ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3740

А.И.Оксак

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЧЕЛЛЕНА-ЛЕМАНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Оксак А.И. P2-3740

Спектральная плотность Челлена-Лемана

В заметке показывается, что в рамках аксиоматической теории поля Уайтмана с условием асимптотической полноты спектральная плотность Челлена-Лемана $\rho(\lambda)$, определяемая соотношением

$$\langle A(x)A(y)\rangle_0 = \frac{1}{i}\Delta^-_m(x-y) + \int_{2m}^{\infty}\frac{1}{i}\Delta^-_\lambda(x-y)\rho(\lambda)d\lambda,$$

является локально интегрируемой функцией. (Это утверждение применимо также к неперенормируемым теориям при условии асимптотической полноты). В доказательстве, по существу, использовалось то обстоятельство, что в пространстве Фока in частиц операторы 4-импульса и эффективной массы абсолютно непрерывны на подпространстве, ортогональном вакууму и одночастичным состояниям.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1968.

Oksak A.I. P2-3740

Källen-Lehmann Spectral Density

It is shown that in the framework of Wightman axiomatic field theory with the condition of asymptotic completeness the Källen-Lehmann spectral density $\rho(\lambda)$ given by

$$\langle A(x)A(y)\rangle_0 = \frac{1}{i}\Delta^-_m(x-y) + \frac{1}{i}\int_{2m}^{\infty}\Delta^-_\lambda(x-y)\rho(\lambda)d\lambda$$

is locally summable function. (The statement is true also for unrenormalizable theories under the asymptotic completeness condition.) The fact that the operators of 4-momentum P and of effective mass $M=\sqrt{(P)^2}$ in the "in"- particles Fock space are absolutely continuous on the subspace orthogonal to the vacuum and one-particle states has been used essentially.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1968

P2 - 3740

А.И.Оксак*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЧЕЛЛЕНА–ЛЕМАНА

* Московский физико-технический институт

Покажем, что в квантовой теории поля (мы ограничимся рассмотрением вещественного скалярного поля) с условием асимптотической полноты[1] спектральная плотность $\rho(\lambda)$ Челлена-Лемана для двухточечной функции Уайтмана

$$\langle A(x)\, A(y)\rangle_0 = \frac{1}{i}\Delta^-_m(x-y) + \int\limits_{2m}^{\infty}\frac{1}{i}\Delta^-_\lambda(x-y)\,\rho(\lambda)\,d\lambda$$

($m > 0$ масса in– и out–частиц) является не только обобщенной, но и обычной (т.е. локально интегрируемой) функцией.

Это утверждение справедливо как для перенормируемой (по классификации Шроера[2]) теории поля, так и для неперенормируемой, поэтому будем считать $\tilde{\tilde{A}}(p)$ операторно-значной обобщенной функцией над пространством $D(R^4)$ основных функций импульсных переменных.

Ниже H^n -гильбертово пространство симметричных функций $\Phi_n(k_1,..,k_n)$, квадратично интегрируемых по лоренц-инвариантной мере в пространстве n импульсов на массовой оболочке

$$d\mu_n = \frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n} \quad ; \qquad (\omega_j = \sqrt{(k_j)^2 + m^2}\,).$$

Фоковское пространство in – частиц $\mathcal{H}^{in}$ можно реализовать прямой суммой $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} H^n$, т.е. пространством последовательностей функций

$$\Phi = \{\Phi_n(k_1,..., k_n)\}_{n=0}^{\infty} \qquad \Phi_n(k_1, ..., k_n) \in H^n ,$$

со скалярным произведением

$$(\Phi, \quad \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int <\Phi \mid k_1, \ldots, k_n> \cdot <k_1, \ldots, k_n \mid \Psi> d\mu_n \qquad (2)$$

(для $\Phi_n(k_1, \ldots, k_n)$ и $\Phi_n^*(k_1, \ldots, k_n)$) мы приняли дираковские обозначения:

$$\Phi_n(k_1, \ldots, k_n) = <k_1, \ldots, k_n | \Phi> ; \quad \Phi_n^*(k_1, \ldots, k_n) = <\Phi \mid k_1, \ldots, k_n>).$$

В силу условия асимптотической полноты $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{in}$ произвольный вектор из пространства $\mathcal{H}$ представим в форме (1). В частности, при $\forall\ \tilde{\tilde{\phi}}(p) \in D(R^4)$

$$\tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\ \Omega = \{ <k_1, \ldots, k_n \mid \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\Omega> \}_{n=0}^{\infty}$$

(Ω – вакуумный вектор).

