_P(\alpha_i q_i ; \alpha_i' q_i')\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_N\, d\alpha_1' \cdots d\alpha_N' . \tag{3.5}$$

Для свободных частиц, используя формулу (3.2), найдем (см. Приложение)

$$\tilde{G}_p^{(0)}(q_i;q_i') = i\pi^{N-1}\frac{\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_N}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\dots\cdot\omega_N}\cdot\frac{\Delta_p^{(N)}(q_i-q_i')}{\left[M^2-(\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_N)^2\right]}, \tag{3.6}$$

где

$$\omega_i = \sqrt{m_i^2-q_i^2}\ ; \qquad i=1,2,\dots,N. \tag{3.6}$$

Обратный оператор $\tilde{G}^{-1}$ определяется соотношением

$$\int \tilde{G}_p^{-1}(q_i;q_i'')\,\tilde{G}_p(q_i'',q_i')\,\delta_p(q_1''+q_2''+\dots+q_N'')\,(dq'') = \tag{3.7}$$

$$= \delta_p(q_1+q_2+\dots+q_N)\,\Delta_p^{(N)}(q_i-q_i'),$$

где

$$(dq) = dq_1 dq_2 \cdots dq_N\ \delta(nq_1)\delta(nq_2)\cdots\delta(nq_N) \tag{3.8}$$

$$\Delta_p^{(N)}(q_i-q_i') = \delta_p(q_1-q_1')\delta_p(q_2-q_2')\cdots\delta_p(q_N-q_N'). \tag{3.8'}$$

Обобщенный квазипотенциальный оператор для задачи N частиц определяется из уравнения

$$\tilde{G}_p^{-1}(q_i;q_i') = \tilde{G}_p^{(0)-1}(q_i;q_i') - \frac{1}{i\pi^{N-1}}V_p(q_i;q_i') \tag{3.9}$$

где

$$\widetilde{G}_p^{(0)^{-1}}(q_i,q_i') = \frac{\Delta_p^{(N)}(q_i-q_i')}{i\pi^{N-1}} \cdot \frac{\omega_1\cdot\omega_2\cdots\omega_N}{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N}\left[M^2-(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N)^2\right]. \qquad (3.10)$$

Релятивистски-ковариантное квазипотенциальное уравнение для N частиц принимает вид:

$$\left[P^2-(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_N)^2\right]\Psi_p(q_i) = \frac{\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_N}{\omega_1\cdot\omega_2\cdots\omega_N}\int V_p(q_i,q_i')\Psi_p(q_i') \times \qquad (3.11)$$

$$\times\ \delta_p(q_1'+q_2'+\cdots+q_N')(dq')$$

Волновая функция $\Psi_p(q_i)$ связана с амплитудой Бете-Солпитера следующим соотношением:

$$\Psi_p(q_i) = \int d\alpha_1 d\alpha_2\cdots d\alpha_N\,\delta(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N-M)\,\chi_p(\alpha_i n+q_i) \qquad (3.12)$$

и определена для переменных P и q_i, удовлетворяющих дополнительному условию Маркова-Юкавы $(Pq_i)=0$. Нормировка волновой функции (3.12) определяется следующим образом:

$$\int |\Psi_p(q_i)|^2\delta_p(q_1+q_2+\cdots+q_N)(dq) = 1\,. \qquad (3.13)$$

Используя представление (3.12), как и в случае трех частиц, можно показать, что в системе центра инерции $(\vec{P}=0)$ волновая функция $\Psi_{\vec{P}=0}(\vec{q}_i)$ совпадает с фурье-образом амплитуды Бете-Солпитера, взятой при равных временах N частиц.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н.Боголюбову, В.Г.Кадышевскому и А.А. Логунову за интересные обсуждения.

