ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3833

И.Ф.Гинзбург, А.В.Ефремов, В.Г.Сербо

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3833

И.Ф.Гинзбург[x)], А.В.Ефремов, В.Г.Сербо[xx)]

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА

x) Институт математики СО АН СССР,
xx) Новосибирский государственный университет.

Гинзбург И.Ф., Ефремов А.В., Сербо В.Г. P2-3833

Асимптотика графов Фейнмана

В работе излагается рецепт извлечения асимптотики любого графа Фейнмана в теории с $L_{int} = g\bar{\Psi}\Gamma\Psi\phi + h\phi^4$ ($\Gamma = 1$ или γ^5).

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1968.

Ginzburg I.F., Efremov A.V., Serbo V.G. P2-3833

Asymptotics of the Feynman Graphs

The recipe of extracting the asymptotics of any Feynman graph in the theory with $L = g\bar{\Psi}\Gamma\Psi\phi + h\phi^4$ ($\Gamma = 1$ or γ^5) is described.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1968

Асимптотика графов Фейнмана при t/s, $m^2/s \to 0$ была предметом многочисленных исследований (см., например,[1,2,3], там же подробная библиография). Сложность задачи, особенно для графов со спинорными линиями, приводила к тому, что общие рецепты оказывались слишком громоздкими и зачастую неточными. Мы ограничили свое рассмотрение рамками теорий с лагранжианами (I) и (5), в которых нам удалось получить простые рецепты для асимптотик графов рассеяния на массовой поверхности.

Графы с внешними спинорными линиями состоят из множества структур, работать с которыми неудобно. Поэтому под амплитудой такого графа мы понимаем скалярную величину Т его вклада в сечение. Асимптотика дифференциального сечения строится из величин Т так же, как и для графов с внешними бозонными линиями, т.е. сумма их квадрируется и делится на s . Расходящиеся графы, естественно, считаются , регуляризованными.

Схема рассуждений, подробности которых изложены в работах[4,5], заключается в следующем. Вклад графа записывается в α -представлении, однако в отличие от скалярной теории, вклад спинорного графа состоит из суммы членов, асимптотику каждого из которых мы должны находить отдельно. (Это связано с числителем спинорного пропагатора). Такое рассмотрение удобно проводить для меллиновского образа графа по s . Ведущие особенности этого образа определяют асимптотику. Особенности могут быть двух сортов: "плоские" и "неплоские", связанные с обращением в нуль коэффициента при s в экспоненте на краю и вдали от краев области интегрирования по α соответственно. Исследования этих особенностей удается разделить. При изучении плоских особенностей удобно сначала оценить сверху вклад структур, ответственных за такие особенности, и таким образом оценить степень роста графа. Вслед за тем выясняется, какова она на самом деле. Это позволяет отобрать довольно простые структуры, которые могут дать ведущую асимптотику. Количество же таких структур, которые могут работать одновременно, определяют степень $\ln S$.

Неплоские особенности в скалярной теории приводят к поведению типа S^{-1}. В спинорных графах присутствие S в предэкспоненте дает для отдельных слагаемых рост типа S^n. Однако эти растущие слагаемые в сумме компенсируются так, что степень роста всего графа определяется плоскими особенностями. Неплоские же особенности могут влиять лишь на степень логарифма.

Наибольший интерес из рассмотренных представляет теория с

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi + h\varphi^4 \quad (\Gamma = \gamma^5 \text{ или } 1) \tag{I}$$

Вклад каждого графа удобно подразделить на части с положительной сигнатурой T^+ (симметричную при замене $S=(P_1+P_2)^2$ на $u=(P_1+P_3)^2$ или S на $-S$ в асимптотике) и с отрицательной сигнатурой T^- (антисимметричную при замене S на u), поскольку их асимптотики различны. В частности, для графа, переходящего в себя при замене S на u, часть $T^-=0$.

Замечательно, что если в асимптотику T^- вносят вклад как плоские, так и неплоские особенности, в асимптотику T^+ неплоские особенности вклада не дают. Поэтому в теории без заряда, где амплитуды симметричны относительно замены s на u, на неплоскость графов можно не обращать внимания.

