ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3847

В.А.Матвеев

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ТОКОВ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Р2 - 3847

В.А.Матвеев

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ТОКОВ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В настоящей работе рассматривается задача нахождения локальных токов составных частиц в рамках релятивистски ковариантного квантово-механического описания.

В докладе А.Н.Тавхелидзе на Сольвеевском конгрессе 1967 г. /1/ было предложено при построении локальных токов составных частиц исходить из одновременного квазипотенциального метода квантовой теории поля /2/. Там же на основе квазипотенциального уравнения были получены выражения для нулевых моментов или зарядов векторных и аксиально-векторных токов двух спиновых частиц.

При этом заряды определялись как вариационные производные от полной энергии системы частиц по независимым от времени и однородным в пространстве внешним полям.

Подчеркнем, что обычный вывод квазипотенциального уравнения для одновременной волновой функции системы частиц требует фиксированной системы отсчета, например, системы центра инерции частиц. В присутствии внешних полей фиксировать систему центра инерции, вообще говоря, невозможно, за исключением случая, когда поле является однородным в пространстве и импульс системы частиц сохраняется. Поэтому обычная формулировка квазипотенциального подхода оказывается непременимой в присутствии неоднородных внешних полей.

Следуя программе, намеченной в сольвеевском докладе А.Н.Тавхелидзе, мы представили ниже процедуру, позволяющую вычислять динамические моменты токов составных частиц на основе обобщенного квазипотенциального уравнения.

В первом параграфе работы определяется 2-временная функция Грина двух скалярных частиц и анализируются ее свойства в присутствии внешних полей.

Во втором параграфе формулируется обобщенное квазипотенциальное уравнение для двух бесспиновых частиц в присутствии внешних полей и выводится выражение для производящей функции динамических моментов токов.

В третьем параграфе полученные выше результаты обобщаются для случая двух спиновых частиц.

В четвертом параграфе для иллюстрации метода рассматривается случай двух свободных частиц. Специально выписываются выражения для аксиальной константы, магнитного и электрического дипольных моментов системы.

Основные определения и обозначения, используемые ниже, такие же, как в работе /3/.

§1. Двухвременная функция Грина двух скалярных частиц в присутствии внешних полей

Четырехвременная функция Грина скалярных частиц в присутствии внешних полей определяется следующим выражением:

$$G(x_1 x_2; x'_1 x'_2) = \frac{\langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)S)|0\rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}, \tag{1.1}$$

где $\phi(x)$ – поле свободных скалярных частиц, S – матрица рассеяния, функционально зависящая от внешних полей.

Разлагая функцию Грина (1.1) по степеням внешнего поля $A(x)$ и оставляя лишь члены, линейные по полю, получим

$$G(x_1 x_2; x'_1 x'_2) = G^{(0)}(x_1 x_2; x'_1 x'_2) + \int \Sigma(x_1 x_2; x'_1 x'_2; z) A(z)\, dz, \tag{1.2}$$

где

$$\Sigma(x_1 x_2; x'_1 x'_2; z) = \frac{\delta G(x\, x; x'\, x')}{\delta A(z)}\Big|_{A=0} \tag{1.3}$$

и $G^{(0)}(x_1 x_2; x'_1 x'_2)$ – функция Грина двух скалярных частиц в отсутствие поля.

В дальнейшем удобно использовать переменные X, x и X', x'

$$x_{1,2} = X \pm \frac{x}{2}; \qquad x'_{1,2} = X' \pm \frac{x'}{2}. \tag{1.4}$$

Используя трансляционную инвариантность, можно показать, что

$$G(x_1 x_2; x'_1 x'_2) = G(X, X'; x, x')$$

$$G^{(0)}(x_1 x_2; x'_1 x'_2) = G^{(0)}(X - X', x, x') \tag{1.6}$$

$$\Sigma(x_1 x_2; x'_1 x'_2; z) = \Sigma(X - X'; x, x'; z - \frac{X + X'}{2}).$$

Пусть внешнее поле медленно меняется в пространстве

$$A(z) = a + a_\mu z_\mu + \ldots \tag{1.6}$$

В этом случае уравнение (1.2) для величин (1.5) принимает вид

$$G(X, X'; x, x') = G_I(X - X'; x, x') + G_{II}(X, X'; x, x'), \tag{1.7}$$

где

$$G_I(X-X', x, x') = G^{(0)}(X-X', x, x') + \int \Sigma(X-X', x, x', \xi)(a + a_\mu \xi_\mu)\, d\xi \qquad (1.8)$$

$$G_{II}(X, X', x, x') = \frac{1}{2} a_\mu (X+X')_\mu \int \Sigma(X-X', x, x', \xi)\, d\xi . \qquad (1.8')$$

