ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3753

Б.М. Барбашов, В.Н.Первушин

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ КВАНТОВОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПОЛЯ ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3753

Б.М. Барбашов, В.Н.Первушин

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ КВАНТОВОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПОЛЯ ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Направлено в ЖЭТФ

В интересной работе Никишова и Ритуса[1] рассмотрены квантовые процессы испускания γ -кванта электроном, находящимся в поле плоской электромагнитной волны. Однако электроны рассматриваются вне схемы вторичного квантования как частицы, подчиняющиеся уравнению Дирака в поле плоской волны. Тем самым пренебрегается эффектами, связанными с виртуальными процессами электронно-позитронного поля, взаимодействующего с плоской электромагнитной волной.

В настоящей заметке рассматривается квантовая теория заряженного скалярного поля[x], взаимодействующего с плоской электромагнитной волной, и находится S – матрица, определяющая рассеяние этих частиц полем плоской волны[xx].

Функция Лагранжа скалярного заряженного поля $\phi(\vec{r}, t)$, взаимодействующего с заданными внешним электромагнитным полем $A_\mu(\vec{r}, t)$, имеет вид:

$$L = \int d\vec{r} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^* \phi + ie A_\mu \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} \right) + e^2 A_\mu^2 \phi^* \phi \right], \qquad (1)$$

---

[x] *Рассмотрение на случай электронно-позитронного поля проведено в дипломной работе В.Н.Первушина, МГУ, 1968.*

[xx] *Представление, когда эффекты собственного поля рассматриваются приближенно, а внешнее поле учитывается точно, называется представлением Фарри[9].*

(: : знак нормального произведения, используется метрика $x_\mu^2 = t^2 - \vec{r}^2$). Поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления $\vec{k}$, описывается 4-вектором

$$A_\mu(t, \vec{r}) = A_\mu(tk_0 - \vec{k}\vec{r}), \; k_0 = |\vec{k}|.$$

Условие Лоренца $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$ дает в этом случае $k_\mu A_\mu = 0$. Без ограничения общности выберем систему координат, в которой вектор $\vec{k}$ направлен по оси x, а вектор $\vec{A}$ – по оси z: тогда в согласии с условием Лоренца можем положить:

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = A(t - x).$$

Гейзенберговское уравнение движения для операторов $\phi(t, \vec{r})$ в выбранной системе координат записывается так:

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + m^2 + 2ie\,A(t - x)\partial_z + e^2A^2(t-x)]\,\phi(t, \vec{r}) = 0. \quad (2)$$

Поскольку $A(t - x)$ не зависит от y, z, удобно произвести фурье-преобразование по этим переменным

$$\phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int dp_{2,3}\, e^{-ip_2y - ip_3z}\,\tilde{\phi}(t, x, p_2, p_3).$$

Введя обозначение

$$V(t - x) = 2ep_3A(t - x) + e^2 A^2(t - x),$$

получим уравнение для фурье-компоненты $\tilde{\phi}(t, x, p_2, p_3)$

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 + V(t - x)]\,\tilde{\phi} = 0. \quad (3)$$

Общим решением этого уравнения является оператор[2]

$$\tilde{\phi}(t,x,p_2,p_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d p_1}{2\omega} \{ a(\vec{p}) e[^{i\omega t - ip_1 x - i \frac{\int_0^{t-x} V(\lambda)\, d\lambda}{2(\omega - p_1)}}$$

$$+ b(p_1 - p_2 - p_3) \exp[^{-i\omega t + ip_1 x + i} \frac{\int_0^{t-x} V(\lambda)\, d\lambda}{2(\omega - p_1)}] \} . \tag{4}$$

Смысл операторов a^+, a, b^+, b в решении (4) как операторов рождения и уничтожения заряженных частиц, находящихся в поле плоской электромагнитнрй волны, можно установить[3], рассматривая сохраняющиеся в этой системе величины: компоненту импульса

$$P_y = \int dr \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

и сохраняющуюся комбинацию $P_0 - P_x$ (энергия P_0 не сохраняется).

