ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3865

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1968

Z 348/2 пр.

P2 - 3865

В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Традиционным методом описания связанных состояний двух частиц в квантовой теории поля являются релятивистски-ковариантные уравнения Бете-Солпитера [1].

Как известно, релятивистская ковариантность этих уравнений достигается благодаря введению относительного времени двух частиц, не имеющего достаточно ясного физического смысла в рамках вероятностной квантовомеханической интерпретации. В работе Логунова и Тавхелидзе [2] был предложен другой метод описания связанных состояний двух частиц в рамках квантовой теории поля на основе квазипотенциальных уравнений для одновременных волновых функций двух частиц в системе центра масс. Достоинство этих уравнений определяется тем обстоятельством, что в них входят лишь трехмерные динамические переменные, такие как пространственный относительный импульс двух частиц в системе центра инерции $\vec{q}$ и спины частиц $\frac{1}{2}\vec{\sigma}^{(1,2)}$. В этом отношении квазипотенциальные уравнения являются аналогом уравнений Шредингера для системы двух частиц в квантовой теории поля.

В работах [2,3] было описано два метода построения квазиоптического потенциала в рамках теории возмущений. Первый из них основывается на разложении в ряд по константе связи 2-временной функции Грина двух частиц. Другой метод построения квазипотенциала исходит из требования, чтобы найденная с его помощью матрица рассеяния на массовой поверхности совпадала с матрицей рассеяния, заданной разложением в ряд стандартной теории возмущений.

Как было показано в работах[3,4], оба эти метода дают эквивалентные результаты при вычислении, например, поправок к уровням энергии стационарных состояний двух частиц.

Следует отметить, что в случае сильной связи, когда методы теории возмущений неприменимы, построение квазипотенциального уравнения, адекватного заданному уравнению Бете -Солпитера, представляет собой проблему.

В настоящей работе мы рассмотрим релятивистскую задачу бесспиновых частиц, при условии, что ядро $K_p(x,x')$ уравнения Бете-Солпитера является сепарабельным, т.е. представимо в форме

$$K_p(x,x') = i\sum_n U_{np}(x)U^*_{np}(x'), \tag{1.1}$$

где p – полный импульс двух частиц, а x, x' – 4-векторы относительных "расстояний" между частицами.

Если сумма (1.1) содержит конечное число членов, уравнение Бете-Солпитера имеет точное решение. В этом случае мы можем построить квазипотенциал, используя 2-временную функцию Грина или амплитуду рассеяния на массовой поверхности, и сравнить точное решение квазипотенциального уравнения с решением уравнения Бете -Солпитера.

Ниже, для простоты изложения, мы ограничимся случаем факторизующегося ядра $K_p(x,x')$, когда сумма (1.1) содержит только один член:

$$K_p(x,x') = iU_p(x)U^*_p(x') . \tag{1.2}$$

Отметим, что уравнение Бете -Солпитера с факторизующим ядром общего вида (1.2) является обобщением задачи с контактным взаимодействием

$$K_p(x,x') = i g^2\, \delta(x)\delta(x') , \tag{1.3}$$

подробно изученной в работах Полубаринова /5/ и других. В рамках квазипотенциального подхода контактное ($\lambda\phi^4$) взаимодействие было рассмотрено Филипповым /6/. Впервые уравнение Бете-Солпитера с факторизующимся ядром вида (1.2) было рассмотрено, по-видимому, в работе /7/ в связи с исследованием релятивистской кварковой модели элементарных частиц. Отметим, что использование сепарабельного взаимодействия типа (1.1) физически означает, что мы ограничиваемся рассмотрением конечного числа состояний системы двух частиц.

§2. *Точное решение уравнения Бете-Солпитера с факторизующимся ядром*

Уравнение Бете-Солпитера для двух бесспиновых частиц равных масс запишем в виде:

$$[(\frac{p}{2}+i\partial_x)^2-m^2][(\frac{p}{2}-i\partial_x)^2-m^2]\chi_p(x)=-\int K_p(x,x')\chi_p(x')\,dx', \quad (2.1)$$

