ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3851

А.В.Тарасов

ТЕОРЕМА ЛОУ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ ВЕЛИЧИН

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1968

P2 - 3851

А.В.Тарасов

ТЕОРЕМА ЛОУ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ ВЕЛИЧИН

Направлено в ЯФ

1. В в е д е н и е

Известно, что амплитуда процесса тормозного излучения в приближении Лоу выражается через амплитуду соответствующего "упругого" процесса[1]. (В дальнейшем термин "упругий" будет относиться к любому процессу без участия фотонов. Тот же процесс, сопровождаемый испусканием мягкого γ -кванта, будем называть процессом тормозного излучения).

В работе[2] показано, что неполяризованное сечение любого тормозного процесса в приближении Лоу выражается только через неполяризованное сечение соответствующего "упругого" процесса.

Это утверждение доказано для случая, когда частицы, участвующие в процессе, имеют спины 0, 1/2, 1 и сделано предположение, что оно справедливо для случая произвольных спинов.

В работе автора[3] получены явные выражения для поляризационных тензоров процесса $NN \to NN\gamma$ в приближении Лоу через амплитуды NN -рассеяния, из которых видно, что в указанном приближении компоненты любого поляризационного тензора процесса $NN \to NN\gamma$ выражаются линейно только через компоненты аналогичного поляризационного тензора , NN -рассеяния.

В настоящей работе показано, что аналогичное утверждение справедливо для любого процесса тормозного излучения, если спины частиц, участвующих в процессе, ограничены значениями 0, 1/2, 1.

2. *Амплитуда процесса тормозного излучения в приближении Лоу*

Рассмотрим некоторый "упругий" процесс. Законы сохранения энергии - импульса и электрического заряда для него запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i, \qquad = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i = 0 , \tag{2}$$

где $p_{i,\mu}$ - 4-импульс i -ой частицы с массой m_i $(p_\mu^2)_i = m_i^2$ Q_i - ее заряд, $a_i = -1$ для сталкивающихся частиц и $a_i = 1$ - для рассеянных частиц.

Пусть $M = M(p_i)$ - амплитуда этого процесса.

Рассмотрим тот же процесс, сопровождаемый излучением мягкого γ -кванта с 4-импульсом k и поляризацией ϵ .

Амплитуду процесса тормозного излучения будем обозначать

$$M_\gamma = M_\gamma(p_i', k).$$

Излучение мягкого фотона слегка деформирует импульсы частиц, превращая их в $p_i' = p_i + \xi_i$, где $\xi_i \approx k$.

Из (1) и сохранения энергии-импульса для процесса тормозного излучения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i' + k = 0 \tag{3}$$

следует

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i + k = 0 . \tag{4}$$

В силу

$$(p'_\mu)^2_i = (p_\mu)^2_i = m^2_i$$

с точностью до величин второго порядка по k

$$p_i \xi_i = p_{i,\mu} \xi_{i,\mu} \approx 0. \tag{5}$$

Введем дифференциальные операторы

$$\Delta_i = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k} \right) \xi_{i,\nu} \frac{\partial}{\partial p_{i,\nu}} \tag{6}$$

$$D_i = Q_i \epsilon_\mu \left(\frac{p_{i,\mu}}{p_i k} k_\nu - g_{\mu\nu} \right) \frac{\partial}{\partial p_{i,\nu}} \tag{7}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta_i + D_i). \tag{8}$$

Оператор D в силу (1),(2),(4),(5) обладает свойствами

$$D p^2_i = 0 + O(\xi^2) \qquad i = 1,2,\dots n \tag{9}$$

$$D p_{i,\mu} = \Delta_i p_{i,\mu} + D_i p_{i,\mu} \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Амплитуда M_γ в приближении Лоу следующим образом выражается через амплитуду M /2/.

$$M_{\gamma,L} = \sum a_i Q_i \frac{p_i' \epsilon}{p_i' k} M + DM +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (D_i \Lambda_i) M + \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i \mu_i \frac{S^i_{\mu\nu} f_{\mu\nu}}{p_i k} \Lambda_i \right) M . \tag{11}$$

