ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3897

Нгуен Ван Хьеу, Нгуен Нгок Тхуан
В.А.Сулейманов

О ХАРАКТЕРЕ СУЖЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПИКОВ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД И НАЗАД

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Р2 - 3897

Нгуен Ван Хьеу, Нгуен Нгок Тхуан
В.А.Сулейманов

О ХАРАКТЕРЕ СУЖЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПИКОВ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД И НАЗАД

Направлено в Annales de l'Institut Henri Poincare

§1. Введение

В работах [1-4] было показано, что общие требования аналитичности и унитарности приводят к некоторым ограничениям на асимптотическое поведение сечений упругих и неупругих процессов. Определяя ширину дифракционного пика как отношение:

$$W = \frac{1}{\frac{d}{dt}\left[\ln \frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}},$$

Финн [5], Ковальский [6], Киношита [7] и Бессис [8] показали, что w не может убывать быстро с ростом s. Другими характеристиками дифракционного пика для двухчастичных (упругих и неупругих) процессов типа:

$$a + b \to c + d \tag{1}$$

являются отношения

$$\Delta_I = \frac{1}{\sigma_I}\frac{d\sigma_I}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{2kk'}\frac{d\sigma_I}{d\cos\theta}\Big|_{\theta=0}$$

$$\delta_I(t) = \frac{1}{\sigma_I}\frac{d\sigma_I}{dt}, \quad \delta_I'(\theta) = -\frac{1}{\sigma_I}\frac{d\sigma_I}{d\cos\theta}. \tag{1}$$

Здесь k и k' - трехмерные импульсы начальных и конечных частиц в с.ц.м., а t_0 - значение передачи импульса при нулевом угле, $\Delta_I = \delta_I(t) = \delta_I'(0)$.

При больших s мы имеем $2kk' = \frac{s}{2}$. Для процессов множественного рождения

$$a + b \to c + \ldots\ldots \qquad (\Pi)$$

можно ввести аналогичные величины

$$\Delta_{II} = \frac{1}{\sigma_{II}} \frac{2}{s} \frac{d\sigma_{II}}{d\cos\theta}, \quad \delta'_{II}(\theta) = \frac{1}{\sigma_{II}} \frac{d\sigma_{II}}{d\cos\theta}, \qquad (2)$$

где $\frac{d\sigma_{II}}{d\cos\theta}$ – сечение рождения частицы "c" под данным углом θ, проинтегрированное по всем остальным переменным. В работах /4,9/ были получены неравенства при $s \to \infty$:

$$\Lambda_{I,II} \leq \text{const} \ln^2 s, \ \delta'_{I,II}(\theta) \leq \text{const} \frac{\sqrt{s}\ln s}{\sin\theta}, \ \delta_I(t) \leq \text{const} \frac{\ln s}{|t|^{1/2}}. \qquad (3)$$

В настоящей работе мы обобщим эти результаты и установим неравенства, содержащие явные выражения для констант, стоящих перед указанными функциями от s .

Экспериментальная проверка соотношений типа (3) оказывается затруднительной, так как для этой цели необходимо измерить дифференциальные сечения при нулевом угле. Ввиду этого мы обобщим соотношения типа (3) и введем неравенства, содержащие только дифференциальные сечения в некотором интервале углов.

Для рассеяния назад можно также получить неравенство, аналогичное неравенству для $\Delta_{I,II}$. Однако эксперимент показывает, что главный вклад в полные сечения $\sigma_{I,II}$ дает интервал малых углов, а сечения при угле $\theta \approx 180^0$ убывают достаточно быстро. Поэтому верхняя граница

$$\frac{1}{\sigma_{I,II}} \frac{2}{s} \frac{d\sigma_{I,II}}{d\cos\theta}\Big|_{\theta = 180^0} \leq \text{const} \ln^2 s$$

оказывается весьма завышенной. Мы покажем, что в действительности имеют место более сильные ограничения: вместо $\sigma_{I,II}$ в знаменателе левой части последней формулы можно подставить сечение, проинтегрированное по заднему полушарию (интеграл по $\cos\theta$ от -1 до 0).

Ради простоты будем рассматривать только случай бесспиновых частиц.

