ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3739

А.И.Оксак

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3739

А.И.Оксак[x)]

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

x) Московский физико-технический институт

Оксак А.И. P2-3739

О нормальной форме операторов в пространстве Фока

В данной работе строятся классы неограниченных операторов в пространстве вторичного квантования, которые приводятся к нормальной форме. Оказывается, что возможность подобного приведения находится в тесной связи с областями определения операторов и их сопряженных. Показано, что out- поля квантовой теории поля разлагаются в ряд по in- полям.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1968.

Oksak A.I. P2-3739

On the Normal Form of Operators in the Fock Space

Some classes of unbounded operators in the second quantization space which can be reduced to normal form are pointed out. The possibility of such reduction is associated closely with the domains of operators and their adjoint. It is shown in particular that the out-fields of the quantum field theory can be expanded in the in-fields.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1968

§1. В в е д е н и е

В работе изучается возможность разложения некоторого класса неограниченных операторов в пространстве вторичного квантования по нормальным произведениям операторов рождения и уничтожения.

Ф.А.Березин[1,2] показал, что всякий ограниченный оператор допускает подобное разложение. Следуя[2], будем считать, что пространство H одночастичных состояний реализовано квадратично-суммируемыми функциями $f(p)$ на некотором множестве $\{p\}$, снабженном мерой μ. Пусть C -ограниченный оператор в фоковском пространстве бозе-частиц $\mathcal{H}$, натянутом на обобщенные векторы

$$(n!)^{-1/2} a^+(p_1)\dots a^+(p_n)|0> = |p_1, \dots, p_n>, \tag{1.1}$$

и

$$<p_1,\dots,p_m|C|q_1,\dots,q_n> = (m!n!)^{1/2} C^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) -$$

его матричные элементы. Тогда он представим в виде ряда

$$C = \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{m,n}, \tag{1.2}$$

где

$$\mathfrak{A}_{m,n} = \int A^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n)\, a^+(p_1)\dots a^+(p_m)\times$$

$$\times a^-(q_1)\dots a^-(q_n)\, d\mu(p_1)\dots d\mu(q_n).$$

Коэффициентные функции разложения (1.2) связаны с матричными элементами (1.1) соотношениями:

$$A^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_n) = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^s}{s!}\,\mathrm{SYM}\{\prod_{i=1}^{s}\delta(p_i-q_i)\times \tag{1.4}$$

$$\times\, C^{(m-s,\,n-s)}(p_{s+1},\dots,p_m;q_{s+1},\dots,q_n)\},$$

$$C^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!}\,\mathrm{SYM}\{\prod_{i=1}^{s}\delta(p_i-q_i)\times \tag{1.5}$$

$$\times\, A^{(m-s,\,n-s)}(p_{s+1},\dots,p_m;q_{s+1},\dots,q_n)\},$$

где

$$\mathrm{SYM}\{\prod_{i=1}^{s}\delta(p_i-q_i)\,F^{(m-s,n-s)}(p_{s+1},\dots,p_m;q_{s+1},\dots,q_n)\} =$$

$$=(m!n!)^{-1}\sum_{\pi\in\sigma_m,\ \tau\in\sigma_n}\ \prod_{i=1}^{s}\delta(p_{\pi(i)}-q_{\tau(i)})\,F^{(m-s,n-s)}(p_{\pi(s+1)},\dots,p_{\pi(m)};q_{\pi(s+1)},\dots,q_{\tau(n)}), \tag{1.6}$$

а $\delta(p-q)$ – ядро единичного оператора в H . (Для произвольного линейного оператора $K^{(m,n)}$ с областью определения в пространстве n -частичных состояний $H^{(n)}$ и со значениями в $H^{(m)}$ вводят ядро $K^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n)$ – это символ, определяемый формальным интегралом:

$$g^{(m)}(p_1,\dots,p_m)=\int K^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n)\,f^{(n)}(q_1,\dots,q_n)\,d\mu(q_1)\dots d\mu(q_n), \tag{1.7}$$

что означает

$$g^{(m)} = K^{(m,n)} \cdot f^{(n)} \quad .)$$

Поясним, как следует понимать разложение (1.2). Каждое слагаемое $\mathcal{A}_{m,n}$ представляет собой (неограниченный) оператор, определенный на финитных векторах Φ (т.е. таких, у которых проекции $\Phi^{(n)}$ на n – частичные подпространства в $\mathcal{H}$ равны нулю при $n > N(\Phi)$), (причем $\mathcal{A}_{m,n} \Phi = 0$ при $n > N(\Phi)$). Поэтому естественно было бы считать, что сходится повторный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N(\Phi)} \mathcal{A}_{m,n} \Phi = C \Phi \, . \tag{1.8}$$