Из условия трансляционной инвариантности: при любом $a \in R^4$

$$<k_1, \ldots, k_n | \tilde{\tilde{A}}\ (e^{ipa}\ \tilde{\tilde{\phi}}(p))\ \Omega> = e^{iK_n a} \cdot <k_1, \ldots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\ \Omega> \qquad (3)$$

(здесь и далее K_n – 4-вектор: $K_n^0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j$, $K_n^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{\alpha}$) следует:

$$<k_1, \ldots, k_n \mid \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\Omega> = \tilde{\tilde{\phi}}(K_n)\ F_n(k_1, \ldots, k_n), \qquad (4)$$

где $F_n(k_1, \ldots, k_n)$ – измеримая, локально квадратично-суммируемая функция. Действительно,

$$b(h_n, \quad \tilde{\tilde{\phi}}) = \int h_n(k_1, \ldots, k_n) \cdot <k_1, \ldots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\ \Omega> d^{3n}k$$

билинейный непрерывный функционал по $h_n \in D(R^{3n})$ и по $\tilde{\tilde{\phi}} \in D(R^4)$. Для ядра $<k_1, \ldots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(p)\Omega> \in D'(R^{3n+4})$ этого функционала условие трансляционной инвариантности (3) дает:

$$(p - K_n) < k_1, \dots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(p)\, \Omega > = 0$$

т.е. $< k_1, \dots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(p)\, \Omega > = \delta(p - K_n) F_n(k_1, \dots, k_n)\,;\ F_n \in D'(R^{3n}).$ (5)

Пусть O – произвольное ограниченное открытое множество в R^{3n};

$O' = \{ p : p = K_n,\ (k_1, \dots, k_n) \in O \} \subset R^4$;

$\tilde{\tilde{\phi}}_0(p)$ – функция из $D(R^4)$, равная 1 в O'. Из (5) получим

$$F_n(k_1, \dots, k_n) = < k_1, \dots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}}_0)\, \Omega > \tag{6}$$

в смысле равенства обобщенных функций в $D'(O)$. Так как

$$< k_1, \dots, k_n | \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}}_0)\, \Omega > \in H^n \quad ,$$

то из (6) следует (4).

Мы будем считать $(\Omega\ ,\ \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\,\Omega) = 0$. Тогда, согласно (2), (4):

$$(\tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\,\Omega\ ,\ \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\psi}})\,\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\tilde{\phi}}^*(K_n) \cdot \tilde{\tilde{\psi}}(K_n) \cdot | F_n(k_1, \dots, k_n)|^2\, d\mu_n . \tag{7}$$

Из условия лоренц-инвариантности следует $F_1(k) = \mathrm{const}$ (почти всюду). Если $< k | \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{\phi}})\, \Omega > \not\equiv 0$, то при подходящей нормировке поля

$$| F_1(k) | = 1 . \tag{8}$$

Введем $\tilde{\tilde{G}}_n(p) \in D'(R^4)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ с носителем в

$$\bar{V}_+^{nm} = \{ p : p^0 > 0, \ (p)^2 \geq (nm)^2 \}$$

по формуле

$$\tilde{\tilde{G}}_n(\tilde{\tilde{\phi}}) = \int \tilde{\tilde{\phi}}(K_n) \cdot | F_n(k_1, \ldots, k_n) |^2 d\mu_n . \tag{9}$$