Величина $G_I(X-X', x, x')$ соответствует той части функции Грина двух частиц, которая зависит лишь от разности $(X-X')$ и является трансляционно инвариантной. Эта часть функции Грина соответствует процессам, в которых полный импульс двух частиц сохраняется, а взаимодействие с внешним полем происходит за счет возбуждения внутренних степеней свободы.

В дальнейшем нас будет интересовать именно эта величина, которая может быть выделена из полной функции Грина из условия

$$G_I(X-X', x, x') = G(X, X', x, x')\Big|_{X+X'=0} \qquad (1.9)$$

Определим фурье-образы величин (1.5) следующим образом:

$$G(X, X', x, x') = \frac{1}{(2\pi)^8} \int G(p, p', q, q')\, e^{ipX - ip'X' + iqx - iq'x'}\, dp\, dp'\, dq\, dq' \qquad (1.10)$$

$$G^{(0)}(X-X', x, x') = \frac{1}{(2\pi)^8} \int G^{(0)}(q, q')\, \delta(p-p')\, e^{ipX - ip'X' + iqx - iq'x'} \times$$

$$\times\, dp\, dp'\, dq\, dq' \qquad (1.10')$$

$$\Sigma\left(X-X', x, x', z - \frac{X+X'}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int \Sigma(p, p', q, q')\, \delta(p-p'-k) \times$$

$$\times\, e^{ipX - ip'X' + iqx - iq'x' + ikz}\, dp\, dp'\, dq\, dq'\, dk \qquad (1.10'')$$

$$A(z) = \int A(k)\, e^{-ikz}\, dk . \qquad (1.10''')$$

Вводя переменные

$$\mathcal{P} = \frac{p+p'}{2}; \quad \Lambda = (p-p'), \qquad (1.11)$$

получим соотношение между фурье-образами величин (1.5):

$$G_P(q, q', \Lambda) = G_P^{(0)}(q, q')\, \delta(\Lambda) + \Sigma_P(q, q', \Lambda)\, A(\Lambda). \qquad (1.12)$$

Определим теперь фурье-образ двухвременной функции Грина в "брейтовской" системе

$$\vec{P} = 0 \qquad P_0 = \mathcal{E} \qquad (1.13)$$

в присутствии внешних полей следующим образом:

$$\tilde{G}(\mathcal{E}, \vec{q}, \vec{q}') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0\, dq_0'\, d\Lambda\, G_{\vec{P}=0}(q, q', \Lambda). \qquad (1.14)$$

Интегрирование по переменной " Δ " автоматически выделяет, согласно формуле (1.9), трансляционно-инвариантную часть полной функции Грина.

В результате получим уравнение для фурье-образа двухвременной функции Грина

$$\tilde{\tilde{G}}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')=\tilde{\tilde{G}}^{(0)}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')+\int\tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,',\Delta)A(\Delta)\,d\Delta \qquad (1.15)$$

$$\tilde{\tilde{G}}^{(0)}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')=\int_{-\infty}^{+\infty}dq_0\,dq_0'\;G^{(0)}_{\vec{P}=0}(q,q') \qquad (1.16)$$

$$\tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,',\Delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dq_0\,dq_0'\;\Sigma_{\vec{P}=0}(q,q',\Delta)\,. \qquad (1.16')$$

§2. *Квазипотенциальное уравнение в присутствии внешних полей*

Определим обратный оператор $\tilde{\tilde{G}}^{-1}$ соотношением

$$\int\tilde{\tilde{G}}^{-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,'')\,\tilde{\tilde{G}}(\mathcal{E},\vec{q}\,'',\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,''=\delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\,. \qquad (2.1)$$

В линейном приближении по внешнему полю для величины $\tilde{\tilde{G}}^{-1}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\tilde{G}}^{-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')=\tilde{\tilde{G}}^{(0)-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')-\frac{1}{2\pi i}\int\tilde{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,',\Delta)A(\Delta)\,d\Delta\,, \qquad (2.2)$$