В (11) μ_i – магнитный момент i –ой частицы, $S^i_{\mu\nu}$ – оператор магнитного момента (пропорциональный оператору спина),

$$f_{\mu\nu} = \epsilon_\mu k_\nu - \epsilon_\nu k_\mu ,$$

$\Lambda_i = \Lambda_i(p_i)$ – проекционный оператор $\Lambda_i^2 = \Lambda_i$, равный

$$\Lambda_i = \begin{cases} I & \text{для } s = 0 \\ \dfrac{\hat{p}_i + m_i}{2 m_i} & \text{для } s = \dfrac{1}{2} \\ g_{\mu\nu} - \dfrac{p_{i,\mu} \cdot p_{i,\nu}}{m_i^2} & \text{для } s = 1 \end{cases}$$

и т.д.

Дифференцирование в (11) производится по $(n-1)$ независимому импульсу.

В силу свойства (9) оператора D производные по массам от амплитуды M выпадают из выражения для M_γ в приближении Лоу.

3. *Наблюдаемые в тормозном излучении в приближении Лоу*

В дальнейшем, чтобы избежать излишней громоздкости, будем рассматривать "упругий" и соответствующий ему тормозной процессы с произвольным числом частиц спина 0 и только двумя частицами спина 1/2.

Как видно из дальнейшего, это упрощение не существенно для окончательных выводов.

Импульсы спинорных частиц будем обозначать

$$p_1 \; (p_1') \qquad \text{и} \qquad p_2 \; (p_2').$$

Общее выражение для наблюдаемых (поляризационных тензоров) рассматриваемого тормозного процесса может быть записано в следующем виде

$$P_\gamma^{ik} = Sp\,\Lambda_2(p_2')O^i_2\Lambda_2(p_2')\,M_\gamma\,\Lambda_1(p_1')\,O^k_1\,\Lambda_1(p_1')\,M^+_\gamma \equiv$$

$$\equiv Sp\,\Lambda^2_2(p_2')\,O^i_2\,\Lambda^2_2(p_2')\,M_\gamma\,\Lambda^2_1(p_1')\,O^k_1\,\Lambda^2_1(p_1')\,M^+_\gamma. \tag{12}$$

Здесь O^i – неприводимые тензорные операторы, характеризующие спиновые состояния частиц. Для $s=\frac{1}{2}$ $O^i = I$, либо $\gamma_\mu\,\gamma_5$.

Для дальнейшего существенно следующее замечание.

Величины O^i реализуют представление группы Лоренца и поэтому справедливы следующие коммутационные соотношения

$$[\,S_{\mu\nu}\;O^i\,]_- = A^{ik}_{\mu\nu}\,O^k, \tag{13}$$

где $S_{\mu\nu}$ – оператор спина (генераторы группы Лоренца) рассматриваемой частицы, а $A^{ik}_{\mu\nu}$ – генераторы представления группы Лоренца, реализуемого величинами O^i.

В случае спинорной частицы $\left(s = \frac{1}{2}\right)$

для $O^i = I$ $\qquad A_{\mu\nu} = 0,$

для $O^i = \gamma_\rho\,\gamma_5$ $\qquad A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\,g_{\mu\sigma}.$

Подставляя в правую часть соотношения (12) M_γ в приближении Лоу (11), разлагая величины $\Lambda_2(p_2')$ и $\Lambda_1(p_1')$, согласно схеме,

$$
\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) \Lambda_1(p_1') =
$$

$$
= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) \Lambda_1(p_1) + \Delta_1 \Lambda_1(p_1) = \tag{14}
$$

$$
= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) \Lambda_1(p_1) + D\Lambda_1(p_1) - D_1\Lambda_1(p_1)
$$

и удерживая в окончательном результате только величины порядка $\left(\frac{1}{k}\right)^2$ и $\frac{1}{k}$, получим

$$
P^{ik}_{\gamma,L} = P^{ik}_{\gamma,1} + P^{ik}_{\gamma,2} + P^{ik}_{\gamma,3} + P^{ik}_{\gamma,4} , \tag{15}
$$