Благодаря указанному свойству носителя $\tilde{\tilde{G}}_n(p)$, достаточно рассмотреть ее как обобщенную функцию в $D'(V_+)$. Лоренц-инвариантность $\tilde{\tilde{G}}_n(p)$ влечёт за собой[3] существование обобщенной функции

$$\rho_n(\lambda) \in D'(R^1_+) = D'((0, \infty))$$

с носителем в $[\ nm\ , \infty\ )$ такой, что

$$\tilde{\tilde{G}}_n(\tilde{\tilde{\phi}}) = (\rho_n(\lambda), \ H(\lambda ; \tilde{\tilde{\phi}}), \tag{10}$$

где

$$\tilde{\tilde{\phi}}(p) \to H(\lambda ; \tilde{\tilde{\phi}}) = \frac{1}{2} \int \tilde{\tilde{\phi}}(\sqrt{\lambda^2 + \vec{p}^{\,2}}, \vec{p})(\lambda^2 + \vec{p}^{\,2})^{-1/2} d^3 p$$

есть непрерывное отображение $D(V_+)$ в $D(R^1_+)$. Пусть $[\alpha, \beta]$ – произвольный ограниченный замкнутый отрезок в R^1_+. Покажем, что $\rho_n(\lambda)$ – локально суммируема на интервале (α, β). (ρ_n – положительная обобщенная функция, т.е. мера, и доказать ее абсолютную непрерывность можно с помощью теоремы Радона-Никодима; несколько проще свести дело к замене переменных в многомерных интегралах Лебега, что мы и сделаем). Выберем функцию $\tilde{\tilde{\psi}}(p) \in D(V_+)$ такую, что $H(\lambda ; \tilde{\tilde{\psi}}) = 1$ при $\lambda \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любой $f \in D((\alpha, \beta))$

$$(\rho_n(\lambda), f(\lambda)) = (\rho_n(\lambda), f(\lambda) H(\lambda ; \tilde{\tilde{\psi}})) = (\rho_n(\lambda), H(\lambda ; f(\sqrt{(p)^2}) \cdot \tilde{\tilde{\psi}}(p)))$$

(согласно (10))

$$= \tilde{\tilde{G}}_n(f(\sqrt{(p)^2}) \cdot \tilde{\tilde{\psi}}(p)) = \int f(\sqrt{(K_n)^2}) \cdot \tilde{\tilde{\psi}}(K_n) \, | F_n(k_1, \ldots, k_n) |^2 d\mu_n .$$

Последний интеграл запишем в виде

$$(\rho_n, f) = \sum_{\nu=1}^{2} \int_{O_\nu} f(\sqrt{(K_n)^2})\, B_n(k_1, \dots, k_n; \tilde{\tilde{\psi}})\, d^3k_1 \dots d^3k_n \, , \tag{11}$$

где

$$O_1 = \{(k_1, \dots, k_n) : k_1^1 (\omega_1)^{-1} > (\sum_{j=2}^{n} k_j^1)(\sum_{j=2}^{n} \omega_j)^{-1}\} \subset R^{3n} \; ;$$

$$O_2 = -O_1 ; \; B_n(k_1, \dots, k_n; \tilde{\tilde{\psi}}) = \tilde{\tilde{\psi}}(K_n) \,|\, F_n(k_1, \dots, k_n)|^2 (2\omega_1 \dots 2\omega_n)^{-1}$$

– суммируемая функция в R^{3n}.

Рассмотрим замену переменных

$$(k_1, \dots, k_n) \to (\lambda, \xi), \tag{12}$$

где $\lambda = \sqrt{(K_n)^2}$,

$\xi = (k_1^2, k_1^3, k_2^1, k_2^2, k_2^3; \dots ; k_n^1, k_n^2, k_n^3)$ – $(3n-1)$ –

–мерный вектор.