§2. Аналитические свойства амплитуды упругого рассеяния и поведение при комплексных передачах импульса

Полученные нами результаты являются следствиями аналитичности амплитуд упругого рассеяния (процесс 1) $F(s,t)=f(s,z)$ по передаче импульса t (или по $z=\cos\theta$).

Как известно, из общих принципов локальной квантовой теории поля следует, что для ряда процессов функция аналитична в топологическом произведении круга $|t|\leq\gamma$ и плоскости s с вещественными разрезами и полюсами (см. [10-12]). Мы предположим, что обобщенные функции в локальной теории поля представляют собой линейные функционалы на пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций, т.е. представляют собой обобщенные функции умеренного роста [13,14]. Тогда для всех t в круге $|t|\leq\gamma$ амплитуда $F(s,t)$ полиномиально ограничена и удовлетворяет дисперсионному соотношению по s с конечным числом вычитаний:

$$F(s,t)=\sum_{n=0}^{N} c_n(t)\, s^n+\frac{s^{N+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} F(s',t)}{s'^{N+1}(s'-s)}\,ds'. \tag{4}$$

Разложим амплитуду $F(s,t)=f(s,z)$ по парциальным волнам:

$$f(s,z)=8\pi\frac{\sqrt{s}}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,a_\ell P_\ell(z), \tag{5}$$

где k –трехмерный импульс частиц в с.ц.м. Положим $z_0=1+\frac{\gamma}{2k^2}$. Обозначим через E_{z_0} эллипс с фокусами в точках $z=\pm 1$ и с большой полуосью z_0. Тогда для всех z, лежащих внутри и на границе E_{z_0}, имеет место неравенство $|P_\ell(z)| \le P_\ell(z_0)$. С другой стороны, в силу условия унитарности

$$\operatorname{Im} a_\ell(s) \ge | a_\ell |^2 \ge 0 . \tag{6}$$

Поскольку функция $f(s,z)$ аналитична по z вплоть до точки $z = z_0$, то ряд для мнимой части:

$$\operatorname{Im} f(s,z) = 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \operatorname{Im} a_\ell(s) P_\ell(z) \tag{7}$$

сходится в точке $z = z_0$. Следовательно, последний ряд должен абсолютно и равномерно сходиться в эллипсе E_{z_0} и на его границе, и определять функцию, аналитическую по t в этом замкнутом эллипсе и равномерно и полиноминально ограниченную по s.

Следуя методу Гринберга и Лоу и используя условие (3), мы можем получить на основе этих свойств аналитичности и полиномиальной ограниченности оценки Фруассара

$$| F(s,0) | \le \text{cons } s \ln^2 s \tag{8}$$

$$| F(s,t) |_{t<0} \le \text{const } s^{3/4} (\ln s)^{3/2} . \tag{9}$$

В работе Жина и Мартэна /15/ было доказано следующее утверждение:

Если $F(s,t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению с двумя вычитаниями по s при значениях t, лежащих в некотором круге $|t| \le a$ с малым, но конечным радиусом a $(a < \gamma)$, то из (4) и условия унитарности следует, что она удовлетворяет дисперсионному соотношению с двумя вычитаниями по s при всех t, лежащих в круге $|t| \le \gamma$.

Мы покажем теперь, что $F(s,t)$ действительно удовлетворяет дисперсионному соотношению с двумя вычитаниями для всех t в некотором круге $\Pi|t| \leq a$.

Посредством конформного отображения

$$\xi = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

мы преобразуем эллипс E_{z_0} в кольцо с центром в точке $\xi = 0$, малым радиусом 1 и внешним радиусом R

$$R = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}$$

и положим $g(s,\xi) = \mathrm{Im}\, f(s,z)$. Обозначим через m и M максимальные значения $|g(s,\xi)|$ на окружностях $|\xi| = 1$ и $|\xi| = R$ соответственно. Так как в интервале $-1 \leq z \leq 1$ $|P_\ell(z)| \leq P_\ell(1) = 1$, а $\mathrm{Im}\, a_\ell(s) \geq 0$, то в этом интервале $|\mathrm{Im}\, f(s,z)|$ всегда меньше $\mathrm{Im}\, f(s,1)$ и из неравенства (8) следует, что

$$m \leq \mathrm{const}\; s^{1+\delta} \tag{10}$$

для любого сколь угодно малого $\delta > 0$. С другой стороны, в силу условия полиномиальной ограниченности