где вершинный оператор $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ имеет вид:

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,',\Delta)=2\pi i\int\tilde{\tilde{G}}^{(0)-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,'')\tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathcal{E},\vec{q}\,'',\vec{q}\,''',\Delta)\,\tilde{\tilde{G}}^{(0)-1}(\mathcal{E},\vec{q}\,''',\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,''d\vec{q}\,'''$$

Постулируем теперь уравнение

$$\int\tilde{\tilde{G}}^{-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')\,\Psi(\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,'=0, \qquad (2.4)$$

которое является обобщением квазипотенциального уравнения

$$\int\tilde{\tilde{G}}^{(0)-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')\,\Psi^{(0)}(\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,'=0 \qquad (2,5)$$

в присутствии внешних полей.

Напомним, что волновая функция $\Psi^{(0)}(\vec{q})$ связана с амплитудой Бете-Солпитера двух частиц следующим образом:

$$\Psi^{(0)}(\vec{q})=\int_{-\infty}^{+\infty}dq_0\;\chi_{\vec{P}=0}(q) \qquad (2.6)$$

и нормируется из условия

$$2\pi i\int\Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}^2}\,\tilde{\tilde{G}}^{(0)-1}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}\,')\,\Psi^{(0)}(\vec{q}\,')\,d\vec{q}\,d\vec{q}\,'=1\,. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.4) имеет решение $\Psi(\vec{q})$ с энергией E, которое может быть разложено по степеням внешнего поля

$$\Psi(\vec{q})=\Psi^{(0)}(\vec{q})+\delta\Psi(\vec{q})+\dots$$
$$E=E^{(0)}+\delta E+\dots \qquad (2.8)$$

Умножая уравнение (2.4) на $2\pi i\Psi^{*(0)}(\vec q)$ и интегрируя по $d\vec q$, получим в линейном приближении

$$\delta\mathcal{E} = \int j(\Delta)\, A(\Delta)\, d\Delta \,, \tag{2.9}$$

где

$$j(\Delta) = \frac{1}{2\mathcal{E}^{(0)}} \int \Psi^{*(0)}(\vec q)\, \tilde{\tilde\Gamma}(\mathcal{E}, \vec q, \vec q\,', \Delta)\, \Psi^{(0)}(\vec q\,')\, d\vec q\, d\vec q\,' . \tag{2.10}$$

В дальнейшем будем считать, что внешнее поле не зависит от времени.

Тогда выражения (2.9) можно представить в форме

$$\delta\mathcal{E} = \int j(\vec x, \mathcal{E})\, A(\vec x)\, d\vec x \,, \tag{2.11}$$

где

$$j(\vec x, \mathcal{E}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int j(\vec\Delta, \Delta^0 = 0)\, e^{-i\vec\Delta \vec x}\, d\vec\Delta \,. \tag{2.12}$$

Величина $j(\Delta)$ определяет ту часть тока составной системы, которая обусловлена внутренним движением частиц. Поэтому ее скорее можно рассматривать как производящую функцию динамических моментов тока составной системы.

Пусть поле $A(\vec x)$ медленно изменяется в пространстве и может быть разложено в ряд

$$A(\vec x) = a + \vec a\,\vec x + \ldots \tag{2.13}$$

Тогда для вариации полной энергии системы получим выражение

$$\delta\mathcal{E} = a Q + \vec a\,\vec D + \ldots \,, \tag{2.14}$$

где

$$Q = \int j(\vec x, \mathcal{E})\, d\vec x$$

$$\vec D = \int j(\vec x, \mathcal{E})\, \vec x\, d\vec x \tag{2.15}$$

есть нулевой и первый динамические моменты тока соответственно.

Таким образом, динамические моменты токов будут определяться вариационными производными от полной энергии системы по параметрам внешнего поля.

§3. *Обобщение для спиновых частиц*

Развитый выше аппарат для вычисления динамических моментов токов может быть обобщен для случая частиц со спином 1/2 .