Однако ряд (1.8), вообще говоря, не сходится не только в сильном, но и в слабом смысле. (В дополнении, п.4, приведен соответствующий пример ограниченного оператора; см., однако, /2/, стр. 41, где полагается, что ряд (1.8) сходится в сильном смысле, и в нем можно переставлять и группировать слагаемые).

Ряд в (1.8) сходится, если его предварительно скалярно умножить на произвольный финитный вектор. (В этом случае в сумме $\Sigma(\Phi, \mathcal{A}_{m,n} \Psi)$ отлично от нуля конечное число слагаемых). Так что разложение (1.2) можно понимать в смысле равенства двух билинейных форм над финитными векторами. Если мы желаем понимать ряд (1.2) как предел частичных сумм, сильно сходящихся на множестве финитных векторов, то следует частичные суммы конструировать специальным образом (например, как в § 3).

Для ограниченного оператора C матричные элементы $C^{(m,n)}((p);(q))$ и коэффициентные функции $A^{(m,n)}((p);(q))$ – ядра непрерывных линейных преобразований n– частичных состояний $H^{(n)}$ в $H^{(m)}$.

Обращаясь к случаю неограниченного оператора C, в область определения которого входят плотные множества состояний с определенным числом частиц, мы сталкиваемся с двумя проблемами:

Какова математическая природа коэффициентных функций, определяемых соотношениями (1.4)?

Возможно ли каждому слагаемому (1.3) ряда (1.2) придать смысл оператора, определенного в некоторой плотной области и допускающего замыкание?

В данной работе мы рассматриваем операторы, которые вместе со своими сопряженными определены в $D(M)$ –области определения некоторого самосопряженного оператора M в $\mathcal{H}$, коммутирующего с операторами проектирования на n – частичные подпространства и удовлетворяющего условию (2.5), §2; (если пространством Фока является гильбертово пространство in – частиц, то в качестве оператора M можно взять оператор энергии P_0 или функцию от него $M = f(P_0)$, соответствующую произвольной монотонной функции $f(t)$ на интервале $[0, \infty)$).

В этом случае матричные элементы (1.1) оператора C и коэффициентные функции разложения (1.3) – ядра некоторых замкнутых операторов, переводящих $H^{(n)}$ в $H^{(m)}$, а преобразования (1.4), (1.5) являются взаимно обратным преобразованиями некоторого пространства $\Theta = \Theta_M$ коэффициентных функций на себя.

Показывается, что каждое слагаемое ряда (1.2) представляет собой допускающий замыкание оператор на некотором плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathfrak{D}$ финитных векторов, и определенным образом выбранные частичные суммы ряда (1.2) сходятся на $\dot{\mathfrak{D}}$ в сильном смысле к оператору C.

В качестве приложения рассматриваются out – и in – поля (соответствующие частицам положительной массы) квантовой теории поля. Они определены в общей области $D(P_0)$ – области определения оператора энергии. Это позволяет заключить, что out – поля разлагаются в ряд по in – полям.

§2. Пространство Θ_M коэффициентных функций

1. Предварительные замечания

В работе[2] (стр. 32) дается общее определение выражения (1.3). Оно позволяет некоторым обобщенным функциям $A^{(m,n)}(p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n)$, заданным на некотором линейном многообразии в пространстве квадратично-суммируемых по мере $d\mu(p_1)\dots d\mu(q_n)$ функций $(m+n)$ переменных, сопоставить оператор $\mathcal{A}_{m,n}$, определенный на подмножестве финитных векторов в пространстве Фока. В частности, действие $\mathcal{A}_{m,n}$ на n-частичный вектор $\Phi^{(n)}$ с "волновой функцией" $f^{(n)}(p_1,\dots,p_n)$ дает m-частичный вектор $\mathcal{A}_{m,n}\Phi^{(n)}$ с "волновой функцией"

$$g^{(m)}(p_1,\dots,p_m)=\int A^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n)f^{(n)}(q_1,\dots,q_n)\,d\mu(q_1)\dots d\mu(q_n). \tag{2.1}$$