$$M \leq \mathrm{const}\; s^N . \tag{11}$$

Применяя теорему Адамара о трех кругах /17/, мы получим для любого z в интервале $1 \leq z \leq z_0$

$$\ln|\mathrm{Im}\; f(s,z)| \leq \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R}\right)\ln m + \frac{\ln r}{\ln R}\ln M \leq$$

$$\leq \left[\left(1 - \frac{\ln r}{\ln R}\right)(1+\delta) + \frac{\ln r}{\ln R} N\right]\ln s, \quad r = z + \sqrt{z^2 - 1}. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $N \geq 2$. На основе соотношения (12) легко увидеть, что

$$|\operatorname{Im} f(s,z)| \leq \text{const}\ s^{2-\epsilon} \tag{13}$$

для некоторого $\epsilon > 0$, если

$$\frac{\ln r}{\ln R} < \frac{1-\delta-\epsilon}{N-1-\delta} .$$

Это условие выполняется, в частности, при $1 \leq r \leq r_0$,

$$\frac{\ln r_0}{\ln R} < \frac{1}{2N} .$$

Иначе говоря, для всех z в интервале $1 \leq z \leq 1 + \frac{\beta}{2k^2}$, $\beta = \frac{\gamma}{4N^2}$ имеет место неравенство (13). В силу условия унитарности и свойств полиномов Лежандра оно справедливо при всех z в эллипсе E_{z_1} с фокусами в точках $z = \pm 1$ и с большой полуосью $z_1 = 1 + \beta/2k^2$, в частности, при всех z в круге $|z-1| \leq \frac{\beta}{2k^2}$.

Таким образом, для всех $|t| \leq \beta$ имеет место дисперсионное соотношение:

$$F(s,t) = \sum_{n=0}^{N} d_n(t)\, s^n + \frac{s^2}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} F(s',t)}{s'^2(s'-s)}\, ds' , \tag{14}$$

где функции $d_n(t)$ аналитичны по t в данном круге. Соотношение (9) показывает, что $d_n(t) = 0$ при $n \geq 2$ для всех t в некотором интервале $t_2 \leq t \leq t_1 < 0$. Они тождественно равны нулю и при всех t в круге $|t| = \beta$. Из этих результатов и теоремы Жина и Мартэна /15/ следует, что дисперсионное соотношение с двумя вычитаниями по s справедливо для всех $|t| \leq \gamma$.

Если же константа N в (11) меньше 2, то последнее утверждение вытекает непосредственно из соотношения (14) для всех $|t| \leq \gamma$. Таким образом, интеграл

$$\int \frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s'^2(s'-2)} ds' \tag{15}$$

абсолютно сходится при всех t в круге $|t| \leq \gamma$ и, следовательно, при всех t в эллипсе $E_\gamma^{(t)}$ с фокусами в точках $t = 0$ и $t = -4k^2$ и с большой полуосью $2k^2 + \gamma$. В частности,

$$|\operatorname{Im} F(s, t)| \leq \text{const } s^2 \tag{16}$$

для всех t в $E_\gamma^{(t)}$.

Сделаем теперь одно предположение. Допустим, что $F(s, t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению с конечным числом вычитаний по s при всех t в эллипсе $E_\gamma^{(t)}$. Тогда в силу абсолютной сходимости интеграла (15) мы напишем дисперсионное соотношение (14) для всех t в этом эллипсе. На основе (9) мы заключаем, что дисперсионное соотношение с двумя вычитаниями по ts имеет место тогда для всех t в эллипсе $E_\gamma^{(t)}$. В частности,

$$|F(s, t)| \leq \text{const } s^2 \tag{17}$$

для всех t в $E_\gamma^{(t)}$.