При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что величины G , $G^{(0)}$ и т.п. являются операторами, действующими в пространстве 16-компонентных спиноров. Фурье-образ двухвременной функции Грина двух спиновых частиц в присутствии внешнего поля определим выражением

$$\tilde{\tilde G}(\mathcal{E}, \vec q, \vec q\,') = \Lambda \int T^{+}(\vec\Delta, \vec q)\, G_{\vec P=0}(q, q', \Delta)\, T^{+}(-\vec\Delta, \vec q\,')\Lambda\, dq_0\, dq_0'\, d\Delta \,. \tag{3.1}$$

Здесь $T(\vec\Delta, \vec q)$ – оператор унитарного преобразования Фолди-Вотхаузена для двух спиновых частиц /4/:

$$T(\vec\Delta, \vec q) = T^{(1)}\left(\frac{\vec\Delta}{4} + \vec q\right) T^{(2)}\left(\frac{\vec\Delta}{4} - \vec q\right), \tag{3.2}$$

где

$$T^{(1)}_{(\vec{k})} = \frac{m + W(\vec{k}) - \vec{\gamma}^{(i)}\vec{k}}{\sqrt{2W(\vec{k})(m + W(\vec{k}))}}; \quad W(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \tag{3.3}$$

и

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}) \tag{3.4}$$

есть проекционный оператор на подпространство спиноров, имеющих только "верхние" ($\gamma_0^{(1)} = \gamma_0^{(2)} = 1$) или же только "нижние" ($\gamma_0^{(1)} = \gamma_0^{(2)} = -1$) компоненты /4/.

В линейном приближении по внешнему полю обратный оператор величины (3.1) определяется уравнениями (2,1-3), в которых

$$\tilde{\tilde{G}}^{(0)}(\mathcal{E}, \vec{q}, \vec{q}\,') = \Lambda\, T^{+}(0,\vec{q}) \int G_{\vec{P}=0}(q,q')\, dq_0^0\, dq_0'^0\, T^{+}(0, \vec{q}\,')\, \Lambda \tag{3.5}$$

$$\tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathcal{E}, \vec{q}, \vec{q}\,', \Delta) = \Lambda\, T^{+}(\vec{\Delta}, \vec{q}) \int \Sigma_{\vec{P}=0}(q \cdot q', \Delta)\, dq_0 dq_0'\, T^{+}(-\vec{\Delta}, \vec{q}\,')\, \Lambda\,. \tag{3.5'}$$

Как и в случае бесспиновых частиц, постулируем обобщенное квазипотенциальное уравнение (2.4), решение которого можно разложить по внешнему полю

$$\Psi(\vec{q}) = \Psi^{(0)}(\vec{q}) + \delta\Psi(\vec{q}) + \ldots \tag{3.6}$$

Здесь волновая функция нулевого приближения $\Psi^{(0)}(\vec{q})$ связана с амплитудой Бете-Солпитера двух спиновых частиц соотношением

$$\Psi^{(0)}(\vec{q}) = \Lambda\, T^{+}(0,q) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\vec{P}=0}(q)\, dq \tag{3.7}$$

и нормируется из условия

$$2\pi i \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\, \frac{\partial \tilde{\tilde{G}}^{-1}_{(0)}}{\partial \mathcal{E}}(\mathcal{E}, \vec{q}, \vec{q}\,')\, \Psi^{(0)}(\vec{q}\,')\, d\vec{q}\, d\vec{q}\,' = 1\,. \tag{3.8}$$

Вариация полной энергии системы двух спиновых частиц определяется выражением (2.9), где

$$j(\mathcal{E}, \Delta) = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\, \tilde{\tilde{\Gamma}}(\mathcal{E}, \vec{q}, \vec{q}\,', \Delta)\, \Psi^{(0)}(\vec{q}\,')\, d\vec{q}\, d\vec{q}\,'\,. \tag{3.9}$$

§4. *Динамические моменты токов двух спиновых частиц*

В качестве иллюстрации развитого выше метода рассмотрим подробно случай системы из двух свободных частиц со спином 1/2. Для конкретности будем говорить о модели "мезона", состоящего из двух независимых кварков. В присутствии внешнего поля $A(x)$ функция Грина двух независимых кварков удовлетворяет уравнению

$$[i\gamma^{(1)}\partial_{x_1} - m - \Gamma^{(1)} A(x_1)][i\gamma^{(2)}\partial_{x_2} - m - \Gamma^{(2)} A(x_2)]\, G(x_1\, x_2 x_1'\, x_2') = -\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,. \tag{4.1}$$