Если ограничиться только допускающими замыкание операторами $\mathcal{A}_{m,n}$, то указанный класс коэффициентных функций оказывается слишком широким. Именно, для того чтобы разложение (1.3) давало оператор $\mathcal{A}_{m,n}$ такой, чтобы $D(\mathcal{A}_{m,n})$ и $D(\mathcal{A}^*_{m,n})$ содержали плотные в $\mathcal{H}$ множества финитных векторов, необходимо, чтобы (как это следует из (2.1)) коэффициентная функция $A^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n)$ была ядром замкнутого преобразования (см. определение (1.7)) с плотной областью определения в $H^{(n)}$ и со значениями в $H^{(m)}$ (2,2).

По-видимому, условие (2.2) является и достаточным. Однако, чтобы бесконечная сумма $\sum_{m,n}\mathcal{A}_{m,n}$ задавала оператор с плотной областью определения, еще недостаточно, чтобы коэффициентные функции $A^{(m,n)}((p);(q))$ удовлетворяли условию (2.2), так как все слагаемые суммы должны иметь общую плотную в $\mathcal{H}$ область определения.

Мы обратимся к классу Θ_M коэффициентных функций, для которых это условие оказывается выполненным.

2. H-гильбертово пространство одночастичных состояний; $H^{(n)}=H^{\vee n}$ – n-ая симметричная степень пространства H (см. дополнение п.3) – пространство n-частичных состояний;

$\mathcal{H}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^{(n)}$ – фоковское пространство бозе-частиц.

Пусть M – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с областью определения $D(M)$, перестановочный с операторами E_n проектирования на $H^{(n)}$: $E_nM\subset ME_n$; $M^{(n,n)}$ – часть оператора M, лежащая в подпространстве $H^{(n)}$: это самосопряженный оператор с областью определения $D(M^{(n,n)})=D(M)\bigcap H^{(n)}=E_nD(M)$, которую в дальнейшем будем обозначать

$$G^{(n)} = D(M^{(n,n)}).$$ (2.4)

На оператор M наложим следующее дополнительное условие: при любых $s, k = 0, 1, \ldots$

$$D(I^{(s,s)} \vee M^{(k,k)}) \supset D(M^{(s+k,s+k)}),$$ (2.5)

где $I^{(s,s)} \vee M^{(k,k)}$ – симметричное (тензорное) произведение единичного оператора $I^{(s,s)}$ в пространстве $H^{(s)}$ с оператором $M^{(k,k)}$ (см. Дополнение п.3). С помощью леммы 1 из дополнения получим неравенство

$$\| (I^{(s,s)} \vee M^{(k,k)}) \Phi \|^2 \leq a_{s,k} (\| \Phi \|^2 + \| M^{(s+k,s+k)} \Phi \|^2)$$

для $\forall \Phi \in G^{(s+k)}$, т.е. в определенном смысле можно сказать, что операторы $M^{(n,n)}$ "растут" с увеличением n. Это положение наглядно иллюстрируется в § 3, п.2 .

Пусть $K^{(m,n)}$ – произвольный линейный оператор с областью определения $D(K^{(m,n)}) \subset H^{(n)}$ и областью значений $R(K^{(m,n)}) \subset H^{(m)}$ такой, что

$$D(K^{(m,n)}) \supset G^{(n)}, \quad D(K^{(m,n)*}) \supset G^{(m)}.$$ (2.6)

(Из (2.6) следует, что $K^{(m,n)}$ допускает замыкание).

Из теоремы (дополнение, п.3) следует, что условия (2.6) влекут за собой

$$D(I^{(s,s)} \vee K^{(m,n)}) \supset D(I^{(s,s)} \vee M^{(n,n)}),$$

$$D(I^{(s,s)} \vee K^{(m,n)*}) \supset D(I^{(s,s)} \vee M^{(m,m)}),$$

что вместе с требованием (2.5) дает:

$$D(I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)}) \supset G^{(s+n)},$$
$$D(I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)*}) \supset G^{(s+m)} \tag{2.7}$$

С помощью леммы 3 (Дополнение, п.3) устанавливаем, что оператор $I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)}$ допускает замыкание; из (4.17) получаем:

$$(I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)})^* \supset I^{(s,s)*}\vee K^{(m,n)*} = I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)*},$$