§3. *Поведение дифракционных пиков упругих и неупругих процессов*

Применим теперь к функции $\operatorname{Im} f(s, z)$, аналитической в эллипсе E_{z_0}, формулу Коши (следуя Гринбергу и Лоу /2/)

$$\operatorname{Im} f(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial E_{z_0}} \frac{\operatorname{Im} f(s, t')}{z' - z} ds', \tag{18}$$

где ∂E_{z_0} обозначает границу эллипса E_{z_0}. Пользуясь теперь известной формулой

$$\frac{1}{z'-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\; P_\ell(z)\, Q_\ell(z'), \tag{19}$$

мы можем получить отсюда:

$$\mathrm{Im}\, a_\ell(s) = \frac{k}{16 i \pi^2 \sqrt{s}} \oint_{\partial E_{z_0}} \mathrm{Im}\, f(s,z')\, Q_\ell(z')\, dz'. \tag{20}$$

Так как на контуре ∂E_{z_0}

$$|Q_\ell(z')| \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^{1/2} \frac{\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)^{-(\ell+1)}}{\left(1-\frac{1}{\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)}\right)^{1/2}},$$

то из формулы (20) следует неравенство

$$\mathrm{Im}\, a_\ell(s) \le \frac{R(s)}{\ell^{1/2}} \left[1+2\sqrt{\frac{\gamma}{s}}\right]^{-\ell}, \tag{21}$$

$$R(s) = \mathrm{const}\; s^{9/4}.$$

В силу условия унитарности (6) мы имеем:

$$|a_\ell| \le \mathrm{const}\; \frac{s^{9/8}}{\ell^{1/4}} \left[1+2\sqrt{\frac{\gamma}{s}}\right]^{-\ell/2}. \tag{22}$$

Обозначим через L такое ℓ, при котором $R(s)\left[1+2\sqrt{\frac{\gamma}{s}}\right]^{-\ell}$ равна единице:

$$L = \frac{\ln R(s)}{\ln\left[1+2\sqrt{\frac{\gamma}{s}}\right]} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\gamma}}\, \ln R(s), \quad s \to \infty \tag{23}$$

и рассмотрим ряд (5) при $z = 1$. Разобьем его на две части

$$\left[\sum_{\ell=0}^{(1+\nu)L-1} + \sum_{(1+\nu)L}^{\infty} \right] \left[(2\ell + 1)\, a_\ell(s) \right],$$

где ν - некоторое подходящее положительное число, для которого $(1+\nu)L$ --целое. Из (22) нетрудно получить следующую оценку для второй суммы:

$$\left| \sum_{\ell=(1+\nu)L}^{\infty} (2\ell + 1)(a_\ell(s) \right| \le \frac{1}{R^{\nu/\theta} L^{1/4}} \left[2(1+\nu)\, L \sqrt{\frac{s}{\gamma}} + 2\, \frac{s}{\gamma} \right]. \tag{24}$$

Для оценки первой суммы мы пользуемся неравенством Шварца.

Мы имеем тогда:

$$\left| \sum_{\ell=0}^{(1+\nu)L-1} (2\ell+1)\, a_\ell \right|^2 \le (1+\nu)^2 L^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left| a_\ell \right|^2 =$$

$$=(1+\nu)^2 L^2 \frac{s}{16\pi} \sigma_{el} , \tag{25}$$

где σ_{el} - полное сечение упругого рассеяния. Напомним, что дифференциальное сечение равно:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{1}{64\pi s k^2} \left| F(s, t) \right|^2 .$$

Мы будем выбирать ν так, чтобы

$$\sigma_{el}^{1/2} \gg \frac{1}{R^{\nu/2} L^{1/4}} . \tag{26}$$

Тогда вторая сумма исчезающе мала по сравнению с первой.

Предположим, что $\sigma_{el} > \text{const}\, s^{-\rho}$, $\rho > 0$. В этом случае из (26) следует, что

$$s^{-\rho} \gg s^{-\frac{9}{4}\nu - \frac{1}{4}} , \quad s \to \infty .$$

Отсюда получаем условие для ν : $\nu > \frac{4}{9}\rho - \frac{1}{9}$. Ради удобства мы выберем $\nu = \frac{4}{9}(\rho + \epsilon) - \frac{1}{9}$, где ϵ –достаточно малое положительное число, и получим:

$$\frac{1}{\sigma_{el}} \frac{d\sigma_{el}}{dt}\Big|_{t=0} \leq [1 + \frac{\rho+\epsilon}{2}]^2 \frac{1}{\gamma} \ln^2 \frac{s}{s_0} [1 + 0(\frac{s_0^\epsilon}{s^\epsilon})] . \tag{27}$$

