Nucl. Phys., 1968, v. 7B, N2, p.169-175 31/VII-68

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3856

Варужан Балуни

О ПОВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЛЕПТОНОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3856

Варужан Балуни

О ПОВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЛЕПТОНОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Варужан Балуни P2-3856

О поведении дифференциального сечения некоторых неупругих процессов с участием лептонов при больших энергиях

Показано, что дифференциальные сечения некоторых электромагнитных и слабых процессов аналитичны в довольно широкой области по передаваемому импульсу. На основе этого результата получены ограничения на рост дифференциального сечения при больших энергиях.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1968.

Varoujan Baluni P2-3856

On the High-Energy Behaviour of the Differential Cross-Section of Certain Inelastic Processes Involving Leptons

The analyticity of the differential cross section of certain electromagnetic and weak inelastic processes in the momentum transfer is proved in a fairly large domain on the basis of Jin's results/5/. Some bounds on the behaviour of the differential cross-section are derived.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1968

В недавней работе Логунова, Мествиришвили и Нгуена Ван Хьеу [1] было показано, что полученное ранее Фруассаром [2], Гринбергом и Лоу [3] и Мартеном [4] ограничение на рост сечения упругих процессов справедливо и для процессов типа

$$a + b \to c + B_j \, , \tag{1}$$

где a , b и c – любые адроны, а B_j обозначает некоторую систему адронов. При этом в [1] была введена новая характеристика (см. ниже) – дифференциальное сечение процесса (1) и доказана его аналитичность в эллипсе Лемана и в более широкой области.

В первом параграфе настоящей работы на основе результатов Джина [5] мы покажем, что дифференциальное сечение слабых и электромагнитных процессов, просуммированное по всем допустимым адронным состояниям B_j

$$\nu(\bar{\nu}) + N \to \ell\,(\bar{\ell}\,) + B_j \, , \tag{2.1}$$

$$\ell(\bar{\ell}\,) + N \to \ell(\bar{\ell}) + B_j \tag{2.2}$$

(ν – нейтрино, ℓ – лептон, N – нуклон), обладает довольно широкой областью аналитичности по передаваемому импульсу между лептонами.

Во втором и третьем параграфах получены ограничения на ширину дифференциального пика и на поведение дифференциального сечения процессов (2) при больших энергиях.

Для простоты рассмотрим конкретный случай процесса (2.1). Все результаты тривиальным образом переносятся на случай (2.2).

В дальнейшем будем пренебрегать массой лептонов.

1. Дифференциальная вероятность процесса (2.1) дается выражением

$$\frac{dW_{inel}}{d\cos\theta} = \sum_{\gamma}\int \frac{1}{2p_N^0\, 2p_\nu^0}\left|\langle p_\ell, p_1, \ldots, p_j | S | p_\nu, p_N\rangle\right|^2 \times$$

$$\frac{p_\ell^2\, d|p_\ell|}{2p_\ell^0(2\pi)^2}\prod_{i=1}^{j}\delta(p_i^2 - m_i^2)\,\Theta(p_i^0)\frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3}, \tag{3}$$

где θ – угол между p_ν и p_ℓ – импульсами нейтрино и лептона в с.ц.м. реакции, а $p_N, p_1, \ldots, p_j$ 4-импульсы нуклона и частиц из B_j.

В первом порядке по слабому взаимодействию из (3) получим

$$\frac{dW_{inel}}{d\cos\theta} = \sum_{j}\frac{1}{2p_N^0\, 2p_\nu^0}\int\left|\langle p_1, \ldots, p_j \left|\frac{\delta S}{\delta W_\mu(x)}\right| p_N\rangle W_\mu(p_\ell, p_\nu)e^{iqx}dx\right|^2 \times$$

$$\frac{\vec{p}_\ell^{\,2} d|\vec{p}_\ell|}{2p_\ell^0(2\pi)^2} \prod_{i=1}^{j} \delta(p_i^2 - m_i^2)\,\Theta(p_i^0)\,\frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3}, \tag{4}$$

где $q = p_\ell - p_\nu$ – передаваемый импульс между лептонами, $W_\mu(x)$ – слабый лептонный ток, а $W_\mu(p_\ell, p_\nu) = \bar{u}(p_\ell)\gamma_\mu(1+\gamma_5)u(p_\nu)$.