так что из (2.7) следует

$$D(I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)}) \supset G^{(s+n)},$$
$$D((I^{(s,s)}\vee K^{(m,n)})^*) \supset D^{(s+m)}. \tag{2.8}$$

(Заметим, что если формально выписать ядро оператора $I^{(s,s)}\vee F^{(m-s,n-s)}$, то получится выражение (1.6). Поэтому, если $F^{(m-s,n-s)}$ – оператор, удовлетворяющий условию (2.6), то мы можем дать следующее определение выражения (1.6): это ядро допускающего замыкание оператора

$$T^{(m,n)} = I^{(s,s)}\vee F^{(m-s,\,n-s)},$$

также удовлетворяющего условию (2.6)).

Ниже мы воспользуемся следующим свойством ассоциативности:

Операторы $I^{(s,s)}\vee(I^{(t,t)}\vee K^{(m,n)})$ и $(I^{(s,s)}\vee I^{(t,t)})\vee K^{(m,n)}$ (2.9)

имеют общую область определения $G^{(s+t+n)}$ и совпадают на ней.

Доказательство. Из (2.6), (2.8) следует, что оба оператора определены на $G^{(s+t+n)}$. Будем обозначать: $\mathcal{P}_{(t,m)}$ – проектор в $H^{(t)}\otimes H^{(m)}$ на подпространство $H^{(t+m)}$, $\mathcal{P}_{(s,t,m)}$ – проектор $H^{(s)}\otimes H^{(t)}\otimes H^{(m)}$ на $H^{(s+t+m)}$. Согласно определению симметричного произведения и свойству (4.9), для $\forall\ \Phi \in G^{(s+t+n)}$ имеем

$$[I^{(s,s)} \vee (I^{(t,t)} \vee K^{(m,n)})]\Phi = \mathcal{P}_{(s,t+m)}[I^{(s,s)} \otimes (I^{(t,t)} \vee K^{(m,n)})]\Phi =$$

$$= \mathcal{P}_{(s,t+m)} \{ I^{(s,s)} \otimes [\mathcal{P}_{(t,m)} (I^{(t,t)} \otimes K^{(m,n)})]\} \Phi =$$

$$= \mathcal{P}_{(s,t+m)} [I^{(s,s)} \otimes \mathcal{P}_{(t,m)}][I^{(s,s)} \otimes (I^{(t,t)} \otimes K^{(m,n)})]\Phi =$$

$$= \mathcal{P}_{(s,t,m)} [I^{(s,s)} \otimes I^{(t,t)} \otimes K^{(m,n)}]\Phi .$$

Аналогично

$$[(I^{(s,s)} \vee I^{(t,t)}) \vee K^{(m,n)}]\Phi = [I^{(s+t,s+t)} \vee K^{(m,n)}]\Phi =$$

$$= \mathcal{P}_{(s+t,m)} [I^{(s+t,s+t)} \otimes K^{(m,n)}]\Phi = \mathcal{P}_{(s+t,m)} [\mathcal{P}_{(s,t)} \otimes I^{(m,m)}] \times$$

$$\times [I^{(s,s)} \otimes I^{(t,t)} \otimes K^{(m,n)}]\Phi = \mathcal{P}_{(s,t,m)} [I^{(s,s)} \otimes I^{(t,t)} \otimes K^{(m,n)}]\Phi .$$

3. Введем множество $\Theta = \Theta_M$ матриц

$$K = [K^{(m,n)}]_{m,n=0,1\ \dots} \tag{2.10}$$

Элементы $K^{(m,n)}$ этих матриц являются операторами, удовлетворяющими условию (2.6).

В дальнейшем $\mathfrak{D}$ будет обозначать множество финитных векторов из $D(M)$, т.е.

$$\mathfrak{D} = \{ \Phi : \Phi \in D(M),\quad E_n \Phi = 0 \qquad \text{при } n > N(\Phi) \}, \tag{2.11}$$

здесь E_n – проектор в $\mathcal{H}$ на $H^{(n)}$.

