

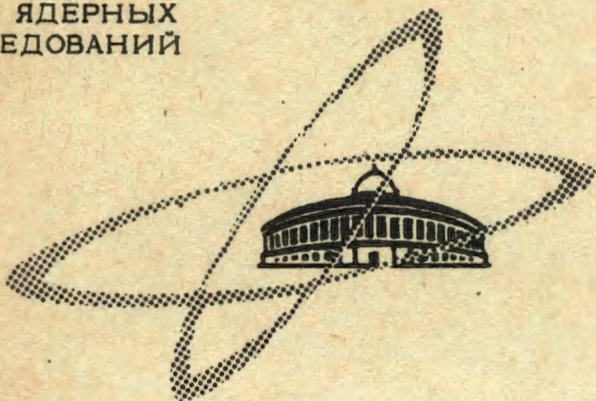
Л-84

18/VII 68

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3848



И. Лукач

ИЗЛУЧЕНИЕ ОРБИТИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ

$$U(r) = -\frac{a}{r^2}$$

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

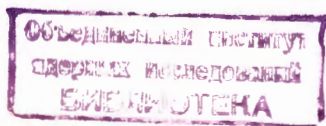
P2 - 3848

7344/2 ч

И.Лукач

ИЗЛУЧЕНИЕ ОРБИТИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$



Введение

В классической теории рассеяния в определенном классе сферически симметричных потенциалов существует явление орбитирования (спирального рассеяния) /1-5/. Сущность этого явления заключается в том, что при определенных условиях падающая частица взаимодействует с рассеивающим центром таким образом, что, приблизившись к нему, она совершает вокруг него некоторое число оборотов, после чего удаляется на бесконечность под некоторым наблюдаемым углом рассеяния. Если число оборотов велико, то частицы находятся во взаимодействии длительное время, и такое состояние должно иметь определенное время жизни.

В общем случае орбитирование происходит тогда, когда эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2m r^2},$$

где $U(r)$ – потенциал взаимодействия частиц, M – момент падающей частицы, m – приведенная масса, имеет хотя бы один барьер (максимум), и энергия падающей частицы близка к величине этого барьера /3,4/. В работе /6/ показано, что при квантовомеханическом рассмотрении явления орбитирования в случае достаточно высокого и широкого барьера при

энергиях падающих частиц, равных высоте эффективного потенциального барьера, возникает резонанс, соответствующий квазистационарному состоянию. Так как высота эффективного потенциального барьера является функцией момента падающих частиц, то мы имеем уравнение резонансной траектории, на которой расположены резонансные энергии, соответствующие физическим значениям момента.

Если мы имеем дело с заряженными частицами, то об их поведении можем судить по их излучению, измеряя которое в случае финитного движения, получаем информацию о квантовых уровнях и классических периодах обращения частиц. Аналогично этому, получив спектр излучения орбитирующей частицы, мы получим информацию о классических квазипериодах и квантовых квазиуровнях системы.

Существование орбитирования должно приводить к изменению спектра излучения орбитирующей частицы по сравнению с обычно вычисляемым спектром пролетающей частицы. Следует ожидать, что в нормальном (ступенчатом) спектре тормозного излучения (вычисляемом по формулам классической электродинамики) появятся максимумы. Непригодность обычной формулы (например: /7,8/), очевидно, связана с предположением о малом времени взаимодействия (пролета), несправедливым в случае орбитирования.

В настоящей работе, которая имеет прежде всего методическое значение, вычислены классический и квантовый спектры тормозного излучения в длинноволновом приближении для потенциала

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

где также встречаемся с орбитированием /5/, и задача решается аналитически как в классическом, так и в квантовом случаях. Сделан переход от квантовых формул к классическим. Для потенциала (1) число оборотов не зависит от энергии падающей частицы, а зависит лишь от ее момента, причем критический момент равен $M_{кр.} = \sqrt{2 a m}$. Будем рассматривать излучение при упругом рассеянии, т.е. излучение частиц с моментом $M > M_{кр.}$. Эффективная потенциальная энергия для потенциала (1) представляет собой бесконечно высокий барьер в нуле. Реальный случай конечного барьера в некоторой точке $r_B \neq 0$ будет рассмотрен позже в отдельной работе.

Квантовомеханический расчет подобного рода для потенциала (1) сделан также М.И.Файнгольдом и Л.Г.Яковлевым. Автор благодарит их за предоставленную возможность познакомиться с неопубликованными результатами работы.