Из условия полноты адронных состояний следует, что (4) можно представить в виде

$$\frac{dW_{inel}}{d\cos\theta} = \frac{1}{2p_N^0\, 2p_\nu^0}\int e^{iq(x-y)} \langle p_N|\frac{\delta S^+}{\delta W_\mu^+(x)}\,\frac{\delta S}{\delta W_\delta(y)}|p_N\rangle\, dx\,dy \tag{5}$$

$$W_\mu^+(p_\ell, p_\nu)\,W_\delta(p_\ell, p_\nu)\,\frac{\vec{p}_\ell^{\,2} d|\vec{p}_\ell|}{2p_\ell^0(2\pi)^2}.$$

Используя свойство трансляционной инвариантности и условие спектральности, отсюда получаем следующее выражение для дифференциального сечения процесса (2.1):

$$\frac{d\sigma_{inel}}{dq^2} = \frac{1}{2}\Sigma_s W_\mu^+(p_\ell, p_\nu)W_\delta(p_\ell, p_\nu)\, f_{\mu\delta}(W, q^2)\,\frac{dp^2}{8p_\nu^0(p_N p_\nu)(2\pi)^2}, \tag{6}$$

$$f_{\mu\delta}(W, q^2) = \frac{1}{2}\int e^{iqz}\,dz \langle p_N|\left[\frac{\delta S^+}{\delta W_\mu^+(-\frac{z}{2})}, \frac{\delta S}{\delta W_\delta(\frac{z}{2})}\right]|p_N\rangle,$$

где $\frac{1}{2}\Sigma_s$ означает суммирование и усреднение по лептонным и нуклонным спиновым состояниям соответственно, а $W^2=(p_N+q)^2$ – инвариантная масса системы B_j .

Таким образом, дифференциальное сечение процессов (2) выражается через мнимую часть $f_{\mu\delta}$ амплитуды рассеяния вперед частицы со спином единица и массой q^2 на нуклоне. Аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед по массе одной частицы при фиксированной массе другой частицы исследованы Джином /5/. Из его результатов и из соотношения (6) следует, что дифференциальное сечение является аналитической функцией по передаваемому импульсу $q^2 = x + iy$ в области

$$y^2 < \frac{1}{m^2}(m_1^2 - m^2)(m_2^2 - x)\left[\frac{(W^2 + m^2 - x)^2 - 4m^2W^2}{2W^2} + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \frac{(m_1^2 - m^2)(m_2^2 - x)}{W^2 - (m_1 - m_2)^2}\right],$$

где m –масса нуклона, $m_1 = m + 1$ и $m_2 = 2$ в единицах массы π -мезона.

2. В этом пункте мы получим ограничение:

а) на ширину дифракционного пика,

б) на рост снизу дифференциального сечения (6) проинтегрированного по инвариантной массе W или (по p_ℓ^0 т.к.

$$W^2 = (p_N^0 + p_\nu^0)^2 - 2(p_N^0 + p_\nu^0)p_\ell^0$$

в с.ц.и. реакции)

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{inel}}{dq^2} = \chi(S, q^2), \tag{8}$$

где $\sqrt{S} = \sqrt{(p_N + p_\nu)^2}$ – полная энергия в с.ц.и. Очевидно, что функция $\chi(S, q^2)$ аналитична по q^2 в области, получаемой из (7) минимализацией по $W (m+1 \leq W \leq \sqrt{S})$ его правой части. Эта область определяется внутренностью левой ветви гиперболоида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - y^2 = 1, \tag{9}$$

где $x_0 = 14/5$, а $a = 6/5$ с точностью $1/m$.

