ЯФ, 1969, т.9, в.3, с.665-669

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3866

М.А.Либерман

О ПОЛЮСАХ РЕДЖЕ ПРИ РАССЕЯНИИ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3866

М.А.Либерман

О ПОЛЮСАХ РЕДЖЕ ПРИ РАССЕЯНИИ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Направлено в ЯФ

1. В ряде недавно появившихся работ[1,2,3] было показано, что полюса Редже встречаются семействами с определенными пространственными свойствами, что является следствием $0(3,1)$-инвариантности амплитуды рассеяния при нулевом значении передаваемого импульса. Именно, было показано, что каждый полюс лоренц-амплитуды, т.е. коэффициента разложения амплитуды $f(s,t)$ по функциям, реализующим представления группы Лоренца, генерирует бесконечную серию полюсов парциальной амплитуды $a(\ell,s)$ в плоскости комплексного момента ℓ. Причём наряду с ведущим полюсом $\ell=a_0$ появляется ряд "дочерних полюсов": $\ell=a_0-1$, $a_0-2,\ldots$.

Существенно, что появляющиеся таким образом полюса парциальной амплитуды являются фиксированными полюсами в ℓ - плоскости - "кинематическими полюсами".

Траектории же Редже как было показано в[4], могут появиться лишь при некоторых динамических предположениях об асимптотическом поведении лоренц-амплитуды либо при рассмотрении разложения амплитуды рассеяния в конкретной динамической модели.

В[5,6] была исследована амплитуда, являющаяся решением уравнения Бете-Солпитера, причём был выбран определенный тип диаграмм и неоднородный член, инвариантный относительно группы $0(4)$ в нефизической области. Было показано, что каждый полюс в плоскости четырехмерного момента $0(4)$ индуцирует серию полюсов Редже. При этом дочерние полюса соответствуют аномальным решениям уравнения Бете-Солпитера и не могут быть опущены, т.к. их существование обусловлено аналитичностью амплитуды в случае неравных масс.

В этой работе будет показано, что при более высокой симметрии гамильтониана, чем пространственная симметрия группы вращений, в потенциальном рассеянии возникают "дочерние траектории" Редже. Причина существования дочерних полюсов при рассеянии в кулоновском поле – существование группы динамической симметрии у кулоновского потенциала $O(4)$ и $O(3,1)$ для $E<0$ и $E>0$ соответственно.

2. Амплитуда рассеяния в поле кулоновского потенциала $V(r)=-\frac{e^2}{r}$ может быть разложена по парциальным волнам:

$$A(E,t)=\frac{1}{\sqrt{E}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{a(E,\ell)-1}{2i}P_\ell\left(1+\frac{t}{2E}\right);$$

где

$$t=-2E(1-\cos\theta), \qquad (h=c=2m=1).$$

Парциальная амплитуда имеет вид

$$a(E,\ell)=\frac{\Gamma\left(\ell+1-\frac{ie^2}{2\sqrt{E}}\right)}{\Gamma\left(\ell+1+\frac{ie^2}{2\sqrt{E}}\right)}.$$

Полюса Редже определяются положением сингулярностей парциальной амплитуды $a(E,\ell)$ /7/. Положение k-го полюса дается выражением

$$\ell+1-\frac{ie^2}{2\sqrt{E}}=\alpha_k(E)+1-\frac{ie^2}{2\sqrt{E}}=-k, \tag{1}$$

т.е.

$$\alpha_k(E)=-k+\alpha_0(E), \tag{1'}$$

где

$$k=0,1,2,\ldots, \quad \alpha_0(E)=-1+\frac{ie^2}{2\sqrt{E}}.$$

Из явного вида полной амплитуды

$$A(E,t) = \frac{\Gamma(-a_0(E))}{\Gamma(1+a_0(E))}\left(\frac{i}{2\sqrt{E}}\right)\left(-\frac{t}{4E}\right)^{a_0(E)}$$

видно, что асимптотика $A(E,t)$ при $t\to\infty$ определяется полюсами (1) и имеет реджевский тип:

$$A(E,t)_{t\to\infty} \approx g(E)\, t^{a_0(E)} .$$

Из (1) видно также, что траектории Редже расположены семействами из-за вырождения уровней энергии в кулоновском поле по орбитальному моменту, т.е. для данной энергии существуют траектории $\ell = a_0(E)$, $\ell = a_0(E)-1$, ...

3. Покажем, что такая ситуация является непосредственным следствием $0(4)$ – симметрии кулоновского гамильтониана. Для этого удобно вместо амплитуды рассматривать функцию Грина, связь которой с амплитудой известна, а полюса амплитуды и функции Грина совпадают с точностью до полюсов функции $\frac{1}{p^2/2m-E}$.