где p - полный импульс системы двух частиц. Будем считать, что ядро уравнения (2.1) факторизуется

$$K_p(x,x')=i\,U_p(x)U_p^*(x'). \quad (2.2)$$

Переходя к импульсному представлению, получим:

$$\chi_p(q)=i\,F_p(q)U_p(q)\,\Phi_p\ , \quad (2.3)$$

где

$$F_p(q)=-\frac{1}{[(\frac{p}{2}+q)^2-m^2][(\frac{p}{2}-q)^2-m^2]} \quad (2.4)$$

$$U_p(q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int U_p(x)e^{iqx}\,dx \tag{2.5}$$

$$\Phi_p=\int U_p^*(q)\,\chi_p(q)\,dq \tag{2.6}$$

Умножая обе части уравнения (2.3) на $U_p^*(q)$ и интегрируя по dq, получим:

$$R_p^{-1}\cdot\Phi_p=0, \tag{2.7}$$

где

$$R_p^{-1}=1-g_p$$

$$g_p=i\int|U_p(q)|^2\,F_p(q)\,dq. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7) и (2.8) определяют спектр стационарных состояний уравнения Бете–Солпитера с факторизующимся ядром (2.2). Величина Φ_p описывает связанное состояние с массой M и нормируется из условия:

$$|\Phi_p|^2=\frac{1}{i}\int\chi_p^*(q)\,F_p^{-1}(q)\,\chi_p(q)\,dq\,;\quad p^2=M^2 \tag{2.9}$$

§3. Построение квазипотенциального уравнения с помощью 2-временной функции Грина

Уравнение для фурье-образа функции Грина двух бесспиновых частиц имеет вид:

$$G_p(q,q') = F_p(q)\,\delta(q-q') + F_p(q)\int K_p(q,q'')\,G_p(q'',q')\,dq'' . \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что для факторизующегося ядра (2.2) решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$G_p(q,q') = F_p(q)\,\delta(q-q') + i\,R_p\,[F_p(q)U_p(q)][F_p(q')U^*_p(q')] . \tag{3.2}$$

Определим теперь фурье-образ 2-временной функции Грина[2] в системе центра инерции частиц ($\vec{p} = 0$):

$$\tilde{G}(E,\vec{q},\vec{q}\,') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0\, dq'_0\, G_{\vec{p}=0}(q,q') . \tag{3.3}$$

Используя решение (3.2), получим следующее выражение для фурье-образа 2-временной функции Грина:

$$\tilde{G}(E,\vec{q},\vec{q}\,') = \tilde{F}(E,q)\,\delta(\vec{q}-\vec{q}\,') + iR(E)\,\sigma(E,\vec{q})\,\bar{\sigma}(E,\vec{q}\,') , \tag{3.4}$$

где

$$\tilde{F}(E,\vec{q}) = \frac{2\pi i}{W}\,\frac{1}{E^2-4W^2} , \quad W = \sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}} \tag{3.5}$$

$$\sigma(E,\vec{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0\, F_{\vec{p}=0}(q)\, U_{\vec{p}=0}(q) ;$$

$$\bar{\sigma}(E,\vec{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0\, F_{\vec{p}=0}(q)\, U^*_{\vec{p}=0}(q) ; \tag{3.6}$$

и $R(z)$ совпадает с R_p, определенной формулой (2.8), в системе центра инерции

$$R(F) = R_{\vec{p}=0} \tag{3.7}$$

Определим обратный оператор $\tilde{\tilde{G}}^{-1}$ соотношением:

$$\int \tilde{\tilde{G}}^{-1}(E,\vec{q},\vec{q}\,'')\tilde{\tilde{G}}(E,\vec{q}\,'',\vec{q}\,')d\vec{q}\,'' = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,') \tag{3.8}$$

Квазипотенциальное уравнение для одновременной волновой функции $\Psi(\vec{q})$ будет иметь вид:

$$\int \tilde{\tilde{G}}^{-1}(E,\vec{q},\vec{q}\,')\Psi(\vec{q}\,')d\vec{q}\,' = 0 \tag{3.9}$$

Используя разложение оператора $\frac{1}{a+b}$ по степеням "малого" оператора b:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\cdot b\cdot\frac{1}{a} + \ldots, \tag{3.10}$$

найдем обратный оператор $\tilde{\tilde{G}}^{-1}$ в виде ряда:

$$\tilde{\tilde{G}}^{-1}(E;\vec{q},\vec{q}\,') = \tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q})\delta(\vec{q}-\vec{q}\,') - i\,\xi(E,\vec{q})\bar{\xi}(E,\vec{q}\,')[R - RKR\ldots] \tag{3.11}$$