Установленная связь (6) между дифференциальным сечением и мнимой частью амплитуды рассеяния дает возможность утверждать, что $\chi(S, q^2)$ при $S \to \infty$ равномерно ограничено некоторым полиномом по S в области (9)

$$|\chi(S, q^2)| < M = const\, S^N. \tag{10}$$

Это следует из строгих результатов Хеппа [6], полученных в аксиоматической теории поля. Предположим, что дифференциальное сечение (8) при $q^2 = 0$ больше, чем при ненулевых передаваемых импульсах

$$\psi(S, q^2) = \frac{\chi(S, q^2)}{\chi(S, 0)} < 1, \quad q^2 < 0. \tag{11}$$

Напомним, что $\chi(S,0)$ выражается через мнимую часть амплитуды рассеяния частицы с нулевой массой и спином единица на нуклоне. Поэтому $\chi(S,0)$ не может убывать быстрее S^{-n}, где n – известное положительное число[7]. Следовательно, на основе (10) можем заключить, что при $S \to \infty$

$$|\psi(S, q^2)| < M_1 = \text{const}\, S^{N_1} \qquad (N_1 = N + n) \tag{12}$$

в области аналитичности (8). Теперь мы можем получить оценки а) и б).

а) Введем новую переменную

$$w = 1 + \frac{q^2}{A},$$

где A – достаточно большое положительное число. Рассмотрим эллипс E_w с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с большой полуосью $c = 1 + \frac{d}{A}$, $d = x_0 - a$.

При $A \gg d$ его образ лежит внутри левой ветви гиперболоида (9). Следуя Церулусу и Мартену[8], с помощью конформного отображения

$$v = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

преобразуем E_w в кольцо с внутренним радиусом 1 и внешним радиусом $R = c + \sqrt{c^2 - 1}$. Функция $\phi(v) = \psi(q^2)$ аналитична в полученном кольце и удовлеворяет условиям (11) и (12) на внутренней и внешней окружностях. Применяя теорему Адамара о трех кругах[9] к функции $\phi(v)$, получим

$$|\phi(v)| \le e^{(\ln|v|/\ln R)\ln M_1}.$$

При достаточно больших A имеем

$$\psi(S, q^2) \le e^{\sqrt{q^2/d}\,\ln M_1}. \qquad (13)$$

Далее, с помощью метода, развитого в работах [10], и учитывая (13), легко получить ограничение на ширину Δ дифракционного пика

$$\Delta = \frac{d}{dq^2} \ln \psi(S, q^2)\Big|_{q^2=0} < \frac{e N_1}{d} \ln^2 S. \qquad (14)$$

б) Заметим, прежде всего, что с увеличением передаваемого импульса q^2 по абсолютному значению дифференциальное сечение, по-видимому, убывает. Мы покажем, что при $q^2 < -a$, где a – некоторое положительное число, оно не может убывать произвольно и установим его нижнюю границу убывания.

Произведем замену переменных

$$w' = 1 + \frac{q^2 + a}{A}.$$

Рассмотрим эллипс $E_{w'}$ с фокусами в точках $w' = \pm 1$ и с большой полуосью $c' = 1 + \frac{d + a}{A}$.

Конформное отображение

$$v' = w' + \sqrt{w'^2 - 1}$$

переводит $E_{w'}$ в кольцо с внутренним и внешним радиусами 1 и $R' = c' + \sqrt{c'^2 - 1}$, соответственно. Точка $w'_0 = 1 + \frac{a}{A}$ $(q^2 = 0)$ при этом переходит в точку $v'_0 = w'_0 + \sqrt{w'^2_0 - 1}$. Учитывая (12), с помощью теоремы о трех кругах получим

$$\max_{q^2 > -a} \psi(S, q^2) \geq \mathrm{const}\, S^{-N_1 \Phi(a)}, \tag{15}$$

где

$$\Phi(a) = \frac{\sqrt{\frac{a}{a + d}}}{1 - \sqrt{\frac{a}{a + d}}}.$$

Из (15), в частности, следует, что дифференциальное сечение (8) не убывает экспоненциально при фиксированных передаваемых импульсах q^2.

3. Получим теперь ограничение сверху на рост дифференциального сечения (6), проинтегрированного по инвариантной массе W,

$$\frac{d\tilde{\tilde{\sigma}}_{inel}}{d\cos\theta} = f(S, \cos\theta) \tag{16}$$

при фиксированном угле θ рассеяния между импульсами лептонов. Получение области аналитичности $f(S, \cos\theta)$ по $\cos\theta$ из неравенства (7) является сложной алгебраической задачей. Можно только утверждать, что по крайней мере при $\mathrm{Re}\, z < 1 (z = \cos\theta)$ имеем следующую область аналитичности:

$$\mathrm{Im}\, z < \beta\, |1 - \mathrm{Re}\, z|, \tag{17}$$

где $\beta = \sqrt{\frac{5}{m}}$.