Швингером было показано/8/, что функция Грина для кулоновского потенциала имеет наиболее простой вид в координатах Фока. Уравнение для функции Грина в импульсном представлении имеет вид

$$\left(E-\frac{p^2}{2m}\right)G(\vec{p},\vec{p}\,') + \frac{e^2}{2\pi^2}\int(d\vec{p}\,'')\frac{G(\vec{p}\,'',\vec{p}\,')}{(\vec{p}-\vec{p}\,')^2} = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,') .$$

Вводя $p_0^2 = -2mE$ и переходя к координатам Фока $(E<0)$, $(\vec{\xi},\xi_0)$, имеем:

$$\vec{\xi} = \frac{2p_0\vec{p}}{p_0^2 + p^2}, \quad \xi_0 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2},$$

$$\xi_0^2 + \vec{\xi}^{\,2} = 1.$$

Учитывая, что элемент объема на 4-мерной сфере

$$d\Omega = \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3}{\xi_0} = \left(\frac{2p_0}{p_0^2 + p^2}\right)^3 (d\vec{p}),$$

а также, что

$$\delta(\Omega-\Omega') = \left(\frac{p_0^2 + p^2}{2p_0}\right)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}\,'), \quad (\xi-\xi')^2 = \frac{4p_0^2}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+p'^2)}(\vec{p}-\vec{p}\,')^2,$$

получаем для функции $\Gamma(\Omega,\Omega')$, связанной с $G(\vec{p},\vec{p}\,')$ соотношением

$$G(\vec{p},\vec{p}\,') = -16\, m p_0^3 \frac{1}{(p_0^2 + p^2)^2} \Gamma(\Omega,\Omega') \frac{1}{(p_0^2 + p'^2)^2},$$

следующее интегральное уравнение:

$$\Gamma(\Omega,\Omega') - \nu \int d\Omega''\, D(\xi'',\xi)\, \Gamma(\Omega'',\Omega') = \delta(\Omega-\Omega'). \tag{2}$$

Здесь $\nu = \frac{e^2 m}{p_0}$, а $D(\xi,\xi') = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(\xi - \xi')^2}$ – функция Грина четырехмерного лапласиана.

Решение уравнения (2) может быть просто получено в виде разложения по функциям, реализующим неприводимые представления группы $O(4)$. (Здесь речь идет о вырожденных представлениях типа $(n,0)$, реализуемых в кулоновской задаче). Разложение функции $D(\xi,\xi')$ может быть найдено из соответствующего разложения для ядра Пуассона [9], оно имеет вид:

$$D(\xi,\xi') = \sum_{n,a} \frac{1}{n} \Phi_{n,a}(\Omega)\Phi^*_{n,a}(\Omega'). \qquad (3)$$

Подставив разложение (3) в (2) и воспользовавшись свойствами ортонормируемости $\Phi_{n,a}(\Omega)$, найдем:

$$\Gamma(\Omega,\Omega') = \sum_{n,a} \frac{1}{(1-\frac{\nu}{n})} \Phi_{n,a}(\Omega)\Phi^*_{n,a}(\Omega'), \qquad (4)$$

где через a обозначены два квантовых числа, зависящие от выбора подгруппы группы $0(4)$. Если в качестве такой подгруппы выбрать группу вращений, то $a=(\ell,m)$ и

$$\Phi_{n,a}(\Omega) = J_{n\ell m}(a,\theta,\phi) = \left[\frac{(n+1)(\Gamma(n+\ell+2)}{\Gamma(n-\ell+1)}\right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\sin a}} P^{-\ell-\frac{1}{2}}_{n+\frac{1}{2}}(\cos a)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

где $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ — обычные сферические функции (см. приложение). Формула (4) тогда принимает следующий вид:

$$\Gamma(\Omega,\Omega') = \sum_n \sum_{\ell m} \left(\frac{1}{1-\frac{\nu}{n}}\right) J_{n\ell m}(a,\theta,\phi)\, J^*_{n\ell m}(a',\theta',\phi'). \qquad (4')$$

4. Для исследования редджевского поведения функции $\Gamma(\Omega,\Omega')$ необходимо совершить в формуле (4') аналитическое продолжение в комплексную плоскость ℓ. Для этого введем новое квантовое число k:

$$n = \ell + k, \qquad (5)$$

где

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{5'}$$

Воспользуемся теоремой сложения для 4-мерных сферических функций /10/

$$\sum_{\ell m} J_{n\ell m}(\Omega)\, J^*_{n\ell m}(\Omega') = \frac{n}{2\pi^2} \frac{\sin n\chi}{\sin \chi}, \tag{6}$$