Классическое рассмотрение

Количество энергии, излучаемое за время столкновения, в интервале частот ω и $\omega + d\omega$ в длинноволновом приближении дается формулой (7):

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi e^2}{3c^3} |\ddot{\vec{r}}_\omega|^2 d\omega, \quad (2)$$

где e - заряд электрона, c - скорость света, $\ddot{\vec{r}}_\omega$ - фурье-компонента ускорения $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{\vec{r}}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \exp(i\omega t) dt. \quad (3)$$

Для движения в поле потенциала (1) полярные координаты r , θ связаны следующими соотношениями:

$$r(\theta) = \frac{MK}{\sqrt{2mE \sin K\theta}}; \quad k^2 = \frac{M^2 - M_{kp}^2}{M^2} < 1; \quad (4)$$

$$\theta(r) = \frac{1}{K} \arccos(-r); \quad r(r) = \frac{MK}{\sqrt{2mE}} (1+r^2)^{1/2},$$

где $r = \frac{2Et}{MK}$ - безразмерная переменная, t - время, m , E , M - соответственно приведенная масса, энергия и момент падающей частицы. Частица приходит из бесконечности параллельно оси z ($\theta = 0$) и уходит опять в бесконечность при

$$\theta_0 = \frac{\pi}{K} = (2n+1)\pi + \chi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

причем n - число оборотов и χ - угол рассеяния. Для удобства вычисления $|\ddot{\vec{r}}_{\omega}|^2$ введем координаты

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (z \pm iy) = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{\pm i\theta}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) в интеграл (3), получаем для $\ddot{\vec{X}}_{\omega}^{\pm}$ выражение

$$\ddot{X}_{\omega}^{\pm} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{2\alpha m}{M^2 K^2} \sqrt{\frac{2E}{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i \left(\frac{MK\omega}{2E} r \pm \frac{1}{K} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-r) \right) \right] \frac{dr}{(1+r^2)^{3/2}},$$

которое после преобразования подынтегрального выражения принимает вид:

$$\ddot{X}_{\omega}^{\pm} = -\frac{e^{\pm i \frac{\pi}{K}}}{2\pi} \frac{1-K^2}{K^2} \sqrt{\frac{E}{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dr \frac{(r-i)^{\frac{1}{2K} - \frac{3}{2}}}{(r+i)^{\frac{1}{2K} + \frac{3}{2}}} \exp \left[i \left(\frac{MK\omega}{2E} r \right) \right]. \quad (6)$$

Интегралы в (6) сходятся, и поэтому можно перейти в комплексную плоскость и замкнуть путь интегрирования через бесконечно удаленную полуокружность $\operatorname{Im} r > 0$, интеграл вдоль которой исчезает. Вводя в интегралах (6) новую переменную $s = \frac{1}{2}(1+i r)$, можно их свести к интегралам, которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Psi(a, c; z)$ [12] и для \ddot{X}_{ω}^{\pm} получаются выражения:

$$\ddot{X}_{\omega}^{+} = -\sqrt{\frac{E}{m}} e^{i \frac{\pi}{2K}} \frac{\Psi\left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{MK}{2E} \omega\right) \quad (7)$$

$$\ddot{X}_{\omega}^{-} = -\sqrt{\frac{E}{m}} e^{-i \frac{\pi}{2K}} \frac{\Psi\left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{MK}{2E} \omega\right).$$

Теперь, подставляя эти выражения в формулу (2), получаем для спектрального распределения излучения:

$$\frac{d \xi_{\omega}}{d \omega} = \frac{4 \pi e^2 E}{3 m c^3} \exp \left(- \frac{MK}{E} \omega \right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\frac{\Psi \left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega \right)}{\Gamma \left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right)} + \frac{\Psi \left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right)} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\Psi \left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega \right)}{\Gamma \left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right)} - \frac{\Psi \left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right)} \right]^2 \right\}. \quad (8)$$

Из формулы (8) для $\frac{d \xi_{\omega}}{d \omega}$ видно, что

$$\frac{d \xi_{\omega}}{d \omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow \frac{16}{3 \pi} \frac{e^2 E}{m c^3} \cos^2 \frac{\pi}{2K}; \quad \frac{d \xi_{\omega}}{d \omega} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \approx \left(\frac{MK}{E} \omega \right)^{\frac{1}{K} + 1} \exp \left(- \frac{MK}{E} \omega \right)$$

(что следует из разложения $\Psi(a, c; z)$ при малых и больших значениях z). Из теории нулей вырожденной гипергеометрической функции $\Psi(a, c; z)$ следует ^{/10/}, что функция $\Psi \left(-\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1, \frac{MK}{E} \omega \right)$ имеет $\left[\left| \frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right| \right]$ нулей ($\left[|x| \right]$ - целая часть x). Далее функция $\left| \Psi \left(\frac{1}{2K} - \frac{1}{2}, -1; \frac{MK}{E} \omega \right) \right|$ не имеет нулей и является монотонно убывающей функцией. Из сказанного следует, что $\frac{d \xi_{\omega}}{d \omega}$ имеет

$$N_{\text{кл}} = \left[\left| \frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \right| \right] = \left[\frac{\theta_0}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] = \left[n + \frac{\chi}{2\pi} \right] = n \quad (9)$$

максимумов (максимум при $\omega = 0$ в $N_{\text{кл}}$ не входит). Таким образом в спектре излучения частицы n оборотами появляется n пиков. Такой характер спектра существенно отличается от обычно вычисляемого спектра пролетающей частицы и явно связан со своеобразным взаимодействием орбитирующей частицы с рассеивающим центром.