Наш результат формулируется в виде рецепта, представляющегося простым:

Асимптотика любого графа рассеяния имеет вид:

$$T^{\pm} = K_{\pm}\, s^{\Omega} \ln^{H_{\pm}} s. \tag{2}$$

Для всех графов с одним и тем же значением Ω коэффициенты K_+ одновременно либо чисто мнимы, либо действительны (то же относится и к K_-).

Определения и рецепт.

1. Граф рассеяния называется <u>плоским,</u> если, не меняя расположения внешних вершин, можно нарисовать его без перекрещивания линий. В противном случае граф <u>неплоский.</u>

2. Мы используем обычное определение расходящихся подграфов (см., например[6]).

3. Графы, имеющие в перекрестном (t-) канале полуцелый спин - <u>фермионные</u>. Граф, у которого в t -канале есть чисто бозонные промежуточные состояния с нечетным числом бозонов - <u>нечетный</u>. Остальные графы с целым моментом в t -канале <u>четные</u> (у них в промежуточных состояниях в t -канале может быть четное число бозонов).

4. Последовательность подграфов <u>независима</u>, если ни один из них нельзя целиком построить из линий предыдущих.

5. Граф без двухчастичных делений в t-канале – <u>ядро</u>. <u>Объединение ядер</u> состоит из ядер, соединенных последовательно парами линий. Любой граф рассеяния является ядром или их объединением.(Различные ядра изображены на рис. I).

Пусть n – число ядер графа, а r – максимальное число независимых расходящихся подграфов Т, стягивание которых в точки не лишает граф зависимости от S .

6. Ядро, сквозь которое проходят слева направо две спинорные цепи – <u>х-ядро</u>, ("ха-ядро"), если существует вершина, снятие которой превращает его в два фермионных графа(рис. I, ж).Если такой вершины нет, то это ядро - нормальное (рис. I, г.). Пусть $\varkappa$ – число х– ядер графа.

<u>Для графа, являющегося х– ядром , $\Omega=-1$, а Н - сумма выражений Н для составляющих его фермионных графов (всегда плоских!)</u>

7. Граф называется <u>звеном</u>, если его нельзя разбить на два связанных подграфа, имеющих только две общие вершины, так, чтобы один из них содержал вершины, куда входят внешние линии p_1 и p_4 , а другой - внешние линии p_2 и p_3 (см., рис. I, з).

Любое ядро является звеном или состоит из звеньев, имеющих попарно по два общие вершины . (Ядро вида рис. Iг является звеном).

Обозначим через k число неплоских звеньев графа, сквозь которые проходят спинорные цепи (одна или две). Суммарное число всех звеньев,сквозь которые проходит одна спинорная цепь, плюс половину числа внешних спинорных линий графа обозначим через 2c.

Для любого четного графа

$$\Omega = 0; \quad H_+ = 2n + r - \varkappa - c - 1; \quad H_- = H_+ + k - 1 \qquad (3)$$

а коэффициенты $K_\pm$ факторизуются из вкладов ядер.

8. Объединение нормальных и $\times$- ядер называется четным подграфом.

Пусть при данном выборе непересекающихся четных подграфов u_i в нечетном графе T четный подграф u_i содержит a_i нормальных ядер, а число независимых расходящихся подграфов на межъядерных линиях, примыкающих к u_i, есть r_i. Сопоставим этому выбору число

$$h = n + r - c + \sum (a_i - r_i - 1). \qquad (4)$$

Тогда для T в (I) H_+ есть наибольшее из чисел h, $H_- = H_+ + k - 1$, а $\Omega = 0$.

Для фермионных графов $\Omega = -1/2$, а определение H требует более детального изучения структуры ядер и неплоских звеньев. В работе[5] приводится также простой рецепт для неперенормируемой теории с

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{k \geq 1} h_k \varphi^{4+k} + \sum_{m \geq 1} g_m \bar{\psi} \Gamma \psi \varphi^{1+m}; \; (\Gamma = \gamma^5 \ldots 1) \qquad (5)$$

и оценка для электродинамики. Эта оценка дает для некоторых графов рост $s^2 \ln^n s$. Вероятнее всего, такие вклады, растущие быстрее, чем $s \ln^n s$, сокращаются в каждом порядке теории возмущений, и задача отыскания асимптотики отдельного графа не имеет смысла.