Соотношения такого типа, содержащие неизвестные константы, были получены впервые в работе /9/. Предположим, что полное сечение стремится к постоянной при $s \to \infty$, т.е. $\rho = 0$. Тогда имеем:

$$\frac{1}{\sigma_{el}} \frac{d\sigma_{el}}{dt}\Big|_{t=0} \leq \frac{1}{\gamma} \ln^2 \frac{s}{s_0} .$$

В случае рассеяния на ненулевой угол, воспользовавшись оценкой для полиномов Лежандра

$$| P_\ell(\cos\theta) | \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \ell \cos\theta}}, \quad \theta \neq 0, \pi ,$$

можно получить аналогичные соотношения

$$\frac{1}{\sigma_{el}} \frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta}\Big|_{\theta\neq 0,\pi} \leq \frac{s^{1/2}\ln(s/s_0)}{\pi \sin\theta \sqrt{\gamma}} [1 + \frac{\rho+\epsilon}{2}] \tag{28}$$

$$\frac{1}{\sigma_{el}} \frac{d\sigma_{el}}{dt}\Big|_{t\neq 0} \leq \frac{\ln s/s_0}{\pi\sqrt{|t|\gamma}} [1 + \frac{\rho+\epsilon}{2}] . \tag{29}$$

Теперь рассмотрим процесс

$$a + b \to c + d . \tag{П}$$

Разложим амплитуду $T(s, z)$ на парциальные волны

$$T(s, z) = 8\pi \sqrt{\frac{s}{kk'}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) b_\ell(s) P_\ell(z) , \tag{30}$$

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ –трехмерные импульсы начальных и конечных частиц.

Условие унитарности имеет вид:

$$\mathrm{Im}\; a_\ell(s) = |\, a_\ell(s)\,|^2 + |\, b_\ell(s)\,|^2 + \ldots . \tag{31}$$

Из (31) и (21) мы имеем

$$|\, b_\ell(s)\,| < \sqrt{\mathrm{Im}\;\; a_\ell(s)} < \frac{R^{1/2}}{L^{1/4}} \left[1 + 2\sqrt{\frac{\gamma}{s}} \right]^{-\ell/2} . \tag{32}$$

Повторяя те же вычисления, что и для упругих процессов, мы получим:

$$\frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma_{inel}}{dt} \Big|_{t=0} \leq \frac{1}{\gamma} \left[1 + \frac{\rho' + \epsilon}{2} \right]^2 \ln^2 s/\, s_0 \tag{33}$$

$$\frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma_{inel}}{dt} \Big|_{t\neq 0} \leq \frac{\ln s/s_0}{\pi\sqrt{|\,t\,|\,\gamma}} \left[1 + \frac{\rho' + \epsilon}{2} \right] \tag{34}$$

$$\frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma_{inel}}{d\cos\theta} \Big|_{\theta\neq 0,\pi} \leq \frac{s^{1/2} \ln s/s_0}{\pi \sin\theta \sqrt{\gamma}} \left[1 + \frac{\rho' + \epsilon}{2} \right] . \tag{35}$$

Здесь ρ' – константа такая, что при $s \to \infty$ $\sigma_{inel} > \mathrm{const}\; s^{-\rho'}$.

Наконец, мы рассмотрим процесс множественного рождения

$$a + b \to c + A ,$$

где A обозначает всевозможные системы адронов. В работе /4/ было показано, что полное сечение неупругих процессов вида (III) с рождением частицы "с" под данным углом θ имеет вид:

$$\frac{d\sigma^c}{d\cos\theta} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) P_\ell(\cos\theta)\, P_{\ell'}(\cos\theta)\, C_{\ell\ell'} , \tag{36}$$

где, в силу условия унитарности, коэффициенты $C_{\ell\ell'}$ связаны с мнимыми частями парциальных амплитуд упругого рассеяния (1) неравенством

$$|C_{\ell\ell'}| < \sqrt{\operatorname{Im} a_\ell(s)\operatorname{Im} a_{\ell'}(s)}\;. \tag{37}$$