Рассмотрим еще поведение спектра в предельном случае, когда число оборотов велико. Для этого предположим, что $\frac{1}{2K} = n + \frac{1}{2}$; $\chi = 0$, т.е. падающая частица имеет момент

$$M = M_{\text{кр}} \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}; M_{\text{кр}} = \sqrt{2\alpha m},$$

(рассеивается вперед). В этом частном случае $\ddot{X}_{\omega}^{++} = 0$ из-за $\Gamma(-n-1)$ в знаменателе выражения (7) и $|\ddot{r}_{\omega}|^2 = |\ddot{X}_{\omega}^{-}|^2$. Учитывая связь вырожденной гипергеометрической функции $\Psi(a, c; z)$ и полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(z)$ /11/

$$\frac{\Psi(-n-1, -1; \frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}})}{\Gamma(n)} = \left[\frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right]^2 \frac{\Psi(-n+1, 3; \frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}})}{\Gamma(n)} =$$

(10)

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right]^2 L_{n-1}^{(2)} \left(\frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right) = (-1)^{n-1} (n+1)! \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s \left[\frac{M_{\text{кр}} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right]^{n+2}}{s!(s+2)!(n-1-s)!}$$

получаем для спектрального распределения излучения

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} \Big|_{\nu = 2n+1} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2 E}{m c^3} \left[\frac{M_{kp} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right]^4 \left[L_{n-1}^{(2)} \left(\frac{M_{kp} \omega}{2E\sqrt{n(n+1)}} \right) \right]^2.$$

Используя теперь предельную формулу при больших n для полиномов Лагерра /11/

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} L_n^{(2)} \left(\frac{z}{n} \right) = \frac{1}{z} J_2 (2\sqrt{z}),$$

где $J_2(z)$ - функция Бесселя, получаем

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{6} \frac{e^2 E}{m c^3} \left[\left(\frac{2M_{kp} \omega}{E} \right) J_2 \left(\sqrt{\frac{2M_{kp} \omega}{E}} \right) \right]^2. \quad (11)$$

В этом предельном случае в спектре имеется бесконечное число максимумов, что связано с бесконечным числом оборотов, необходимым для падения частицы на центр. Величина максимумов растет до бесконечности вследствие непрерывного сближения частиц и неучета закона сохранения энергии в классической теории излучения. В этом предельном случае реальный смысл имеет только огибающая максимумов.

Для иллюстрации на рис.1 показан вид траектории рассеянной частицы в потенциале (1), совершившей вокруг центра два оборота и рассеявшейся под нулевым углом. На рис.2 показано классическое спектральное распределение излучения для частиц, совершивших один, два и три полных оборота вокруг рассеивающего центра.

Квантовое рассмотрение

Для излучения частицы в длинноволновом приближении квантовая механика дает формулу ^{/9/}:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{16\pi e^2 \omega^4}{3c^3} |\langle \vec{k}', L_1, M_1 | \vec{r} | \vec{k}, L, M \rangle \vec{u}|^2 d\omega, \quad (12)$$

где матричный элемент означает переход из начального состояния $|\vec{k}, L, M\rangle$ в конечное $|\vec{k}', L_1, M_1\rangle$, причем

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad \frac{k_1^2}{k^2} = 1 - \frac{\hbar\omega}{E},$$

E, L, M - энергия, момент и магнитное квантовое число падающей частицы, \vec{u} - вектор поляризации фотона. Вычислим матричный элемент в (12) в случае потенциала (1). Решая уравнение Шредингера с потенциалом (1), получаем нормированные волновые функции, регулярные в нуле:

$$|\vec{k}, L, M\rangle = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{s+\frac{1}{2}}(kr) Y_{LM}(\theta, \phi), \quad (13)$$

где $J_\nu(z)$ - функция Бесселя, $Y_{LM}(\theta, \phi)$ - сферическая функция и введено обозначение:

$$s + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(L + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2am}{\hbar^2}}. \quad (14)$$

Вычислим теперь матричный элемент для поляризаций, направленных по осям $z, \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy)$, Получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy), \quad \text{Получаем:}$$

$$\langle k_1^+, L_1, M_1 | \left\{ \begin{array}{l} r \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{-i\phi} \end{array} \right\} | k^+, L, M \rangle = I \int Y_{L_1 M_1}^*(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} \end{array} \right\} d\Omega, \quad (15)$$