Суммируя этот ряд, получим:

$$\tilde{\tilde{G}}^{-1}(E,\vec{q},\vec{q}\,') = \tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q})\delta(\vec{q}-\vec{q}\,') - i\,\xi(E,\vec{q})\bar{\xi}(E,\vec{q}\,')\frac{R}{1+KR}, \tag{3.12}$$

где

$$\xi(E,\vec{q}) = \sigma(E,\vec{q})\,\tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q}) :$$

$$\bar{\xi}(E,\vec{q}) = \bar{\sigma}(E,\vec{q})\,\tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q}) : \tag{3.13}$$

$$K = i\int \bar{\sigma}(E,\vec{q})\,\sigma(E,\vec{q})\,\tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q})\,d\vec{q} \tag{3.14}$$

$$\tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q}) = \frac{1}{2\pi i} W(E^2 - 4W^2). \tag{3.15}$$

Квазипотенциал, определенный соотношением:

$$\tilde{\tilde{G}}^{-1}(E;\vec{q},\vec{q}\,') = \tilde{\tilde{F}}^{-1}(E,\vec{q})\delta(\vec{q}-\vec{q}\,') + iV(E;\vec{q},\vec{q}\,'), \tag{3.16}$$

будет равен:

$$V(E;\vec{q},\vec{q}\,') = -\Lambda\,\xi(E,\vec{q})\,\bar{\xi}(E,\vec{q}\,'), \tag{3.17}$$

где

$$\Lambda = \frac{R}{1+KR} \tag{3.17}$$

В результате квазипотенциальное уравнение (3.9) принимает следующий вид:

$$[E^2 - 4(m^2 + \vec{q}^{\,2})]\Psi(\vec{q}) = -\frac{2\pi\Delta}{\sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}}}\xi(E,\vec{q})\int\xi(E,\vec{q}\,')\Psi(\vec{q}\,')d\vec{q}\,'. \quad (3.18)$$

Умножая обе части уравнения (3.18) на $\frac{\sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}}}{2\pi i}\bar{\sigma}(E,\vec{q})$ и интегрируя по $d\vec{q}$, получаем уравнение для спектра энергий стационарных состояний:

$$\tilde{R}^{-1} \cdot \phi = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\tilde{R}^{-1} = 1 - K\Delta;$$

$$\phi = \int\bar{\sigma}(E,\vec{q})\tilde{F}^{-1}(E,\vec{q})\Psi(\vec{q})d\vec{q}. \quad (3.20)$$

Используя формулы (3.13), (3.18-20), получим выражение для волновой функции стационарного состояния двух частиц следующего вида:

$$\Psi(\vec{q}) = \Delta\,\sigma(E,\vec{q})\phi \quad (3.21)$$

Нормировка функции ϕ определяется из уравнений (3.14), (3.13) и (3.21)

$$|\phi|^2 = i\int\Psi^*(\vec{q})\tilde{F}^{-1}(E,\vec{q})\Psi(\vec{q})d\vec{q}, \quad (3.22)$$

при

$$E = M.$$

Из формул (3.17) и (3.20) нетрудно видеть, что

$$\tilde{\tilde{R}} = 1 + KR, \tag{3.23}$$

откуда следует, что функции R и $\tilde{\tilde{R}}$ будут иметь одни и те же полюса, если величина K не обращается в нуль в соответствующих точках и не имеет полюсов. Таким образом можно утверждать, что при определенных условиях уравнение Бете-Солпитера с факторизующимся ядром (2.1) и соответствующее квазипотенциальное уравнение определяют один и тот же спектр стационарных состояний двух частиц.

§4. Построение квазипотенциала с помощью матрицы рассеяния на массовой поверхности

Как известно, величина $M(E; q, q')$, определенная соотношением

$$G = F\,\delta(q - q') + i\,FMF, \tag{4.1}$$

на массовой поверхности $\left(q_0 = q_0' = 0,\ \vec{q}^{\,2} = \vec{q}^{\,\prime 2} = \frac{E^2}{4} - m^2\right)$ совпадает с амплитудой рассеяния двух частиц в системе центра инерции

$$M(E; q, q')\Big|_{\substack{q_0 = q_0' = 0 \\ \vec{q}^{\,2} = \vec{q}^{\,\prime 2} = \frac{E^2}{4} - m^2}} = T(\vec{q} - \vec{q}\,'; E) \tag{4.2}$$

Определим теперь величину $\tilde{\tilde{T}}(E; \vec{q}, \vec{q}\,')$ аналогично формуле (4.1) с помощью фурье-образа 2-временной функции Грина $\tilde{\tilde{G}}$ /2/