Для дальнейшего нам еще потребуется знание причинной функции Грина уравнения (3)

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + p_2^2 + p_3^2 + V(t-x)]\, G(t,x,t',x',p_2,p_3) = \tag{5}$$

$$= \delta(t-t')\, \delta(x-x') .$$

Для произвольного направления распространения плоской волны $\vec{k}$ она была найдена в работе[4]. В нашей системе координат

$$G(t,x,t',x',p_2,p_3) = \frac{1}{4} H_0^{(2)}(\sqrt{s}) , \tag{6}$$

где $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля, а

$$S=[(t-t')^2-(x-x')^2]\{p_2^2+p_3^2+m^2+\int_0^1 V[(t-x)(1-\lambda)+(t'-x')\lambda]d\lambda\}.$$

Теперь обратимся к стандартной процедуре нахождения S -матрицы в представлении взаимодействия, где операторы $\tilde{\phi}_0$ удовлетворяют свободному $(V=0)$ уравнению

$$[\partial_t^2-\partial_x^2+p_2^2+p_3^2+m^2]\tilde{\phi}_0(t,x,p_2,p_3)=0, \tag{7}$$

а лагранжиан взаимодействия с полем A_μ имеет вид

$$L_I(t)=\int dx\, dp_{2,3}\, V(t-x)\tilde{\phi}_0^*(t,x,p_2,p_3)\tilde{\phi}_0(t,x,p_2,p_3).$$

S -матрицу мы можем записать в виде T -экспоненты:

$$S=T\exp\{-i\int dt\; L_I(t)\}. \tag{8}$$

Для перехода от T - произведения операторов к N -произведению применим процедуру Хори/5/, где этот переход совершается с помощью оператора

$$\Delta=\exp\{-i\int dx_{1,2}dt_{1,2}dp_{2,3}\, D(x_1t_1x_2t_2p_2p_3)\frac{\delta^2}{\delta\tilde{\phi}_0^*(x_1t_1p_{2,3})\delta\tilde{\phi}_0(x_2t_2p_{2,3})}\}.$$

Здесь $D(x_1t_1,x_2t_2,p_2p_3)$-причинная функция Грина свободного уравнения (7)

$$[\partial_t^2-\partial_x^2+p_2^2+p_3^2+m^2]D(x_1t_1,x_2t_2,p_2p_3)=\delta(t_1-t_2)\delta(x_1-x_2), \tag{9}$$

S –матрица записывается в виде N –произведения :

$$S = N\left(\Delta \exp\{-i\int dt\, L_1(t)\}\right).$$

Результат действия оператора Δ на экспоненту с квадратичным по $\tilde{\phi}_0$ показателем был найден в работе[7]. Символически этот результат записывается так:

$$\exp\{-iD(1,2)\frac{\delta^2}{\delta\tilde{\phi}_0^*(1)\delta\tilde{\phi}_0(2)}\}\exp\{-iV(1)\delta(1,2)\tilde{\phi}_0^*(1)\tilde{\phi}_0(2)\} = \tag{10}$$

$$= \{\det[\delta(1,2)+V(1)D(1,2)]\}^{-1} e^{-iM(1,2)\tilde{\phi}_0^*(1)\tilde{\phi}_0(2)}$$

Здесь $\det[\delta(1,2)+V(1)D(1,2)]$ – детерминант Фредгольма интегрального ядра $V(t_1-x_1)D(t_1x_1, t_2x_2, p_2, p_3)$, а оператор $M(t_1x_1t_2x_2\, p_2p_3)$ находится из уравнения

$$\int dx_1dt_1\left[\frac{\delta(x-x_1)\delta(t-t_1)}{V(t_1-x_1)} + D(xt, x_1t_1, p_2, p_3)\right]M(x_1t_1, x_2t_2, p_2, p_3) =$$

$$= \delta(x_1-x_2)\delta(t_1-t_2). \tag{11}$$

Таким образом, для приведения S –матрицы к нормальной форме необходимо найти интегральный оператор $M(1,2)$, обратный к оператору $\frac{\delta(1,2)}{V(1)} + D(1,2)$. Будем искать M в виде

$$M(1,2) = V(t_1-x_1)[\delta(1,2) - R(1,2)V(t_2-x_2)],$$

тогда для R получаем уравнение

$$R(t,x,t_2,x_2,p_2,p_3) + \int dx_1dt_1 D(xt,x_1t_1,p_2p_3)\; V(t_1-x_1)R(x_1t_1,t_2x_2\, p_{2,3}) =$$