Получим ограничение сверху при $-1 < z < 1-\alpha$, где α – некоторое положительное число. Для этого произведем замену переменных $w = \frac{1}{2-\alpha}(2z+\alpha)$. Рассмотрим эллипс E_w с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с большой полуосью

$$a = \frac{8\alpha\beta^2}{(2-\alpha)^2(1+\beta^2)} .$$

Нетрудно убедиться, что образ E_w в плоскости z лежит внутри области (17).

Разложим аналитическую функцию $f(S,z) = \phi(S,w)$ по полиномам Лежандра:

$$\phi(S,w) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)a_\ell(S)\,P_\ell(w) . \tag{18}$$

Для коэффициентов разложения (18) имеем

$$|a_\ell(S)| = |\int_{-1}^{1} P_\ell(w)\phi(S,w)\,dw| < \frac{2}{2-\alpha}\int_{-1}^{1-\alpha} f(S,z)\,dz . \tag{19}$$

С другой стороны, можем утверждать (см. (10)), что $\phi(S,w)$ при $S\to\infty$ равномерно ограничено в эллипсе E_w некоторым полиномом $R(S)$ по S. Учитывая этот факт и аналитичность $\phi(S,w)$ в эллипсе E_w, методом Гринберга и Лоу /3/ можно показать, что коэффициенты при $S\to\infty$ должны удовлетворять условию

$$|a_\ell(S)| < \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^\ell} R(S). \tag{20}$$

На основе оценок (19) и (20) легко получить ограничение на рост дифференциального сечения сверху при $S \to \infty$:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{inel}(S,\cos\theta)/d\cos\theta}{\int\limits_{-1}^{\cos\theta} d\tilde{\sigma}_{inel}(S,z)/dz\;dz} < C(\theta)\frac{\ln^2 S}{\cos^2\theta/2}, \tag{21}$$

где $C(\theta)$ – медленно меняющаяся функция θ, за исключением углов, близких 0 и π. В частности, при $\theta=\pi/2$ из (21) получим

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_\pi(S)}\, d\tilde{\sigma}_{inel}(S,\cos\theta)/d\cos\theta\,\Big|_{\theta=\pi/2} < \mathrm{const}\,\ln^2 S, \tag{22}$$

где $\tilde{\sigma}_\pi(S) = \int\limits_{-1}^{0} d\tilde{\sigma}_{inel}(S,z)/dz$ – полное сечение рассеяния на заднюю полусферу.

Вопрос о том, как изменяются полученные результаты, если предположить аналитичность по q^2 дифференциального сечения во всей плоскости с разрезом, будет обсуждаться в следующей работе.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить Нгуена Ван Хьеу, под руководством которого выполнена данная работа. Я признателен А.А.Логунову, М.А.Мествиришвили, М.К.Поливанову и А.П.Тавхелидзе за очень ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili and Nguyen Van Hieu. Phys. Lett., 25 B, 611 (1967);
   А.А.Логунов и Нгуен Ван Хьеу. Доклад, представленный на Конференцию по столкновению адронов при высоких энергиях. ЦЕРН, январь 1968.
2. M.A.Froissart. Phys. Rev., 123, 1053 (1961).
3. O.W.Greenberg and F.Low. Phys. Rev., 124, 2047 (1961).
4. A.Martin. Phys. Rev., 129, 1432 (1963).
5. Y.S.Jin. Nuovo Cimento, 50A, 256 (1967).
6. K.Hepp. Helv. Phys. Acta, 37 A, 639 (1964).
7. Y.S.Jin and A.Martin. Phys. Rev., 135, B1375 (1964).
8. F.Gerulus and A.Martin. Phys. Lett., 8, 80 (1964).
9. Е.Титумарш. Теория функции. ОГИЗ, Москва, 1951.
10. T.D.Bessis. Nuovo Cimento, 45, 974 (1966); Nguyen Van Hieu. Prepirnt E2-3509, Dubna, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1968 года.