где через I обозначен интеграл от радиальных функций:

$$I = \sqrt{k_1 k} \int_0^\infty J_{L_1 + \frac{1}{2}}(k_1 r) J_{L + \frac{1}{2}}(kr) r^2 dr. \quad (16)$$

Интеграл по углам в (15) берется с учетом соотношений /13/

$$\cos \theta Y_{LM}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{L+1, M}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(L+M)(L-M)}{(2L+1)(2L-1)}} Y_{L-1, M}(\theta, \phi)$$

$$\sin \theta e^{i\phi} Y_{LM}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{L+1, M+1}(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{(L+M)(L-M)}{(2L+1)(2L-1)}} Y_{L-1, M+1}(\theta, \phi) \quad (17)$$

$$\sin \theta e^{-i\phi} Y_{LM}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)}} Y_{L+1, M-1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L+1)(2L-1)}} Y_{L-1, M-1}(\theta, \phi)$$

и для соответствующих поляризации он равен:

для поляризации вдоль оси z

$$\left\{ \sqrt{\frac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}} \delta_{L_1, L+1} + \sqrt{\frac{(L-M)(L+M)}{(2L+1)(2L-1)}} \delta_{L_1, L-1} \right\} \delta_{M_1, M} \quad (18)$$

для поляризации вдоль оси $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}} \delta_{L_1, L+1} - \sqrt{\frac{(L-M)(L+M-1)}{(2L+1)(2L-1)}} \delta_{L_1, L-1} \right\} \delta_{M_1, M+1}$$

для поляризации вдоль оси $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)}} \delta_{L_1, L+1} - \sqrt{\frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L+1)(2L-1)}} \delta_{L_1, L-1} \right\} \delta_{M_1, M-1}$$

Интеграл (16) можно взять, применяя два раза следующее соотношение для функций Бесселя [11/ x)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^\nu J_\nu(\xi z)] = z \xi^\nu J_{\nu-1}(\xi z), \quad \xi = \frac{k}{k_1} \quad (19)$$

х) Расходящийся интеграл [16/ взят методом дифференцирования по параметру. Используя соотношения коммутации для \vec{r} , \hat{p} , $H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + U(\vec{r})$, можно написать $\langle \vec{k}_1, L_1, M | \vec{r} | \vec{k}_2, L, M \rangle = \frac{1}{\omega^2} \langle \vec{k}_1, L_1, M | \vec{\nabla} U(\vec{r}) | \vec{k}, L, M \rangle$. Интеграл от радиальных функций в матричном элементе справа сходится и вычисление дает одинаковый результат.

после чего выражение (16) для I принимает вид:

$$I = \frac{1}{k^2} \xi^{-s_1-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{s_1+\frac{5}{2}} \int_0^1 J_{s_1+\frac{5}{2}}(\xi z) J_{s_1+\frac{1}{2}}(z) dz. \quad (20)$$

Вычисляем интеграл в (20), /14/ и, введя переменную $\xi = 1 - \zeta^2 = \frac{h\omega}{E}$, получаем следующее выражение для I

$$I = \frac{4}{k^2} (1-\xi)^{-\frac{s_1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{s_1+s}{2}+2)(1-\xi)^{s_1+\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{s-s_1-1}{2})\Gamma(s_1+\frac{7}{2})} {}_2F_1\left(\frac{s_1-s+3}{2}, \frac{s_1+s+4}{2}, s_1+\frac{7}{2}; 1-\xi\right) \right\} \quad (21)$$

($\Gamma(z)$ - гамма-функция, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ - гипергеометрическая функция), которое с учетом соотношения /10/

$$\frac{d^2}{dz^2} [z^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha+b-c} {}_2F_1(a, b, c; z)] = \quad (22)$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-2)} z^{\alpha-3} (1-z)^{\alpha+b-c-2} {}_2F_1(a-2, b-2, c-2; z)$$

приводится к виду:

$$I = \frac{4}{k^2} \frac{\Gamma(\frac{s_1+s}{2}+2) \xi^{-2} (1-\xi)^{\frac{1}{2}(s_1+1)}}{\Gamma(\frac{s-s_1-1}{2}) \Gamma(s_1+\frac{3}{2})} {}_2F_1\left(\frac{s_1-s-1}{2}, \frac{s_1+s}{2}, s_1+\frac{3}{2}; 1-\xi\right) \quad (23)$$