Здесь $\Gamma^{(1,2)}$ – операторы, построенные из зарядовых и дираковских γ – матриц и имеющие необходимые трансформационные свойства. Например, если внешнее поле является векторным или аксиально-векторным, то $\Gamma^{(i)}$ имеют следующий вид:

$$\Gamma^{(i)} = \begin{cases} \gamma_\mu^{(i)} \lambda^{(i)} & \text{векторное поле} \\ i\gamma_\mu^{(i)} \gamma_5^{(i)} \lambda^{(i)} & \text{аксильно- векторное поле,} \end{cases} \tag{4.2}$$

где $i = 1, 2$, и $\lambda^{(i)}$ – есть эрмитовы матрицы 3×3.

Переходя к импульсному представлению и оставляя в уравнении (4.1) лишь члены нулевой и первой степеней по внешнему полю, получим

$$G_P^{(0)}(q,q') = -\delta(q-q') \frac{1}{D^{(1)}(\frac{P}{2}+q)\, D^{(2)}(\frac{P}{2}-q)}, \tag{4.3}$$

$$\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} \tag{4.4}$$

$$\Sigma_P^{(1)}(q,q',\Delta) = -\frac{1}{D^{(1)}(\frac{P+\Delta/2}{2}+q)}\, \Gamma^{(1)} \frac{\delta(q-q'-\frac{\Delta}{2})}{D^{(1)}(\frac{P-\Delta/2}{2}+q')\, D^{(2)}(\frac{P-\Delta/2}{2}-q')} A(\Delta) \tag{4.5}$$

$$\Sigma_P^{(2)}(q,q',\Delta) = -\frac{1}{D^{(2)}(\frac{P+\Delta/2}{2}-q)}\, \Gamma^{(2)} \frac{\delta(q-q'+\frac{\Delta}{2})}{D^{(2)}(\frac{P-\Delta/2}{2}-q')\, D^{(1)}(\frac{P-\Delta/2}{2}+q')} A(\Delta) \tag{4.5'}$$

$$D^{(i)}(p) = (\gamma^{(i)} p - m). \tag{4.6}$$

Выполнив операции унитарного преобразования Фолди-Вотхаузена (3.2) и проектируя с помощью (3.4) на подпростантво спиноров, удовлетворяющих условию $\gamma_0^{(1)} = \gamma_0^{(2)} = \gamma_0$, получим

$$G_{\vec P=0}^{(0)}(q,q') \Rightarrow -\delta(q-q') \frac{1}{D_F(\mathcal{E},q)\, D_F(\mathcal{E},-q)} \tag{4.7}$$

$$\Sigma_{\vec P=0}^{(1)}(q,q',\Delta) \Rightarrow -\frac{1}{D_F(\mathcal{E},\frac{\Delta}{4}+q)}\, \Gamma_F^{(1)} \frac{\delta(q-q'-\frac{\Delta}{2})}{D_F(\mathcal{E},-\frac{\Delta}{4}+q')\, D_F(\mathcal{E},-\frac{\Delta}{4}-q')} A(\Delta)$$

$$\Sigma_{\vec P=0}^{(2)}(q,q',\Delta) \Rightarrow -\frac{1}{D_F(\mathcal{E},\frac{\Delta}{4}-q)}\, \Gamma_F^{(2)} \frac{\delta(q-q'+\frac{\Delta}{2})}{D_F(\mathcal{E},-\frac{\Delta}{4}-q')\, D_F(\mathcal{E},-\frac{\Delta}{4}+q')} A(\Delta). \tag{4.8'}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_F(\mathcal{E},p) = \gamma_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{2}+p\right) - W(\vec p) \tag{4.9}$$

$$\Gamma_F^{(1)} \equiv \Gamma^{(1)}(\vec q,\vec q',\Delta) = \Lambda\, T^{(1)}\left(\frac{\vec\Delta}{4}+\vec q\right) \Gamma^{(1)}\, T^{(1)}\left(-\frac{\vec\Delta}{4}+\vec q'\right) \Lambda \tag{4.10}$$

$$\Gamma_F^{(2)} \equiv \Gamma^{(2)}(\vec q,\vec q',\Delta) = \Lambda\, T^{(2)}\left(\frac{\vec\Delta}{4}-\vec q\right) \Gamma^{(2)}\, T^{(2)}\left(-\frac{\vec\Delta}{4}-\vec q'\right) \Lambda. \tag{4.10'}$$

Выпишем ниже в явном виде операторы (4.10) для случая векторного и аксиально-векторного полей.