Подставляя (21) в (37), получаем

$$|C_{\ell\ell'}| < \mathrm{const}\; s^{9/4}\left[1+2\sqrt{\frac{\gamma}{s}}\right]^{-\frac{\ell+\ell'}{2}}\;. \tag{38}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, мы можем получить на основе (37) и (31) следующие оценки:

$$\frac{1}{\sigma^c}\,\frac{d\sigma^c}{d\cos\theta}\Big|_{\theta=0} \le \frac{s}{2}\,\frac{1}{\gamma}\left[1+\frac{\rho''+\epsilon}{2}\right]^2 \ln^2(s/s_0) \tag{39}$$

$$\frac{1}{\sigma^c}\,\frac{d\sigma^c}{d\cos\theta}\Big|_{\theta\neq 0,\pi} \le \frac{s^{1/2}\ln s/s_0}{\pi\sin\theta\sqrt{\gamma}}\left[1+\frac{\rho''+\epsilon}{2}\right], \tag{40}$$

где ρ'' – константа такая, что $\sigma^c > \mathrm{const}\; s^{-\rho''}$ при $s\to\infty$.

§4. *Некоторые обобщения*

Формула (27) имеет место также для сечения рассеяния назад (на угол $\theta = 180$). Однако поскольку основной вклад в $\sigma(s)$ дает интервал углов вблизи $\theta = 0^0$, а дифференциальное сечение при $\theta > \frac{\pi}{2}$ убывает с ростом s, как это показывает эксперимент, то эта формула практически не представляет интерес для рассеяния назад. Для изучения характера дифракционного пика назад мы введем вместо полного сечения упругого рассеяния $\sigma(s)$ полное сечение рассеяния на заднюю полусферу $\sigma_{наз}(s)$

$$\sigma_{\text{наз}}(s) = \int_{-1}^{0} \frac{d\sigma}{dz}\, dz\,. \tag{41}$$

Покажем теперь, что величина $\frac{1}{\sigma_{\text{наз}}} \frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=-4k^2}$ также удовлетворяет неравенству типа (27).

Вместо строго доказанных аналитических свойств мы предположим, что $F(s,t)$ аналитична в топологическом произведении эллипса $E_\gamma^{(1)}$ и плоскости s с разрезами. Тогда, как это было показано в §2, имеет место неравенство (17).

Обозначим через E' эллипс с фокусами в точках $z=-1$ и $z=0$ и с большой полуосью $z_0' = \frac{1}{2} + \frac{2\gamma}{s}$, $s \to \infty$. Можно показать, что этот эллипс содержится в эллипсе Мартэна E_{z_0}. Поэтому $f(s,z)$ является аналитической функцией в E'. Посредством замены переменных

$$w = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

мы преобразуем E' в эллипс Мартэна E_{w_0} в плоскости w с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с большой полуосью $w_0 = 1 + \frac{4\gamma}{s}$, $s \to \infty$. Положим $f(s,z) \equiv g(s,w)$ и разложим $dg(s,w)$ по полиномам Лежандра

$$g(s,w) = 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum (2\ell+1)\, a_\ell'(s)\, P_\ell(w) \tag{42}$$

Из аналитичности $g(s,w)$ и условия (17) следует, что

$$|a_\ell'(s)| < \frac{R'(s)}{L^{1/2}}\left[1 + 2\sqrt{\frac{2\gamma}{s}}\right]^{-\ell}, \tag{43}$$

где

$$R'(s) = \text{const}\; s^{9/4}. \tag{44}$$

Повторяя все приведенные в §3 рассуждения, мы получим

$$\frac{1}{\sigma_{\text{наз}}}\;\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=-4k^2}\le\frac{1}{\gamma}\left[1+\frac{r+\epsilon}{4}\right]^2\ln^2 s/s_0\left[1+0\left(\frac{s_0^{\epsilon}}{s^{\epsilon}}\right)\right]. \tag{45}$$

Здесь r – положительная константа такая, что при $s\to\infty$ $\sigma\ (s)\ge \text{const}\ s^{-r}$.