где

$$
P^{ik}_{\gamma,1} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{p_\ell' \epsilon}{p_\ell' k} a_\ell Q_\ell\right)^2 P^{ik} \tag{16}
$$

$$
P^{ik} = Sp\, \Lambda_2(p_2) O^i_2 \Lambda_2(p_2) M \Lambda_1(p_1) O^k_1 \Lambda_1(p_1) M^+ \tag{17}
$$

$$
P^{ik}_{\gamma,2} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k} a_\ell Q_\ell\right) D P^{ik} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{ik}_{\gamma,3} = -\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) \{ [& \Lambda_2 O^i_2 (D_2\Lambda_2)\Lambda_2 + \\
& + \Lambda_2 (D_2\Lambda_2) O^i_2 \Lambda_2] M \Lambda_1 O^k_1 \Lambda_1 M^+ + \\
& + \Lambda_2 O^i_2 \Lambda_2 M [\Lambda_1 (D_1\Lambda_1) O^k_1 \Lambda_1 + \Lambda_1 O^k_1 (D_1\Lambda_1)\Lambda_1] M^+ \}
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{ik}_{\gamma,4} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) f_{\mu\nu} \{ & \frac{\mu_2 Q_2}{p_2 k} [\Lambda_2 O^i_2 \Lambda_2 S^2_{\mu\nu} \Lambda_2 - \\
& - \Lambda_2 S^2_{\mu\nu} \Lambda_2 O^i_2 \Lambda_2] M \Lambda_1 O^k_1 M^+ + \\
& + \frac{\mu_1 Q_1}{p_1 k} \Lambda_2 O^i_2 \Lambda_2 M [\Lambda_1 S^1_{\mu\nu} \Lambda_1 O^k_1 \Lambda_1 - \Lambda_1 O^k_1 \Lambda_1 S^{(1)}_{\mu\nu} \Lambda_1] M^+ \} .
\end{aligned} \tag{20}
$$

В выражении (15) величина $P^{ik}_{\gamma,1}$ пропорциональна величине P^{ik}, $P^{ik}_{\gamma,2}$ выражается через производные от P^{ik}.

Остается показать, что величины $P^{ik}_{\gamma,3}$ и $P^{ik}_{\gamma,4}$ выражаются линейно через величины $P^{m\ell}$.

Рассмотрим первое слагаемое в фигурных скобках в (19) и распишем его более подробно

$$
[\Lambda_2 O^i_2 (D_2\Lambda_2)\Lambda_2 + \Lambda_2 (D_2\Lambda_2) O^i_2 \Lambda_2] M \Lambda_1 O^k_1 \Lambda_1 M^+ \equiv
$$

$$
\equiv \left[\frac{\hat{p}_2 + m_2}{2m_2} O^i_2 \left(D \frac{\hat{p}_2 + m_2}{2m_2} \right) \frac{\hat{p}_2 + m_2}{2m_2} + \right.
$$

$$+\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\left(D_2\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\right)O_2^i\,\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}]\,M\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1 M^+\equiv$$

$$\equiv[\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\,O_2^i\left(D_2\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\right)\frac{\hat p_2}{m_2}\cdot\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}+ \tag{21}$$

$$+\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\cdot\frac{\hat p_2}{m_2}\left(D_2\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}\right)O_2^i\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}]\,M\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1 M^+.$$

Вводя обозначение

$$\hat b_2=\frac{1}{2m_2}\left(\frac{p_2\varepsilon}{p_2k}\hat k-\hat\varepsilon\right)\equiv D_2\frac{\hat p_2+m_2}{2m_2}$$

учитывая, что $[\hat b_2\hat p_2]_+=0$, (21) можно переписать в виде

$$\Lambda_2[\tfrac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)O_2^i]_-\Lambda_2 M\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1 M^+\lambda_{\mu\nu}=$$

$$=\Lambda_2[S^2_{\mu\nu}O_2^i]_-\Lambda_2 M\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1 M^+\lambda_{\mu\nu} \tag{22}$$

$$\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{m_2}(p_{2,\mu}b_{2,\nu}-p_{2,\nu}b_{2,\mu}).$$

В силу (13) выражение (22) преобразуется к виду

$$\lambda_{\mu\nu}A^{i\ell}_{\mu\nu}P^{\ell k}, \tag{23}$$

т.е. выражается линейно через величины $P^{\ell m}$.