где

$$4 \sin^2 \frac{\chi}{2} = (\xi - \xi')^2.$$

Тогда (4') принимает вид

$$\Gamma(\Omega, \Omega') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_n \left(\frac{1}{1 - \frac{\nu}{n}} \right) n \frac{\sin n\chi}{\sin \chi} = \sum_n \Gamma(n)\, n \frac{\sin n\chi}{\sin \chi}. \tag{7}$$

Так как $\Gamma(n)$ удовлетворяет условиям теоремы Карлсона, то для аналитического продолжения по n в плоскость комплексного n можно в (7) применить преобразование Ватсона-Зоммерфельда. При этом одновременно с "реджизацией" n, ℓ также становится комплексным, однако k остается целым. Ограничение (5') для k перестает выполняться, что можно непосредственно увидеть из определения $A_{n\ell}(a)(Д\, Ш)k$ теперь может принимать все целые значения от 0 до ∞. Имеем:

$$\Gamma(\Omega, \Omega') = \frac{1}{2i} \int_0 \Gamma(\eta)\, \eta \frac{\sin \eta\chi}{\sin \chi} \operatorname{ctg}(\pi\eta)\, d\eta.$$

$\Gamma(\eta)$ имеет простые полюса в точках $\eta = \nu(p_0)$.

Вычет в одном из таких полюсов $\eta_1 = \nu_1(p_0)$ есть

$$\Gamma_1(\Omega, \Omega') = \frac{1}{2\pi^2} [\nu_1(p_0)]^2 \frac{\sin \nu_1(p_0)\chi}{\sin \chi} \operatorname{ctg}(\pi \nu_1(p_0)). \tag{8}$$

С другой стороны, воспользовавшись теоремой сложения для трехмерных сферических функций, имеем:

$$\Gamma(\Omega,\Omega') = \sum_n \Gamma(n) \sum_\ell (2\ell+1)\{A_{n\ell}(a)A_{n\ell}(a')\} P_\ell(\cos\Theta), \tag{9}$$

где

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi').$$

Сравнивая (7) и (8), имеем

$$\frac{n}{2\pi^2}\frac{\sin n\chi}{\sin\chi} = \sum_\ell (2\ell+1)\{A_{n\ell}(a)A_{n\ell}(a')\} P_\ell(\cos\Theta). \tag{10}$$

Используя (8), (9), (10) и учитывая, что для комплексных n, k – , оставаясь целым, не ограничено равенством (5'), найдем парциальное содержание полюсного члена

$$\Gamma_i(\Omega,\Omega') = \sum_{k=1}^{\infty} (2a_k+1)\{A_{\nu_i(p_0)a_k}(a)\,A_{\nu_i(p_0)a_k}(a')\}\,\nu_i(p_0)\,\mathrm{ctg}(\pi\nu_i(p_0))\,P_{a_k}(\cos\Theta). \tag{11}$$

Здесь введено обозначение:

$$a_k = \nu_i(p_0) - k \quad . \tag{12}$$

Очевидно, что (12) совпадает с (1 '), где $\nu_i(p_0) = a_0(E) - 1$. Таким образом, из (11) видно, что полюс в комплексной плоскости n, т.е. по комплексному 4-мерному моменту, порождает серию полюсов Редже $a_k(E) = \nu_i(p_0) - k$ в комплексной плоскости ℓ. Вообще говоря, ряд (11) бесконечен, однако, если полюс по η проходит через целое число, то, как нетрудно видеть, ряд обрывается при $k > n$. (Эта ситуация аналогична ситуации с полюсом Померанчука: когда $a_0 = 1$, то единственные дочерние полюса будут $k = 0, 1$). Это обрывание ряда связано с тем, что при $E<0$ существует конечное число состояний с орбитальным моментом $\ell \leq n-1$, принадлежащих данному уровню энергии.

Нетрудно заметить, что асимптотическое поведение $\Gamma(\Omega,\Omega')$ имеет реджевский тип. Действительно, предположим, что в $\Gamma(\Omega,\Omega')$ – доминирующий полюс $\nu_1(p_0)$, тогда основной вклад в $\Gamma(\Omega,\Omega')$ определяется этим полюсом и мы имеем:

$$\Gamma(\Omega,\Omega') \approx \Gamma(\nu_1(p_0)) = \frac{[\nu_1(p_0)]^2}{2\pi^2} \, \mathrm{ctg}\,(\pi\nu_1(p_0)) \frac{\sin \nu_1(p_0)\chi}{\sin\chi} .$$