Таким образом, для спектрального распределения излучения фотонов по-лучаем (магнитное квантовое число падающей частицы принимаем равным нулю):

$$\frac{d\xi_{\omega}}{d\omega} = \frac{8\pi e^2 E}{3mc^3} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\frac{2(L+1)}{\sqrt{(2L+1)(2L+3)}} \Gamma\left(\frac{s+s^+}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(-\frac{s^+-s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s^+ + \frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^{\frac{1}{2}(s^++1)} {}_2F_1\left(\frac{s^+-s}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s^++s}{2}, s^+ + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right) + \right. \\ & \frac{\frac{2L}{\sqrt{(2L+1)(2L-1)}} \Gamma\left(\frac{s+s^-}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s^- + \frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^{\frac{1}{2}(s^-+1)} {}_2F_1\left(-\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s+s^-}{2}, s^- + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^2 + \\ & \left. \frac{\frac{4(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)} \Gamma\left(\frac{s+s^+}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(-\frac{s^+-s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s^+ + \frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^{\frac{1}{2}(s^++1)} {}_2F_1\left(\frac{s^+-s}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s^++s}{2}, s^+ + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right) - \right. \\ & \left. \frac{\frac{4L(L-1)}{(2L+1)(2L-1)} \Gamma\left(\frac{s+s^-}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s^- + \frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^{\frac{1}{2}(s^-+1)} {}_2F_1\left(-\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s+s^-}{2}, s^- + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)\right\}^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$s^{\pm} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(L + \frac{1}{2} \pm 1\right)^2 - \frac{2\alpha m}{\hbar^2}}. \quad (25)$$

Исследуем выражение (24) для спектрального распределения излучения фотонов. Прежде всего:

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \text{const} \neq 0; \quad \left. \frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} \right|_{\hbar\omega=E} = 0.$$

Далее, из теории нулей гипергеометрической функции ${}_2F_1(a, b, c; z)$ ^{/15/} следует, что для $0 < \frac{\hbar\omega}{E} < 1$ и $\text{Im } s^- = 0$ (рассматриваем излучение только при упругом рассеянии) функция

$${}_2F_1\left(-\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s+s^-}{2}, s^- + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)$$

имеет $\left[\left|\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2}\right|\right]$ нулей. $\left[\left|x\right|\right]$ - целая часть x . Функция

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s^+ + s}{2} + 2\right) \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right)^{\frac{1}{2}(s^+ + 1)}}{\Gamma\left(-\frac{s^+ - s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s^+ + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_1\left(\frac{s^+ - s}{2} - \frac{1}{2}, \frac{s + s^+}{2}, s^+ + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right) \quad (26)$$

и ее производная не имеют нулей. Исходя из этого и зная, что выражение (26) при $\omega = 0$ равно $\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} (s^+ - s + 3)$ и при $\hbar\omega = E$ равно нулю, заключаем, что абсолютная величина выражения (26) является монотонно убывающей функцией ($0 < \frac{\hbar\omega}{E} < 1$). Из сказанного следует, что вы-

ражение (24) для $\frac{d\delta}{d\omega}$ имеет

$$N_{kb} = \left[\frac{s-s^-}{2} - \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{\sqrt{\left(L + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\alpha m}{\hbar^2}} - \sqrt{\left(L - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\alpha m}{\hbar^2}}}{2} - \frac{1}{2} \right] \quad (27)$$

максимумов (максимум при $\omega = 0$ в число N_{kb} не входит). Как видно из формулы (27) для числа максимумов, оно существенно зависит от параметра α . Введя обозначение $\ell_{kp} (\ell_{kp} + 1) = \frac{2\alpha m}{\hbar^2}$, выражение для числа максимумов можно переписать следующим образом:

$$N_{kb} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{2L + \frac{1}{4} + (L + \ell_{kp})(L - \ell_{kp} - 1)} - \sqrt{\frac{1}{4} + (L + \ell_{kp})(L - \ell_{kp} - 1)} - 1 \right) \right], \quad (28)$$

откуда видно, что при $L = L_{kp} + 1 + \text{sgn}(\ell_{kp} - L_{kp})$, $L_{kp} = \left[\ell_{kp} \right]$

$$\max N_{kb} = N_{kb} \Big|_{L=L_{kp}+1} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{2L_{kp} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \max N_{kb} = N_{kb} \Big|_{L=L_{kp}+2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{2L_{kp} + \frac{17}{4} + (L_{kp} + 1 - \ell_{kp})(\ell_{kp} + L_{kp} + 2)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{1}{4} + (L_{kp} + 1 - \ell_{kp})(\ell_{kp} + L_{kp} + 2)} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Нетрудно найти фазу рассеяния δ_L для потенциала (1). Она равна:

$$\delta_L = \frac{\pi}{2} \left(L + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(L + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{2am}{\hbar^2}} \right). \quad (30)$$

С помощью выражения (30) для фазы δ_L можно формулу для числа максимумов переписать следующим образом:

$$N_{kb} = \left[\frac{\delta_{L-1} - \delta_L}{\pi} \right]. \quad (31)$$

Таким образом, число максимумов N_{kb} равно целой части от разницы фаз конечного и начального состояний, деленной на π . И, соответственно, увеличению разности фаз конечного и начального состояния на π соответствует появление максимума в спектральном распределении тормозного излучения.