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{F}}\,\delta(\vec{q} - \vec{q}\,') + i\,\tilde{\tilde{F}}\,\tilde{\tilde{T}}\,\tilde{\tilde{F}}\,. \tag{4.3}$$

Из формулы (4.1) и определения фурье-образа 2-временной функции Грина (3.3) следует[2], что на массовой поверхности величина $\tilde{\tilde{T}}$ совпадает с амплитудой рассеяния:

$$\tilde{\tilde{T}} = \tilde{\tilde{F}}^{-1}(\widetilde{FMF})\tilde{\tilde{F}}^{-1}\Big|_{\vec{q}\,^2 = \vec{q}\,'^2 = \frac{E^2}{4} - m^2} = T(\vec{q} - \vec{q}\,', E). \tag{4.4}$$

Отметим, что амплитуда рассеяния на массовой поверхности является функцией лишь энергии E и разности $(\vec{q} - \vec{q}\,')$ и будет называться по этой причине локальной. В общем случае величина $\tilde{\tilde{T}}$ удовлетворяет уравнению типа Липмана-Швингера[2,4]

$$\tilde{\tilde{T}}(E;\vec{q},\vec{q}\,') + V(E;\vec{q},\vec{q}\,') + i\int V(E;\vec{q},\vec{q}\,'')\tilde{\tilde{F}}(E,\vec{q}\,'')\tilde{\tilde{T}}(E;\vec{q}\,'',\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,'' = 0, \tag{4.5}$$

где $V(E;\vec{q},\vec{q}\,')$ – квазипотенциал, определенный формулой (3.16).

Метод построения локального квазипотенциала $V_{лок}(\vec{q}-\vec{q}\,';E)$, предложенный в работе[2], исходит из требования, чтобы с помощью $V_{лок}$ уравнение (4.5) на массовой поверхности давало определенную локальную двухчастичную амплитуду рассеяния. В рассматриваемом случае факторизующегося потенциала амплитуда $T(\vec{q}-\vec{q}\,';E)$ оказывается равной

$$T(\vec{q} - \vec{q}\,'; E) = R\,U_{\vec{p}=0}(q)\,U^{*}_{\vec{p}=0}(q')\Big|_{\substack{q_0 = q'_0 = 0 \\ \vec{q}\,^2 = \vec{q}\,'^2 = \frac{E^2}{4} - m^2}}\,. \tag{4.6}$$

Функция $U_p(q)$ является скалярной функцией инвариантных переменных q^2 и (pq):

$$U(q) = f(q^2, pq) \tag{4.7}$$

Учитывая это обстоятельство, приведем выражение (4.6) к виду:

$$T(\vec{q} - \vec{q}\,'; E) = R \left| f\left(-\frac{E^2}{4} + m^2, 0\right) \right|^2 . \tag{4.8}$$

Из уравнения (4.5) найдем локальный квазипотенциал $V_{лок}(\vec{q} - \vec{q}\,'; E)$, соответствующий амплитуде рассеяния (4.8)

$$V_{лок}(\vec{q} - \vec{q}\,', E) = -\Delta' \left| f\left(-\frac{E^2}{4} + m^2 ; 0\right) \right|^2 , \tag{4.9}$$

где

$$\Delta' = \frac{R}{1 + K'R} \tag{4.10}$$

$$K' = i \left| f\left(-\frac{E^2}{4} + m^2, 0\right) \right|^2 \int \tilde{\tilde{F}}(\vec{q}, E)\, d\vec{q} . \tag{4.10'}$$

Интеграл в выражении (4.10') логарифмически расходится и требует введения обрезания при $|\vec{q}|_{max} = \Lambda$. Определенный таким образом квазипотенциал лишь только в том случае дает результаты, совпадающие с результатами, полученными в §3 на основе 2-временной функции Грина, когда функция $U_p(q)$ является ступенчатой

$$U_{\vec p=0}(q)=\begin{cases}\text{const}; & \text{при } |\vec q|\le\Lambda;\\ 0; & \text{при } |\vec q|>\Lambda\end{cases}\tag{4.11}$$

Предел $\Lambda\to\infty$ соответствует контактному взаимодействию, подробно изученному в работе/5/. В случае конечных значений Λ условимся говорить, что взаимодействие (4.11) имеет радиус действия $a=\frac{1}{\Lambda}$.