Каждому оператору C в пространстве Фока, такому что

$$D(C) \supset \mathfrak{D} \quad , \quad D(C^*) \supset \mathfrak{D}, \tag{2.13}$$

соответствует матрица $K \in \Theta$ с элементами: $K^{(m,n)}$ есть часть оператора

$$(m!\,n!)^{-1/2}\, C, \tag{2.14}$$

принадлежащая подпространствам $H^{(n)}$ и $H^{(m)}$ (определение части оператора см. в дополнении п.1), т.е.

$$K^{(m,n)}\,\Phi^{(n)} = (m!n!)^{-1/2}(E_m\, C\, E_n)\,\Phi^{(n)} \tag{2.15}$$

$$\forall\, \Phi^{(n)} \in D(C) \cap H^{(n)}.$$

Обратное, вообще говоря, неверно (матрице $K \in \Theta$ может не соответствовать оператор в $\mathcal{H}$).

Мы будем называть матрицу $K \in \Theta$ "якобиевой", если существует r такое, что $K^{(m,n)} = 0$ при $|m-n| > r$, и финитной, если отлично от нуля конечное число элементов $K^{(m,n)}$

Лемма. Всякой "якобиевой" (в частности, финитной) матрице $K \in \Theta$ соответствует (допускающий замыкание) оператор C, удовлетворяющий условиям (2.13), (2.14).

Доказательство. Определим C на финитных векторах $\Phi = \bigoplus_r \Phi^{(n)} \in \mathfrak{D}$ равенством:

$$C\Phi = \bigoplus_m \Big(\sum_n (m!n!)^{1/2}\, K^{(m,n)}\, \Phi^{(n)} \Big). \tag{2.16}$$

Так как $\Phi^{(n)} = 0$ при $n > N(\Phi)$, и $K^{(m,n)} = 0$ при $|m-n| > r$, то в правой части (2.16) сумма по m, n конечна, и оператор C определен на плотном множестве $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H}$. Матрица $K^+ \in \Theta$; $(K^+)^{(m,n)} = K^{(n,m)*}$ также "якобиева", поэтому она определяет оператор B на $\mathfrak{D}$, причем $(B\,\Phi, \Psi) = (\Phi, C\,\Psi)$ для $\forall \Phi, \Psi \in \mathfrak{D}$. Следовательно, $D(C^*) \supset \mathfrak{D}$. Лемма доказана.

Для каждого комплексного λ определим преобразование над Θ :

$$K \to I_{(\lambda)} * K, \tag{2.17}$$

где правая часть (2.17) есть матрица с элементами - операторами, определенными на $G^{(n)}$ соотношением

$$(I_{(\lambda)} * K)^{(m,n)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{\lambda^s}{s!} I^{(s,s)} V K^{(m-s,n-s)}. \tag{2.18}$$

Из результатов п. 2 следует, что правая часть (2.18) есть оператор, определенный на $G^{(n)}$, а в область определения сопряженного входит $G^{(m)}$, т.е. (2.17) есть преобразование Θ в себя.

(При $\lambda = 0$ $I_{(0)} * K$ определяется равным K. Если расписать преобразования

$$A^{(m,n)} = (I_{(-1)} * C)^{(m,n)}, \quad C^{(m,n)} = (I_{(1)} * A)^{(m,n)} \tag{2.19}$$

в терминах ядер операторов, то получается соотношения (1.4), (1.5)).

Преобразование (2.17) обладает обратным, как это следует из тождества:

$$I_{(\lambda)} * [I_{(\mu)} * K] = I_{(\lambda+\mu)} * K. \tag{2.20}$$

Доказательство. Для любого $\Phi \in G^{(n)}$ (см. (2.9))

$$(I_{(\lambda)} * [I_{(\mu)} * K])^{(m,n)} \Phi = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{\lambda^s}{s!} I^{(s,s)} V (I_{(\mu)} * K)^{(m-s,n-s)} \Phi =$$

$$= \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \sum_{t=0}^{\min(m-s,n-s)} \frac{\lambda^s}{s!} \cdot \frac{\mu^t}{t!} \; I^{(s,s)} \vee [\, I^{(t,t)} \vee K^{(m-s-t,\, n-s-t)} \,] \Phi =$$

$$= \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \sum_{t=0}^{\min(m-s,n-s)} \frac{\lambda^s}{s!} \cdot \frac{\mu^t}{t!} [\, I^{(s+t,s+t)} \vee K^{(m-s-t,\, n-s-t)} \,] \Phi =$$

$$= \sum_{p=0}^{\min(m,n)} \frac{(\lambda+\mu)^p}{p!} \; I^{(p,p)} \vee K^{(m-p,n-p)} \Phi = (I_{(\lambda+\mu)} * K)^{(m,n)} \Phi \,.$$