Учитывая, что при $t \to \infty$

$$\cos\chi = \cos a \cos a' + \sin a \sin a' \cos\Theta \approx \cos\Theta ,$$

найдем:

$$\Gamma(\Omega,\Omega')_{t\to\infty} \approx g(E)\, t^{a_0(E)} .$$

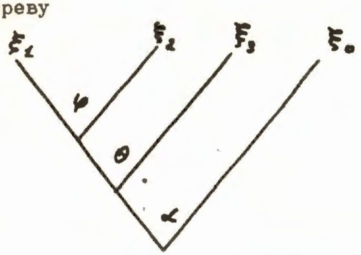
Итак, дочерние полюса парциальной амплитуды могут появиться либо как следствие полюсов лоренц-амплитуды при $t=0$ /1-3/ (и это фиксированные полюса), либо, как следствие расходисомсти интеграла от асимптотики лоренц-амплитуды (и это движущиеся полюса – траектории Редже). Наконец, рассмотренный здесь случай – траектории Редже, индуцированные полюсами лоренц-амплитуды – третий тип полюсов, обусловленный "случайным вырождением", механизм их возникновения отличается от механизма возникновения Толлеровских полюсов, так как при $t=0$ амплитуда рассеяния в кулоновском поле расходится.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить моего научного руководителя Я.А.Смородинского за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

Дополнение

Вырожденные представления группы $O(4)$ реализуются на функциях $J_{n\ell m}(\Omega)$, являющихся собственными функциями угловой части 4-мерного лапласиана.

Введем на 4-сфере сферическое координаты α, θ, ϕ, соответствующие дереву



$$\xi_0 = \cos\alpha, \qquad \xi_2 = \sin\alpha\sin\theta\cos\phi,$$

$$\xi_3 = \sin\alpha\cos\theta, \quad \xi_1 = \sin\alpha\sin\theta\sin\phi.$$

$J_{n\ell m}(\alpha,\theta,\phi)$ являются решением уравнения:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] J_{n\ell m}(\alpha,\theta,\phi) = \tag{Д.1}$$

$$= -n(n+2)\, J_{n\ell m}(\alpha,\theta,\phi).$$

Решение (1) ищем в виде $J_{n\ell m}(\Omega) = A_{n\ell}(\alpha)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, тогда для $A_{n\ell}(\alpha)$ получаем уравнение

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\frac{d}{d\alpha} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2\alpha}\right] A_{n\ell}(\alpha) = -n(n+2)\, A_{n\ell}(\alpha). \tag{Д.П}$$

Решение (II) имеет вид

$$A_{n\ell}(\alpha) = N(n,\ell)(\sin\alpha)^{\ell}\, C^{\ell+1}_{n-\ell}(\cos\alpha),$$

где $N(n,\ell)$ – нормировочный коэффициент, а $C^{p}_{\nu}(\cos\alpha)$ – функции Гегенбауэра.

Функции Гегенбауэра нормированы условием[11]:

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}\, C^p_\nu(z)\, C^p_\nu(z)\, dz = \frac{\pi\,\Gamma(2p+\nu)}{2^{2p-1}(p+\nu)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(p)\,\Gamma(p)},$$

откуда нормированные функции $A_{n\ell}(a)$ есть

$$A_{n\ell}(a) = 2^{\ell+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\ell+1)\left[\frac{(n+1)\,\Gamma(n-\ell+1)}{\pi\,\Gamma(n+\ell+2)}\right]^{1/2}(\sin a)^{\ell}\,C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos a). \qquad (\text{Д.Ш})$$

Учитывая связь между функциями Гегенбауэра и функциями Лежандра, получим также $A_{n\ell}(a)$ в виде

$$A_{n\ell}(a) = \left[\frac{(n+1)\,\Gamma(n+\ell+2)}{\Gamma(n-\ell+1)}\right]^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\sin a}}\,P_{n+\frac{1}{2}}^{-\ell-\frac{1}{2}}(\cos a).$$

Литература

1. M.Toller, L.Sertorio. Nuovo Cim., 33, 413 (1964).
2. M.Toller. Nuovo Cim., 37, 631 (1965).
3. M.Toller. Preprint CERN, Th 770, 780 (1967).
4. M.Sheftel, I.Smorodinsky, P.Winternitz. Preprint E2-3841, Dubna, 1968.
5. G.Domokos. Phys. Rev., 159, 1387 (1967).
6. D.Z.Freedman, I.M.Wang. Phys. Rev., 153, 1596 (1967).
7. V.Singh. Phys. Rev., 127, 632 (1962).
8. I.Scwinger. J.Math. Phys., 5, 1606 (1964); М.Переломов, В.С.Попов, ЖЭТФ, 50, 179 (1966).
9. Р.Курант. Уравнения с частными производными. ИЛ, М., 1964.
10. V.A.Fock, Zs. f. Physik, 98, 145 (1935).
11. А.Кратцер и В.Франц. Трансцендентные функции. ИЛ, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел

7 мая 1968 года.