В заключение хотелось бы отметить, что квантовая формула (24) для спектрального распределения излучения и формула (31) для числа максимумов при больших моментах $L \gg 1$ полностью переходят в классическую формулу (8) для спектрального распределения излучения и классическую формулу (9) для числа максимумов. При этом необходимо использовать предел /10/

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} c^{-a} \left(1 - \frac{z}{c}\right)^c {}_2F_1\left(a, b, c; 1 - \frac{z}{c}\right) = e^{-z} \Psi(a, a-b+1; z), \quad (32)$$

причем $c = s^{\pm} + \frac{1}{2}$, и разность $s - s^{\pm}$ следует заменить на величину $\frac{\partial s}{\partial L} \Delta L$, $\Delta L = \pm 1$.

Из предельного перехода видно, что классические формулы (8) и (9) при $k \rightarrow 0$ не верны, что, конечно, вполне следовало ожидать, так как, во-первых, классическая теория излучения не учитывает закона сохранения энергии и, во-вторых, при большом числе оборотов излучение должно сильно интерферировать, благодаря чему многие максимумы в классической формуле исчезают. Число максимумов $N_{\text{кв}}$ всегда меньше числа максимумов $N_{\text{кл}}$.

Несмотря на то, что полученные результаты нельзя непосредственно обобщить, так как в случае потенциала (1) как число оборотов, так и фаза рассеяния не зависят от энергии, тем не менее, этот случай показывает, что спиральный характер рассеяния сказывается и на спектре излучения такой частицы.

Интересен тот факт, что уже в классическом спектре излучения орбитирующей частицы имеются явно выделенные частоты (максимумы). Классический характер спектра излучения остается и в квантовом рассмотрении, но число максимумов за счет интерференционных эффектов меньше и существенно зависит от постоянной связи μ .

На рис.3 показано спектральное распределение излучения фотонов для трех разных постоянных $\mu_{\text{кр}}$ и моментов L , для которых возможны один, два и три максимума соответственно.

В заключение автор выражает благодарность Смородинскому Я.А. за многочисленные обсуждения, ценные замечания и постоянный интерес к данной работе.

Л и т е р а т у р а

1. Ford K.W., Wheeler J.A., *Ann.of Phys.*, 7, 259 (1959).
2. Ford K.W., Hill D.L., Wakano M., Wheeler J.A., *Ann.of Phys.*, 7, 239 (1959).
3. Баширов М.Э., Файнгольд М.И., Яковлев Л.Г. Особенности классического рассеяния в поле $-\frac{a}{r^k}$. Ученые записки Ульяновского университета, т.18, выпуск 5, 1964г.
4. Файнгольд М.И. Некоторые особенности спирального рассеяния, диссертация АН УзССР. Институт ядерной физики, Ташкент, 1966г.
5. Лукач И. Дипломная работа, физфак МГУ, 1965г.
6. Лукач И., Смородинский Я.А. Орбитирование и резонансные состояния, препринт ОИЯИ Р2-3692, 1968.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, ГИФМЛ, Москва, 1962г.
8. Джексон Дж. Классическая электродинамика, МИР, Москва, 1965г.
9. Давыдов А.С. Квантовая механика, ГИФМЛ, Москва, 1963г.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1, Наука, Москва 1965г.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, Наука, Москва, 1966.
12. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции, ИЛ. Москва, 1963г.
13. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, ГИФМЛ, Москва, 1960г.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, Москва, 1962г.
15. Van Fleck E.B., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22, 277 (1902).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1968 года.