На опыте весьма трудно определить дифференциальное сечение при $\theta=0$ и $\theta=180^0$. Ради удобства экспериментальной проверки мы слегка модифицируем полученные соотношения (27) и (45). Как и в начале этого параграфа, мы преположим аналитичность $F(s,t)$ в топологическом произведении эллипса $E_\gamma^{(1)}$ и плоскости s с разрезами. Для определенности рассмотрим рассеяние на малый угол (вперед). Обозначим через t_1 и t_2 некоторые фиксированные отрицательные значения t $t_2<t_1<0$. Легко показать, что максимальный эллипс E'' с фокусами в точках t_2 и t_1, содержащийся в эллипсе Мартэна, имеет большую полуось

$$t_0=\left|\frac{t_2-t_1}{2}\right|\left[1+\frac{4\gamma}{s}\right].$$

Посредством отображения

$$u=\frac{1}{t_1-t_2}\;\frac{t}{2}-\frac{t_1+t_2}{t_1-t_2},\qquad t_1\ne t_2$$

мы преобразуем эллипс E'' в эллипс E_{u_0} в плоскости u с фокусами в $u=\pm 1$ и с большой полуосью $u_0|=1+\frac{4\gamma}{s}$. При помощи изложенного метода можно получить следующее неравенство

$$\frac{1}{\Delta_t\,\sigma_{\text{впер}}}\;\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=t_1}\le\frac{1}{\gamma}\;\frac{s}{|t_2-t_1|}\left[1+\frac{r'+\epsilon}{4}\right]^2\ln^2 s/s_0\ , \tag{46}$$

где

$$\Delta_t\sigma=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\sigma}{dt}\,dt.$$

Аналогично можно установить соответствующее неравенство для рассеяния назад:

$$\frac{1}{\Delta_t\, \sigma_{\text{наз.}}} \frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=-4k^2+|t_1|} \le \frac{1}{\gamma} \frac{s}{|t_2-t_1|} \left[1+\frac{r''+\epsilon}{4}\right]^2 \ln^2 s/s_0 \;, \tag{47}$$

где

$$t = -4k^2 + |t_1|,$$

$$\Delta'_t\, \sigma_{\text{наз}} = \int\limits_{t=-4k^2+|t_1|} \frac{d\sigma}{dt}\, dt \;,$$

Здесь r' и r'' -константы, такие, что при $s \to \infty$

$$\sigma_{\text{впер}}(s) \ge \text{const}\; s^{-r'}, \quad \sigma_{\text{наз}} \ge \text{const}\; s^{-r''} .$$

§5. Об одном следствии представления Мандельстама

Предположим, что амплитуда упругого рассеяния $F(s,t)$ аналитична по t во всей плоскости t с полюсами и разрезами на вещественной оси. Пусть далее эта амплитуда полиномиально ограничена при $s \to \infty$ и пусть при каждом фиксированном t:

$$|F(s,t)| \le \text{const}\; s^{N(t)} \quad , s \to \infty . \tag{48}$$

Рассматриваемая как функция от z амплитуда рассеяния $f(s,z)$ также аналитична во всей плоскости z с полюсами и разрезами на вещественной оси.

Выделим теперь некоторый интервал $-1 < z_2 \le z \le z_1 < 1$ и рассмотрим максимальный эллипс E''' с фокусами в точках $z=z_1$ и $z=z_2$, содержащийся в области аналитичности $f(s,z)$. Большая полуось этого эллипса равна $a = 1 + \frac{2\gamma}{s} - \frac{z_1+z_2}{2}$. Посредством замены переменных

$$\eta = \frac{2}{z_2 - z_1}\left[z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right] \tag{49}$$

мы преобразуем эллипс E''' в эллипс E_{η_0} в плоскости с фокусами в точках ± 1 и с большой полуосью $\eta_0 = \frac{2}{z_2 - z_1}\left[1 + \frac{2\gamma}{s} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right]$. С помощью изложенного выше метода можно получить следующее неравенство:

$$\frac{1}{\Delta_\theta \sigma} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\Big|_{\theta = \theta_1} \le \frac{(1+\nu)^2 M^2 \ln^2 s/s_0}{\ln^2 g(z_1, z_2)(z_1 - z_2)}, \tag{50}$$

где

$$\Delta_\theta \sigma = \int_{\cos\theta_2}^{\cos\theta_1} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\, d\cos\theta, \quad g(z_1, z_2) = \frac{2}{|z_2 - z_2|}\left[1 - \frac{z_1 + z_2}{2} + (1 + z_1 z_2 - z_1 - z_2)^{1/2} \right]$$

$$M = \max N(t) = \max N\left(\frac{s}{2}(1 - z)\right), \quad z \in c,$$

где c –круг в плоскости z с радиусом $1 + 2\gamma/s$. Если $F(s,t)$– равномерно полиномиально ограничена (представление Мандельстама), т.е. $N(t) \le n$, то имеем:

$$\frac{1}{\Delta_\theta \sigma} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\Big|_{\theta = \theta_1} \le \frac{(1+\nu)^2 n^2 \ln^2 s/s_0}{\ln^2 g(z_1, z_2)(z_1 - z_2)}. \tag{51}$$