Аналогичным образом преобразуется вторая часть выражения (19).

Чтобы представить величину $P^{ik}_{\gamma,4}$ в виде линейной комбинации величин $P^{\ell m}$, достаточно доказать, что величина

$$\Lambda_1 S^1_{\mu\nu}\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1-\Lambda_1 O_1^k\Lambda_1 S^1_{\mu\nu}\Lambda_1 \tag{24}$$

пропорциональна величине

$$\Lambda_1[S^1_{\mu\nu}O_1^k]_-\Lambda_1. \tag{25}$$

Для $O^k=I$ (24) и (25) совпадают. Для $O^k=\gamma_\rho\gamma_5$ в силу

$$p_{1,\rho}\Lambda_1\gamma_\rho\gamma_5\Lambda_1=0$$

$$\Lambda_1\gamma_\rho\gamma_5\Lambda_1=\left(g_{\rho\sigma}-\frac{p_{1,\rho}p_{1,\sigma}}{m_1^2}\right)\Lambda_1\gamma_\sigma\gamma_5\Lambda_1=$$

$$=\left(g_{\rho\sigma}-\frac{p_{1,\rho}p_{1,\sigma}}{m_1^2}\right)\gamma_\sigma\gamma_5\Lambda_1=\left(g_{\rho\sigma}-\frac{p_{1,\rho}p_{1,\sigma}}{m_1^2}\right)\Lambda_1\gamma_\sigma\gamma_5 \tag{26}$$

и

$$\Lambda_1 S^1_{\mu\nu}\Lambda_1\gamma_\rho\gamma_5\Lambda_1-\Lambda_1\gamma_\rho\gamma_5\Lambda_1 S^1_{\mu\nu}\Lambda_1=$$

$$=\left(g_{\rho\sigma}-\frac{p_{1,\rho}p_{1,\sigma}}{m_1^2}\right)\Lambda_1[S^1_{\mu\nu}\gamma_\sigma\gamma_5]_-\Lambda_1. \tag{27}$$

Снова используя (13), получим, что $P^{ik}_{\gamma,4}$ также выражается нейно через $P^{\ell m}$.

Проведенное доказательство непосредственно распространяется на случай процессов с любым числом скалярных, спинорных и векторных частиц.

В этом случае для любого поляризационного тензора $P^{ik\dots s}_{\gamma}$ в тормозном излучении в приближении Лоу имеем

$$P^{ik..s}_{\gamma,L} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p'_\ell \epsilon}{p'_\ell k}\right)^2 P^{ik\dots s} + \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell Q_\ell \frac{p_\ell \epsilon}{p_\ell k}\right) DP^{ik\dots s} + B^{ik\dots s}_{mq\dots r} P^{mq\dots r}, \tag{28}$$

где $P^{ik\dots s}$ – компоненты аналогичного поляризационного тензора соответствующего "упругого" процесса, а $B^{ik\dots s}_{mq\dots r}$ – некоторые функции кинематических переменных и параметров Q_i и μ_i, которые легко вычислить.

В случае неполяризованных сечений (28) переходит в выражение (10) работы/2/.

Вероятно, соотношение (28) справедливо для процессов с участием частиц любого спина.

4. Заключение

Соотношение (28) означает, что результаты поляризационных измерений в тормозном излучении с точностью до членов порядка k^0 полностью определяются результатами аналогичных поляризационных измерений в "упругом" процессе .

Обратно: простые поляризационные измерения в тормозном излучении не позволяют получать информацию об амплитудах "упругого" процесса, заключенную в более сложных поляризационных тензорах этого процесса.

Автор благодарит Л.И.Лапидуса за интерес к работе и ряд замечаний.

Литература

1. F.E.Low, Phys. Rev., 110, 974 (1958).
2. T.H.Burnett and N.K.Kroll. Phys. Rev., Lett., 20, 86 (1968).
3. А.В. Тарасов. Препринт ОИЯИ Р2- 3830, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1968 года.