Во всех рассматриваемых теориях асимптотика фермионных графов в $\sqrt{s}$ раз меньше, чем у графов с целым моментом в канале t. Это соответствует известному утверждению, что фермионная траектория Редже дает в амплитуду вклад в $\sqrt{s}$ раз меньше, чем вакуумная /7/. Тот факт, что вакуумная траектория Редже обеспечивает наиболее быстрый рост амплитуды, по-видимому, отражается в различии асимптотик четных и нечетных графов.

Наиболее важным результатом представляется нам то, что теория обладает потенциальной структурой, т.е. асимптотика в ней определяется двухчастичными делениями графа, так же как и в обычной потенциальной задаче с упругой унитарностью, которая обобщается уравнением Бете-Солпитера. Другие теории (по-видимому, все) не обладают таким свойством. Это дает возможность просуммировать все четные графы в теории (I) и найти тем самым асимптотическое решение уравнения Бете-Солпитера с "потенциалом" V, являющимся суммой всех графов без двухчастичных делений в t-канале. В отличие от отдельных графов, в такой просуммированной амплитуде могут возникнуть разрезы, выползающие в левую полуплоскость на расстояние, определяемое константами взаимодействия (ср., например /8/). При этом возникают связи между асимптотиками различных процессов ($\pi\pi$- , πn- и nn- рассеяния, ср., например /9/). Учет изотопической структуры и связанный с этим учет сигнатуры не представляет здесь принципиальных трудностей.

Более сложный, но и чрезвычайно интересный объект - это графы, описывающие неупругие процессы. Если импульсы всех частиц разбиваются на две группы так, что скалярные произведения импульсов внутри каждой из групп невелики, а между группами - порядка S , то нашу методику оценки асимптотик, как нам кажется, можно применять и к таким графам. При этом их асимптотики опять будут определяться двухчастичными промежуточными состояниями. В результате суммирования асимптотики таких процессов должны выразиться через асимптотики упругих процессов.

Авторы выражают свою признательность Д.И. Блохинцеву, О.И. Завьялову, В.В. Серебрякову и Д.В. Ширкову за полезные обсуждения. Один из нас (И.Г.) выражает также свою неизменную благодарность Д. Стельмаху.

Литература:

1. А.В. Ефремов, О.И. Завьялов. Конференция по физике высоких энергий, Дубна, 1964 г.
2. А.В. Ефремов. Препринт ОИЯИ, Е-2125 (1965).
3. G. Tiktipoulos. Phys. Rev. 131, 2373 (1963).
4. И.Ф. Гинзбург, А.В. Ефремов, В.Г. Сербо. Препринт ИМ СО АН СССР, ТФ-44
5. И.Ф. Гинзбург, В.Г. Сербо. Препринт ИМ СО АН СССР ТФ-45
6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. "Введение в теорию квантованных полей" ГИТТЛ, Москва, 1957 г.
7. В.Н. Грибов. ЖЭТФ, 43, 1529 (1962).
8. И.Ф. Гинзбург, В.В. Серебряков. Я.Ф. 3, 164 (1966).
9. В.Г. Васёв, И.Ф. Гинзбург. Я.Ф. 5, 669 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1968 года

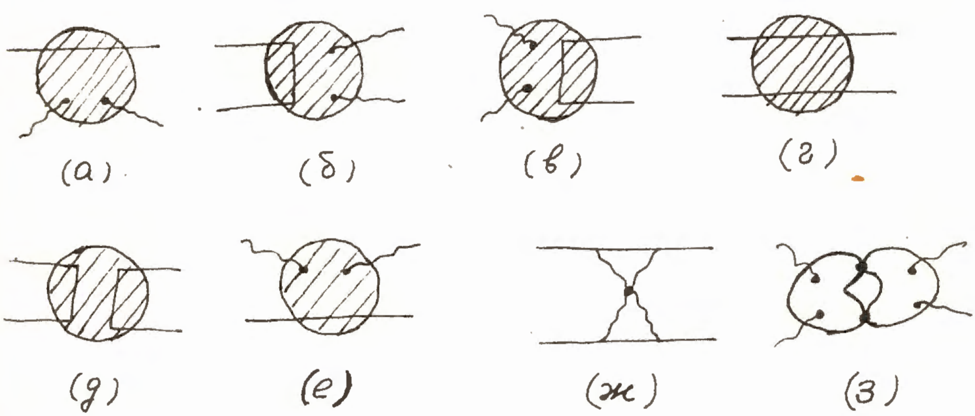

Рис. I