Вводя для удобства переменные

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{\Delta}}{4} + \vec{q}\ ; \qquad \vec{\pi}' = \frac{\vec{\Delta}}{4} - \vec{q}' \tag{4.11}$$

$$W = \sqrt{m^2 + \vec{\pi}^2}\ ; \qquad W' = \sqrt{m^2 + \pi^{2\prime}},$$

получим следующие выражения для операторов (4.10):

$\underline{\Gamma^{(1)} = \gamma_0^{(1)}}$

$$\Gamma_0^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\Delta) = \gamma_0 \frac{(m+W)(m+W') - (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}')}{\sqrt{2W(m+W)}\ \sqrt{2W'(m+W')}} \tag{4.12}$$

$\underline{\Gamma^{(1)} = \gamma_k^{(1)} \quad k = 1,2,3}$

$$\Gamma_k^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\Delta) = \frac{(m+W')(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\sigma_k - (m+W)\,\sigma_k\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}')}{\sqrt{2W(m+W}\ \sqrt{2W'(m+W')}} \tag{4.13}$$

$\underline{\Gamma^{(1)} = i\,\gamma_5^{(1)}\,\gamma_0^{(1)}}$

$$\Gamma_{50}^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\vec{\Lambda}) = \frac{(m+W)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}') - (m+W')(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})}{\sqrt{2W(m+W)}\ \sqrt{2W'(m+W')}} \tag{4.14}$$

$\underline{\Gamma^{(1)} = i\,\gamma_5^{(1)}\gamma_k^{(1)},\ k = 1,2,3}$

$$\Gamma_{5k}^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\vec{\Delta}) = \gamma_0 \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\sigma_k\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}') - (m+W)(m+W')\,\sigma_k}{\sqrt{2W(m+W)}\ \sqrt{2W'(m+W')}}. \tag{4.15}$$

Здесь σ_k – четырехрядная спиновая матрица, действующая на индексы первой частицы.

Произведя интегрирование в формулах (3.5) и (3.6'), получим

$$G^{(0)}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}') = 2\pi i\,\delta(\vec{q}-\vec{q}')\,\frac{1}{\gamma_0\mathcal{E} - 2W(\vec{q})} \tag{4.16}$$

$$\Sigma^{(1)}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}',\Delta)\Big|_{\Delta^0=0} = 2\pi i\,\frac{\delta(\vec{q}-\vec{q}' - \frac{\vec{\Delta}}{4})}{\gamma_0\mathcal{E} - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}+\vec{q}) - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}-\vec{q})}\,\Gamma^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\vec{\Delta})\cdot \tag{4.17}$$

$$\cdot\frac{1}{\gamma_0\mathcal{E} - W(\frac{\Delta}{4}+\vec{q}') - W(\frac{\Delta}{4}-\vec{q}')}$$

$$\Sigma^{(2)}(\mathcal{E},\vec{q},\vec{q}',\Delta)\Big|_{\Delta^0=0} = 2\pi i\,\frac{\delta(\vec{q}-\vec{q}'+\frac{\vec{\Delta}}{2})}{\gamma_0\mathcal{E} - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}+\vec{q}) - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}-\vec{q})}\,\Gamma^{(2)}(\vec{q},\vec{q}',\vec{\Delta})\,\frac{1}{\gamma_0\mathcal{E} - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}+\vec{q}') - W(\frac{\vec{\Delta}}{4}-\vec{q}')} \tag{4.17'}$$

В итоге, используя определение (3.9), найдем

$$j(\vec{\Delta},\Delta^0=0) = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\{\Gamma^{(1)}(\vec{q},\vec{q}',\Delta)\,\delta(\vec{q}-\vec{q}' - \frac{\vec{\Delta}}{2}) +$$

$$+\,\Gamma^{(2)}(\vec{q},\vec{q}',\vec{\Delta})\,\delta(\vec{q}-\vec{q}'+\frac{\vec{\Delta}}{2})\}\,\Psi^{(0)}(\vec{q}')\,d\vec{q}\,d\vec{q}'. \tag{4.18}$$

Здесь волновая функция свободных частиц нулевого приближения $\Psi^{(0)}$ нормирована условием

$$\int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\gamma_0\,\Psi^{(0)}(\vec{q})\,d\vec{q} = 1, \tag{4.19}$$

которое является частным случаем нормировочного условия (3.8).