Преобразование (12) взаимно-однозначно и непрерывно дифференцируемо отображает $O_\nu \subset R^{3n}$ $(\nu = 1, 2)$ в некоторую область $Q \subset R^{3n}$ с якобианом J, отличным от нуля. Следовательно/4/, в интегралах (11) можно перейти к новым переменным (λ, ξ):

$$(\rho_n, f) = \sum_{\nu=1}^{2} \int_Q f(\lambda) C_n^\nu (\lambda, \xi; \tilde{\tilde{\psi}})\, d\lambda\, d\xi \; ; \tag{13}$$

здесь

$$C_n^\nu(\lambda, \xi; \tilde{\tilde{\psi}}) = B_n(k_1, \dots, k_n; \tilde{\tilde{\psi}}) \,|\, J\,|^{-1} \qquad (\nu = 1, 2) \; –$$

суммируемые в Q функции. Теорема Фубини позволяет правую часть в (13) записать в виде

$$(\rho_n, f) = \int_{a}^{\beta} f(\lambda)\, t_n(\lambda; \overset{\approx}{\psi})\, d\lambda ,$$

где $t_n(\lambda; \overset{\approx}{\psi})$ – суммируемая функция λ. Таким образом, обобщенная функция $\rho_n(\lambda) \in D'(R^1_+)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ на каждом конечном интервале (a, β) $(a > 0)$ совпадает с суммируемой функцией, т.е. $\rho_n(\lambda)$ -локально суммируемая функция.

С учётом (8)-(10) формула (7) принимает вид:

$$(\overset{\approx}{A}(\overset{\approx}{\phi})\Omega, \overset{\approx}{A}(\overset{\approx}{\psi})\Omega) = H(m; \overset{\approx}{\phi}^* \cdot \overset{\approx}{\psi}) + \sum_{n=2}^{\infty} \int H(\lambda; \overset{\approx}{\phi}^* \cdot \overset{\approx}{\psi}) \cdot \rho(\lambda)\, d\lambda . \qquad (14)$$

Вводя обобщенные функции $\overset{\approx}{\Delta}{}^-_\lambda(p) = i\,\theta(-p^0)\,\delta(p^2 - \lambda^2)$, локально суммируемую функцию $\rho(\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n(\lambda)$ (ряд сходится, так как $\rho_n(\lambda) = 0$ вне $[nm\ \infty))$ перепишем (14) в виде (ниже $\hat{\overset{\approx}{\psi}}(p) = \overset{\approx}{\psi}(-p)$):

$$(\Omega, \overset{\approx}{A}(\overset{\approx}{\phi})\overset{\approx}{A}(\overset{\approx}{\psi})\Omega) = \frac{1}{i} \overset{\approx}{\Delta}{}^-_m (\overset{\approx}{\phi} \cdot \hat{\overset{\approx}{\psi}}) + \int_{2m}^{\infty} \frac{1}{i} \overset{\approx}{\Delta}{}^-_\lambda (\overset{\approx}{\phi} \cdot \hat{\overset{\approx}{\psi}}) \cdot \rho(\lambda)\, d\lambda .$$

Тем самым доказано, что спектральная плотность Челлена-Лемана $\rho(\lambda)$ локально суммируема.

При доказательстве этого утверждения мы по существу использовали тот факт, что операторы 4-импульса P и эффективной массы

$$M = \sqrt{(P)^2} \equiv \sqrt{(P^0)^2 - (P^1)^2 - (P^2)^2 - (P^3)^2}$$

в пространстве Фока $\mathcal{H}^{in}$ абсолютно непрерывны на подпространстве, ортогональном вакууму и одночастичным состояниям (в смысле определения § 95,[5]). Отметим, что спектральная плотность $\rho(\lambda)$ в низших порядках лагранжевой теории возмущений также оказывается локально суммируемой. Например, во втором порядке теории с лагранжианом $L_{int} = g \cdot \phi^3$:

$$\rho(\lambda) = \theta(\lambda - 2m)\, 3g^2 [2\pi(\lambda^2 - m^2)]^{-2} \sqrt{\lambda^2 - 4m^2} .$$

Автор приносит благодарность М.К.Поливанову, В.С.Владимирову и Б.А.Бачелису за ценные замечания.

Литература

1. *Р.Йост. Общая теория квантованных полей. "Мир", 1967.*
2. *B.Schroer. Jour. Math. Phys., 5, 1361 (1964).*
3. *L.Garding, J.Lions. Nuovo Cim. Suppl., 14, 9 (1959).*
4. *L.M.Graves. The Theory of Functions of Real Variables, McGraw-Hill, N.Y., p.226, (1956).*
5. *Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, "Наука", 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1968 года.