На основе предположений, аналогичных нашим, Церулус и Мартэн /16/ получили нижнюю границу убывания сечений при фиксированном угле и $s \to \infty$. Эмпирическая формула Орира /18/

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = A\, e^{-\frac{p}{p_0}\sin\theta} \qquad \text{для} \quad \theta > 70^0, \tag{52}$$

где P и θ – импульс падающей частицы и угол рассеяния в с.ц.м. A и P_0 – некоторые константы, не противоречит оценке Церулуса и Мартэна. Однако формула Орира нарушает полученное нами неравенство (50). Действительно, мы можем подобрать константы a и b так, чтобы неравенство $A e^{-\frac{P}{P_0}\sin\theta} < A\, e^{-\frac{P}{P_0}[a+b\cos\theta]}$ имело место во всем интервале углов $0 < \theta_1 \le \theta \le \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Легко видеть, что параметры a и b будут такими:

$$a = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2} \ (>0), \quad b = \frac{\sin\theta_1 - \sin\theta_2}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2} \ (<0). \tag{53}$$

Тогда из (52) следует, что

$$\Delta_\theta \sigma = \int_{\cos\theta_1}^{\cos\theta_2} A e^{-\frac{P}{P_0}\sin\theta} d\cos\theta < \int_{\cos\theta_1}^{\cos\theta_2} A e^{-\frac{P}{P_0}[a+b\cos\theta]} d\cos\theta =$$

$$= P_0 \frac{e^{-\frac{P}{P_0}a}}{P\, b}\left[e^{-\frac{P}{P_0} b\cos\theta_1} - e^{-\frac{P}{P_0} b\cos\theta_2} \right].$$

Таким образом, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta_\theta \sigma} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\Big|_{\theta=\theta_1} \ge \text{const}\sqrt{s}, \quad s \to \infty,$$

что противоречит неравенству (50)[x]. Вообще говоря, неравенство (50) оказывается весьма полезным при анализе экспериментальных данных по рассеянию на большие углы.

---

x) *Это, однако, не означает, что наши результаты являются более сильными, чем результаты Церулуса и Мартэна. Нетрудно найти поведения, согласующиеся с неравенством (50), но противоречашие оценке Церулуса и Мартэна.*

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову, Д.И.Блохинцеву, А.А.Логунову, А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе .

Литература

1. Froissart, Phys. Rev., <u>123</u>, 1053 (1961).
2. O.W.Greenberg and F.Low, Phys. Rev., 124, 2047 (1961).
3. A.Martin, Phys. Rev., 129, 1432 (1964).
4. A.A.Logunov, M.A.Mestirishvili, Nguyen Van Hieu, Phys. Rev., Lett, 25B, 611 (1967).
5. A.C.Finn, Phys. Rev., 132, 2, 836 (1963).
6. K.L.Kowalski, Phys. Rev., 134, B1350 (1965).
7. T.Kinoshita, Leotures in theoretical Physics, vol.7-8 (1965).
8. T.D.Bessis, Nuovo Cim, 45, 974 , 1966.
9. A.A.Logunov, Nguyen nav Hieu, Repport at the Topical Conference on High EnergyCollision of Hadron, CERN Geneva, 1968; Preprint JINR - 1968.
10. A.Martin, Nuovo Cim, 42A, 430 (1966), 44A, 1219 (1966).
11. J.D.Bessis, V.G.Glaser, Nuovo Cim, 50, 568 (1967).
12. G.Sommer, Nuovo Cim, 52A, 373 (1967).
13. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ 1958.
14. R.S.Streater and A.S.Wightman, CPT, Spin, Statistic and all that, Benjamin, 1964.
15. Y.S.Jin and A.Martin, Phys. Rev., 135, B1375 (1964).
16. F.Cerulus and A.Martin, Phys. Lett., 8, 89 (1964).
17. E.C.Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press, 1939.
18. J.Orear. Phys. Rev. Lett., <u>12</u>, 112 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1968 года.