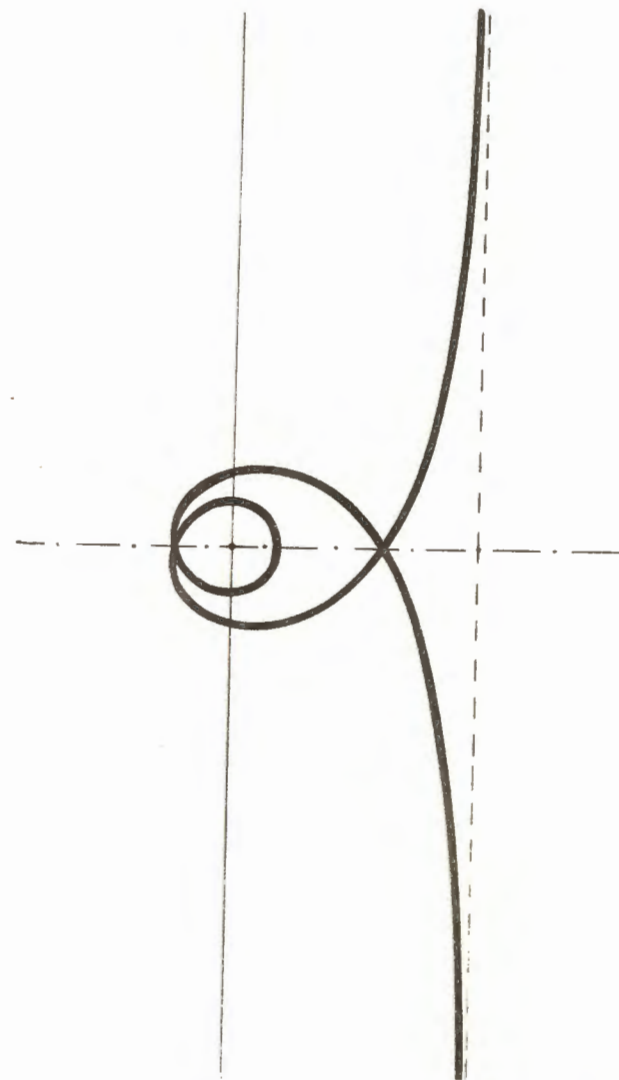


Рис.1. Классическая траектория частицы, движущейся в поле $U(r) = -\frac{a}{r^2}$ и обладающей моментом $M = \sqrt{\frac{25}{24}} M_{кр}$, $M_{кр} = \sqrt{2am}$, которая совершает вокруг рассеивающего центра два оборота и рассеивается под нулевым углом.