Как указывалось выше, величина (4.18) является производящей функцией динамических моментов токов двух независимых спиновых частиц.

Ниже в качестве иллюстрации мы выпишем в явном виде выражения для нулевых и первых моментов векторных и аксиально-векторных токов.

а) Нулевые моменты токов

Пусть внешнее поле не зависит от времени и однородно в пространстве:

$$A(\Delta) = a\,\delta(\Delta). \tag{4a.1}$$

В это случае вариация полной энергии системы двух спиновых частиц выражается через нулевой момент тока, т.е. "заряд" Q, сопоставленный этому полю,

$$Q = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\{\Gamma^{(1)}(\vec{q},\vec{q},0) + \Gamma^{(2)}(\vec{q},\vec{q},0)\}\,\Psi^{(0)}(\vec{q})\,d\vec{q}. \tag{4a.2}$$

Если внешнее поле является электростатическим, то

$$\Gamma_0^{(1)}(\vec{q},\vec{q},0) = e^{(1)}\,\gamma_0. \tag{4a.3}$$

Учитывая условия нормировки (4.19), найдем

$$Q = e^{(1)} + e^{(2)}. \tag{4a.4}$$

В более общем случае можно было бы рассматривать вместо зарядов $e^{(1)}$ в формуле (4а.3) произвольные эрмитовские матрицы 3×3 $e\lambda^{(1)}$. Тогда (4а.2) будет определять матричные элементы генераторов группы SU(3).

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда внешнее поле является аксиально-векторным, у которого лишь пространственные компоненты отличны от нуля.

Из формулы (4.15) следует, что в этом случае

$$\Gamma_{5k}^{(1)}(\vec{q},\vec{q},0) = \gamma_0\,\Sigma_k^{(1)}\,\lambda^{(1)}; \quad k = 1,2,3 \tag{4a.5}$$

$$\Sigma_k^{(1)} = \frac{m}{W}\left\{\sigma_k + q_k\,\frac{(\vec{\sigma}\vec{q})}{m(m+W)}\right\}. \tag{4a.6}$$

Соответствующий этому полю заряд имеет смысл аксиальной константы системы. Отметим, что в нерелятивистском приближении, когда $\frac{\vec{q}^{\,2}}{m^2} \ll 1$, оператор (4а.6) принимает вид

$$\Sigma_k = \sigma_k. \tag{4a.7}$$

Однако учет релятивистских поправок может существенно изменить величину аксиальной константы.

Усредним, например, оператор Σ_k по сферически симметричному состоянию /2/:

$$\langle \Sigma_k \rangle = \sigma_k\left(1 - \frac{\langle \vec{q}^{\,2} \rangle}{3m^2}\right) + O\left(\frac{1}{m^4}\right). \tag{4a.8}$$

Этот результат был впервые получен в работе /4/ на основе модели независимых кварков, движущихся в эффективном самосогласованном потенциале, а также в работе /5/ на основе алгебры токов при бесконечном импульсе. В работе /6/ формула (4а.8) была получена на основе релятивистски ковариантных уравнений для системы квазипотенциальных кварков.

б) <u>Первые динамические моменты</u>

Для внешнего поля, постоянного во времени и зависящего линейно от пространственных координат, фурье-образ имеет вид

$$A(\Delta) = i\,\vec{a}\,\frac{\vec{\partial}}{\partial\Delta}\,\delta(\Delta). \tag{4б.1}$$

Согласно формуле (2.14), вариационная производная от полной энергии системы по параметру $\vec{a}$ определяет первый динамический момент тока:

$$\vec{D} = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\{\vec{D}^{(1)}(\vec{q})\,\lambda^{(1)} + \vec{D}^{(2)}(\vec{q})\lambda^{(2)}\}\,\psi^{(0)}(\vec{q})\,d\vec{q}\,, \tag{4б.2}$$