§5. *Пример со взаимодействием, имеющим конечный радиус действия*

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу двух тел, когда функция $U_p(q)$ может быть представлена в следующем виде:

$$U_p(q)=\begin{cases}g^2/4\pi^2; & \text{при } \frac{(qp)^2}{p^2}-q^2\le\Lambda^2\\ 0; & \text{при } \frac{(qp)^2}{p^2}-q^2\ge\Lambda^2.\end{cases}\tag{5.1}$$

В системе центра инерции $\vec p=0$ имеем:

$$U_{\vec p=0}(q)=\begin{cases}g_\Lambda^2/4\pi^2; & \text{при } \vec q^{\,2}\le\Lambda^2\\ 0; & \text{при } \vec q^{\,2}>\Lambda^2.\end{cases}\tag{5.2}$$

В этом случае величины g_p, $\sigma(E,\vec q)$ и др. в системе центра масс легко вычисляются и равны

$$g_{\vec p=0}=\frac{g_\Lambda^2}{4\pi^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{q\,dq^2}{\sqrt{m^2+q^2}\,[4(m^2+q^2)-E^2]}\tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}\sigma(E,\vec q)=\bar\sigma(E,\vec q)=\overset{\approx}{F}(E,\vec q)\,U_{\vec p=0}(q)\\ \xi(E,\vec q)=\bar\xi(E,\vec q)=U_{\vec p=0}(q)\end{gathered}\tag{5.4}$$

$$K = g_{\,\beta=0} \; ; \quad \Delta = 1 \; . \tag{5.5}$$

Из формул (5.5) следует, что для взаимодействия типа (5.1) спектры стационарных состояний уравнения Бете-Солпитера и квазипотенциального уравнения совпадают и определяются условием:

$$1 = \frac{g_\Lambda^2}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{q\, dq^2}{\sqrt{m^2+q^2}\,[\,4(m^2+q^2) - E^2]} \; . \tag{5.6}$$

Нетрудно убедиться, что квазипотенциал, построенный в § 4 с помощью амплитуды рассеяния на массовой поверхности, приводит к результатам, описанным выше, при соответствующем выборе параметра обрезания Λ . В предельном случае контактного взаимодействия, когда $a = \frac{1}{\Lambda} \to 0$, в интеграле (5.6) следует сделать вычитание. В результате уравнение для спектра стационарных состояний может быть приведено к виду:

$$1 = (E^2 - 4m^2)\frac{g_R^2}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dq^2}{q\sqrt{m^2+q^2}\,[\,4(m^2+q^2) - E^2]} , \tag{5.7}$$

где

$$g_R^2 = \lim_{\Lambda\to\infty} \left\{ \frac{g_\Lambda^2}{1 - \frac{g_\Lambda^2}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda^2} \frac{dq^2}{q\sqrt{m^2+q^2}}} \right\} \tag{5.8}$$

есть перенормированная константа взаимодействия.

§ 6. Заключение

В работе было получено точное решение релятивистской задачи двух тел для случая факторизующегося ядра уравнения Бете-Солпитера. При этом были сформулированы условия, при которых уравнение Бете-Солпитера и соответствующее квазипотенциальное уравнение определяют один и тот же спектр связанных состояний двух частиц.

Квазипотенциальные уравнения были построены двумя различными методами, исходя из 2-временной функции Грина двух частиц, а также с помощью амплитуды рассеяния двух частиц на массовой поверхности.

Было показано, что в рассматриваемом случае факторизующегося потенциала два метода дают эквивалентные результаты лишь в предельном случае взаимодействия, имеющего нулевой радиус действия (контактное взаимодействие).

В заключение для иллюстрации был подробно рассмотрен пример со взаимодействием, имеющим произвольный конечный радиус действия.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и ценные замечания.

Литература

1. E.Salpeter, H.Bethe, Phys. Rev., 84, 1232 (1951).
2. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
3. А.Н.Тавхелидзе, Лекции международной зимней школы теоретической физики при ОИЯИ, Дубна, 1964.
4. Nguyen van Hieu, R.N.Faustov, Nuclear Phys., 53, 337 (1964).
5. I.V.Polubarinov, Nuclear Phys., 8, 444 (1958).
6. А.Т.Филиппов. Диссертация ОИЯИ, Дубна, 1964.
7. Н.Н.Боголюбов, Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянов, Б.В.Струминский, А.Н.Тавхелидзе, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ, Д-2075, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 мая 1968 года.