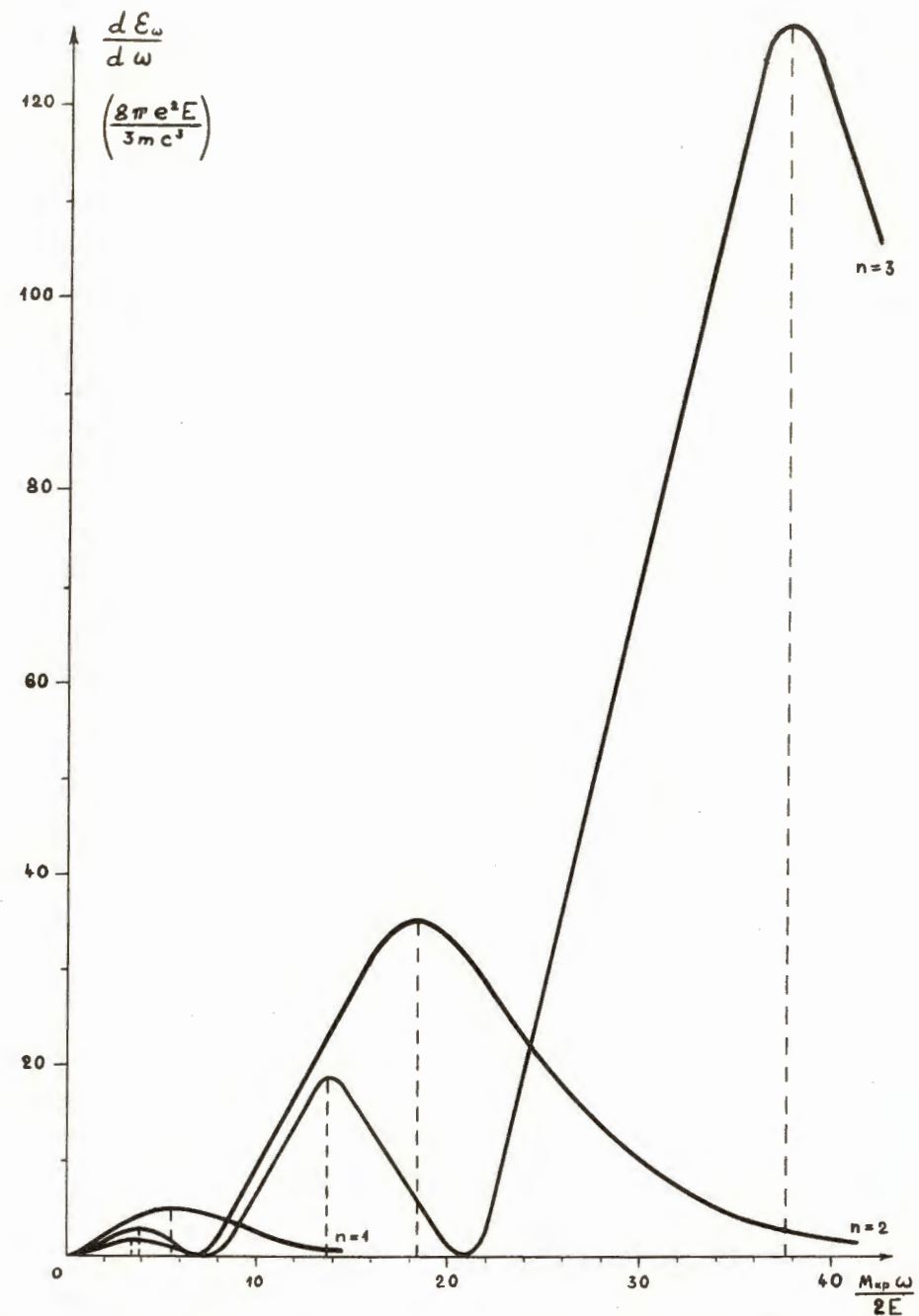


Рис.2. Вид классического спектрального распределения излучения для частиц, падающих с моментами $M = \sqrt{\frac{9}{8}} M_{кр}, \sqrt{\frac{25}{24}} M_{кр}, \sqrt{\frac{49}{48}} M_{кр}$ и совершивших вокруг рассеивающего центра соответственно $n = 1, 2, 3$ оборота.

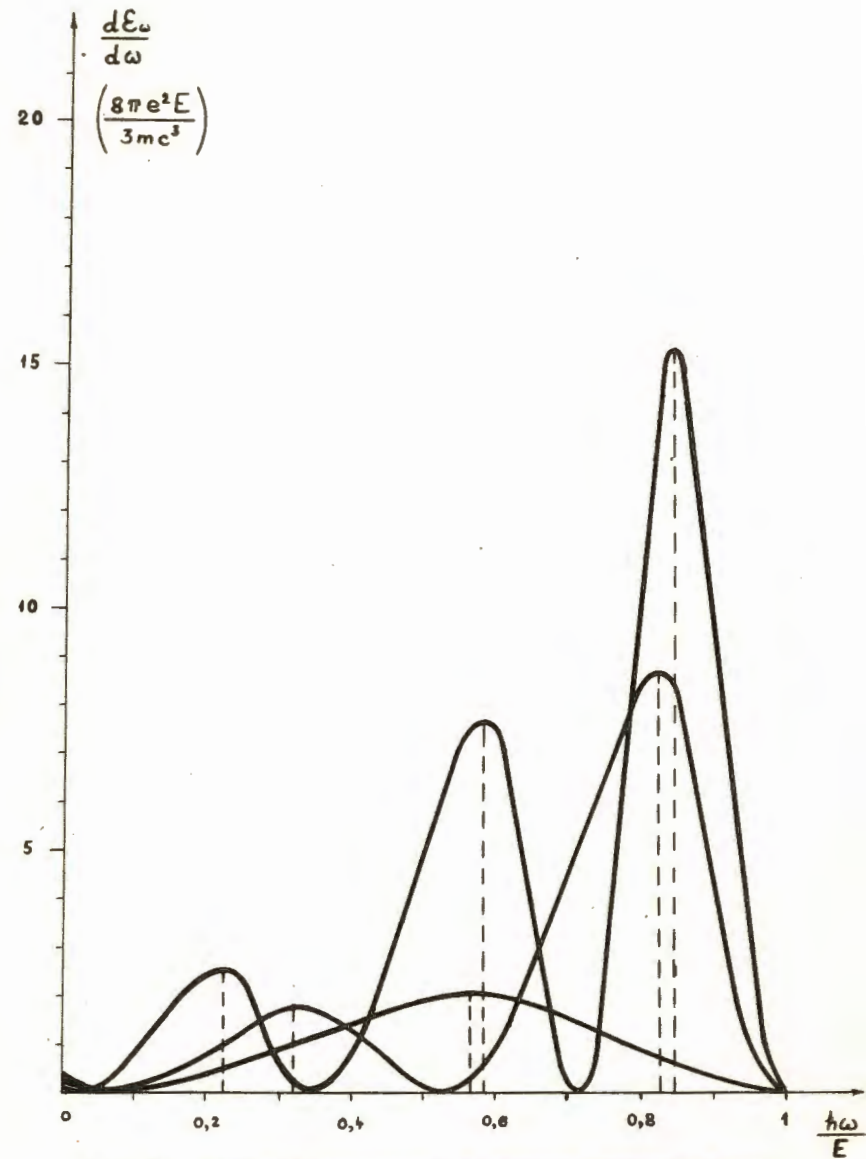


Рис.3. Вид квантового спектрального распределения излучения при параметрах $\frac{2am}{\hbar^2} = 126, 378, 1188$ и моментах падающей частицы, равных $L = 1, 2, 35$, когда в спектральном распределении излучения появляются соответственно один, два и три максимума.