Приложение

Вычислим фурье-образ 2-временной функции Грина N скалярных свободных частиц. Используя переменные (3.3) и определение (3.5), имеем

$$\tilde{G}^{(0)}_{p}(q_i,q_i') = i^N \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_N}{[\alpha_1^2-\omega_1^2]\cdots[\alpha_N^2-\omega_N^2]}\,\delta(p_1-p_1')\cdots\delta(p_N-p_N')\,\delta(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N-M) \qquad (\Pi.1)$$

Преобразуем $\delta(p_i-p_i')$ в формуле (П.1) следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta(p_1-p_1') &= \delta[n_0(\alpha_1-\alpha_1')+(q_{10}-q_{10}')]\,\delta[\vec{n}(\alpha_1-\alpha_1')+(\vec{q}_1-\vec{q}_1{}')] = \\ &= \delta\Big[n_0(\alpha_1-\alpha_1')+\frac{(\vec{q}_1-\vec{q}_1{}',\vec{n})}{n_0}\Big]\,\delta\Big[(\vec{q}_1-\vec{q}_1{}')-\vec{n}\,\frac{(\vec{q}_1-\vec{q}_1{}',\vec{n})}{n_0^2}\Big] = \\ &= \delta(\alpha_1-\alpha_1')\,\delta_p(q_1-q_1'),\end{aligned} \qquad (\Pi.2)$$

где $\delta_p(q_1-q_1') = n_0\,\delta(\vec{q}_1-\vec{q}_1{}')$ – есть инвариантная δ – функция.

Таким образом, выражение (П.1) можно привести к следующему виду:

$$\tilde{G}^{(0)}_{p}(q_i,q_i') = \Delta_p^{(N)}(q_i-q_i')\,F_p^{(N)}(q_i) \qquad (\Pi.3)$$

где

$$F_p^{(N)}(q_i) = i^N \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_N}{[\alpha_1^2-\omega_1^2]\cdots[\alpha_N^2-\omega_N^2]} \delta(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N-M). \tag{П.4}$$

Для $N=2$ интеграл в формуле (П.4) легко вычислить, принимая во внимание бесконечно малые отрицательные мнимые части $\omega_i \Rightarrow \omega_i - i0$:

$$F_p^{(2)}(q_i) = i^2 \int \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2\, \delta(\alpha_1+\alpha_2-M)}{[\alpha_1^2-\omega_1^2][\alpha_2^2-\omega_2^2]} = \tag{П.5}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{[(\frac{M}{2}+\varepsilon)^2-\omega_1^2][(\frac{M}{2}-\varepsilon)^2-\omega_2^2]} = i\pi\, \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\cdot\omega_2}\cdot\frac{1}{[M^2-(\omega_1+\omega_2)^2]}.$$

В общем случае при $N>2$ вычисление величины $F_p^{(N)}(q_i)$ может быть произведено на основании принципа математической индукции. Используя соотношение

$$F_p^{(N+1)}(q_i) = i\int F_{p'}^{(N)}(q_i)\frac{dM'}{[(M-M')^2-\omega_{N+1}^2]} \tag{П.6}$$

где $p = M\cdot n \quad ; \quad p' = M'\cdot n$

нетрудно показать, что

$$F_p^{(N)}(q_i) = i\pi^{N-1}\, \frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N}{\omega_1\cdot\omega_2\cdots\omega_N}\cdot\frac{1}{[M^2-(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N)^2]} \tag{П.7}$$

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 300 (1963).

2. V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze. Preprint, E2-3498, Dubna, 1967.

3. B.A.Arbuzov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, R.N.Faustov. Phys. Lett., 2, 150 (1962).

A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Nuovo Cim., 30, 134 (1963);

Б.А.Арбузов, А.А.Логунов, А.Т.Филиппов, О.А.Хрусталев, ЖЭТФ, 46, (1964).

A.T.Filippov. Phys. Lett., 9, 78 (1964);

В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. Лекция в Школе теоретической физики, Варна, 1968.

R.Blankenbecler, R.Sugar. Phys.Rev., 142, 1051 (1965);

Z.A.P.Balazs. Phys.Rev., 137, B1510 (1965);

R.Arnold. Phys.Rev., 153, 1523 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1968 года.