$$= D(xt, x_2t_2). \tag{12}$$

Из этого уравнения видно, что R совпадает с причинной функцией Грина G уравнения с взаимодействием (5), т.к. действуя на (12) слева оператором $\partial_t^2-\partial_x^2+p_2^2+p_3^2+m^2$ и учитывая уравнение (9) для D, имеем

$$[\partial_t^2-\partial_x^2+p_2^2+p_3^2+m^2+V(t-x)]R(t,x,t_2x_2,p_{2,3})=\delta(x-x_2)\delta(t-t_2).$$

Следовательно,

$$M(x_1t_1x_2t_2,p_{2,3})=V(t_1-x_1)[\delta(x_1-x_2)\delta(t_1-t_2)-G(x_1t_1x_2t_2,p_{2,3})V(t_2-x_2)]. \tag{13}$$

Нормальная форма S матрицы есть:

$$S=\{\det[\delta(1,2)+V(t_1-x_1)D(1,2)]\}^{-1}N\exp\{-i\int dt_{1,2}dx_{1,2}M(1,2)\tilde{\phi}_0^*(1)\tilde{\phi}_0(2)dp_{2,3}\} \tag{14}$$

Далее можно выполнить интегрирование в показателе экспоненты (14), подставляя туда (13) и фурье-разложения для свободных операторов $\tilde{\phi}_0^*$ и $\tilde{\phi}_0$, которые совпадают с (4), если там положить $V=0$.

$$-i\int dt_{1,2}dx_{1,2}\tilde{\phi}_0^*(1)M(1,2)\phi_0(2)dp_{2,3}=\int d\vec{p}[e^{-\frac{iW}{2(\omega-p_1)}}-1]\times \tag{15}$$

$$\times[a_0^{(+)}(\vec{p})a_0^{(-)}(\vec{p})+b_0^{(+)}(p_1,-p_2,-p_3)b_0^{(-)}(p_1,-p_2,-p_3)],$$

где

$$W=e\int_{-\infty}^{\infty}[2p_3A(\lambda)+eA^2(\lambda)]d\lambda.$$

Из этого выражения видно, что имеют смысл такие плоскости волны $A(t-x)$, для которых существует интеграл W. Это требование к A согласуется с общей идеологией S-матрицы в представлении взаимодействия, когда на бесконечности частицы считаются свободными и, следовательно, внешнее поле отсутствует. Выберем в качестве $A(t-x)$ монохроматическую плоскую волну, медленно затухающую на бесконечности:

$$A(t-x)=a\cos\Omega(t-x)e^{-\gamma|t-x|\Omega};\ \gamma\ll 1,$$

тогда

$$W=\frac{4ea\,p_3\gamma}{\Omega}+\frac{e^2a^2}{2\Omega\gamma}.$$

Отсюда следует, что при возрастании частоты плоской волны Ω величина $W\to 0$, а S-матрица стремится к единичной матрице.

Неоператорный множитель в (14)

$$\{\det[\delta(1,2)+V(1)D(1,2)]\}^{-1},$$

который определяет среднее от S-матрицы по вакууму, может быть выражен следующим образом/7/:

$$\{\det[\delta(1,2)+V(1)D(1,2)]\}^{-1}=\exp\{-\int dt\,dx\,dp_{2,3}\int_0^1 d\alpha\,V(t-x)G_\alpha(tx,tx,p_{2,3})\}, \tag{16}$$

G_α – функция Грина уравнения (5), где потенциал V заменен на αV. Так как в (16) входит G_α при совпадающих аргументах, то, согласно формуле (6), мы имеем

$$G_\alpha(xt,xt,p_2p_3)=\frac{1}{4}H_0^{(2)}(0)=-i\infty.$$

Кроме этой бесконечности в показателе экспоненты расходится один из интегралов по t,x, так как V зависит от разности $t-x$. Таким образом, среднее по вакууму от S-матрицы равно бесконечному фазовому множителю $\langle 0|S|0\rangle=e^{i\infty}$.