где

$$\vec{D}^{(1)}(\vec{q}) = i\,\frac{\vec{\partial}}{\partial\Delta}\,\Gamma^{(1)}(\vec{q},\vec{q},\vec{\Delta})\Big|_{\vec{\Delta}=0} - \frac{i}{2}\,\Gamma^{(1)}(\vec{q},\vec{q},0)\,\frac{\vec{\partial}}{\partial q} \tag{4б.3}$$

$$\vec{D}^{(2)}(\vec{q}) = i\,\frac{\vec{\partial}}{\partial\Delta}\,\Gamma^{(2)}(\vec{q},\vec{q},\vec{\Delta})\Big|_{\vec{\Delta}=0} + \frac{i}{2}\,\Gamma^{(2)}(\vec{q},\vec{q},0)\,\frac{\vec{\partial}}{\partial q}\,. \tag{4б.3'}$$

Рассмотрим случай, когда система движется во внешнем однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z.

Тогда вектор-потенциал имеет фурье-образ

$$A_x(\Delta) = \frac{i}{2}\,H\,\frac{\partial}{\partial\Delta_y}\,\delta(\Delta)$$
$$A_y(\Delta) = -\frac{i}{2}\,H\,\frac{\partial}{\partial\Delta_x}\,\delta(\Delta). \tag{4б.4}$$

Соответствующий этому полю первый динамический момент будет определять магнитный момент системы.

Используя формулу (4.14), получим для z – компоненты магнитного момента системы следующее выражение

$$m_z = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q})\,\{e^{(1)}\,m_z^{(1)}(\vec{q}) + e^{(2)}\,m_z^{(2)}(\vec{q})\}\,\Psi^{(0)}(\vec{q})\,d\vec{q}\,, \tag{4б.5}$$

где

$$m_z^{(1)}(q) = \frac{1}{2W}\,\{L_z + \mu_z^{(1)}\} \tag{4б.6}$$

$$\mu_z^{(1)} = \{\sigma_z\,\frac{m+W}{2W} - q_z\,\frac{(\vec{\sigma}\,\vec{q})}{W(m+W)}\}^{(1)} \tag{4б.7}$$

$$L_z = -i\,[\vec{q}\times\frac{\vec{\partial}}{\partial q}]_z\,.$$

В нерелятивистском приближении оператор (4б.7) совпадает с матрицей σ_z. При усреднении по сферически симметричному состоянию, найдем

$$\langle\mu_z\rangle = \sigma_z\,(1 - \frac{\langle\vec{q}^{\,2}\rangle}{6m^2}) + 0(\frac{1}{m^4})\,. \tag{4б.8}$$

Этот результат был впервые получен в работе /5/ в рамках модели независимых кварков, движущихся в самосогласованном потенциале.

Рассмотрим в заключение случай однородного электрического поля. Фурье-образ электростатического потенциала ϕ имеет вид

$$\phi(\Delta) = -i\,\vec{\mathcal{E}}\,\frac{\vec{\partial}}{\partial\Delta}\,\delta(\Delta)\,. \tag{4б.9}$$

Соответствующий этому полю момент тока определяет электрический дипольный момент системы:

$$\vec{d} = \int \Psi^{*(0)}(\vec{q}) \{ e^{(1)} \vec{d}^{(1)}(\vec{q}) + e^{(2)} \vec{d}^{(2)}(\vec{q}) \} \Psi^{(0)}(\vec{q}) \, d\vec{q} , \qquad (4.б.10)$$

где

$$d^{(1)}(\vec{q}) = \gamma_0 \{ \frac{i}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} + i \frac{[\vec{q} \times \vec{\sigma}]}{W(m+W)} \}^{(1)} . \qquad (4б.11)$$

Аналогичным образом вычисляются высшие динамические моменты.

Автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и ценные замечания, а также Р.М.Мурадяну и В.П.Шелесту за полезные обсуждения.

Литература

1. *N.A.Tavkhelidze. Talk at the Solvey Cougress, (1967).*
2. *A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cimento, 29, 3000(1963).*
3. *V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze. Preprint JINR, E2-3498, Dubna (1967).*
4. *П.Н.Боголюбов. Ядерная физика, т.5, 458 (1967).*
5. *M.Gell-Mann. Preprint CALT-68-103 (1966).*
6. *В.П.Шелест. Препринт ИТФ-67-18, ИТФ-67-51, Киев, (1967).*

Рукопись поступила в издательский отдел

5 апреля 1968 года.