§3. Нормальная форма операторов в пространстве Фока

1. Для любой финитной матрицы $A \in \Theta$ и любого комплексного λ $I_{(\lambda)} * A$ – "якобиева" матрица, принадлежащая Θ. По лемме §2 матрице $I_{(1)} * A$ соответствует оператор B в $\mathcal{H}$, такой что

$$D(B) \supset \mathfrak{D} \,, \qquad D(B^*) \supset \mathfrak{D} \,, \qquad \text{и} \tag{3.1}$$

часть $B^{(m,n)}$ оператора $(m!\,n!)^{-1/2} B$, принадлежащая подпространствам $H^{(n)}$ и $H^{(m)}$, равна

$$B^{(m,n)} = (I_{(1)} * A)^{(m,n)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!} I^{(s,s)} \vee A^{(m-s,\, n-s)} \,. \tag{3.2}$$

Определение 1. Пусть $A = [\, A^{(m,n)}]$ – финитная матрица из Θ. Разложением

$$A\{a^+, a^-\} = \sum_{m,n} \int A^{(m,n)}(p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_n)\, a^+(p_1) \ldots a^+(p_m) \times$$
$$\times\; a^-(q_1) \ldots a^-(q_n)\, d\mu(p_1) \ldots d\mu(q_n) \,. \tag{3.3}$$

будем называть оператор B в пространстве Фока, соответствующий "якобиевой" матрице $I_{(1)} * A$ (и определяемый равенством (3.2)).

(Можно переформулировать это определение в терминах ядер: конечная сумма (3.3) соответствует оператору B, определенному на финитных векторах $\mathfrak{D} \subset D(M)$ и имеющему матричные элементы – ядра допускающих замыкание преобразований $H^{(n)}$ в $H^{(m)}$:

$$< p_1, \ldots, p_m | B | q_1, \ldots, q_n > = (m!n!)^{1/2} B^{(m,n)}(p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_n), \quad (3.4)$$

$$B^{(m,n)}(p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_n) = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!} \text{ SYM } \{ \prod_{i=1}^{s} \delta(p_i - q_i) \times$$

$$\times A^{(m-s,n-s)}(p_{s+1}, \ldots, p_m; q_{s+1}, \ldots, q_n). \quad (3.5)$$

Обозначения здесь такие же, как в (1.4), (1.5)).

Определение 2. Пусть A – произвольная матрица из Θ. Разложением

$$B = A\{a^+, a^-\} = \sum_{m,n} \int A^{(m,n)}((p);(q))\, a^+(p_1) \ldots a^-(p_m) \times$$

$$\times a^-(q_1) \ldots a^-(q_n)\, d\mu(p_1) \ldots d\mu(q_n) \quad (3.6)$$

будем называть предел при $N \to \infty$ операторов

$$B_N = \sum_{(m,n) \in J_N} \int A^{(m,n)}((p);(q))\, a^+(p_1) \ldots a^-(q_n)\, d\mu(p_1), \ldots d\mu(q_n), \quad (3.7)$$

если он существует на множестве финитных векторов $\mathfrak{D} \subset D(M)$. Здесь

$$J_N = \{(m,n) : |m-n| \le N, \; m+n \le N + d(N);\; d(N) \to \infty \text{ при } N \to \infty, \} \quad (3.8)$$

Теорема. Пусть C -оператор в пространстве Фока, удовлетворяющий условию (2.13): $D(C) \supset \mathfrak{D}$, $D(C^*) \supset \mathfrak{D}$; $K = [K^{(m,n)}] \in \Theta$ - соответствующая ему матрица (см. (2.14)),

$$A = I_{(-1)} * K . \tag{3.9}$$

Тогда оператору C соответствует в смысле определения 2 разложение (3.6), и

$$B = C \,|\, \mathfrak{D} . \tag{3.10}$$

Доказательство. По определению 1 оператору B соответствует матрица $(B_N)^{(m,n)} = (I_{(1)} * A_N)^{(m,n)}$, где

$$(A_N)^{(m,n)} = \begin{cases} A^{(m,n)} & \text{при } (m,n) \in J_N , \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим $r(N) = \min(N, \frac{1}{2} d(N))$ Тогда при $n \leq r(N)$

$$(A_N)^{(m,n)} = \begin{cases} A^{(m,n)} & \text{при } m-n \leq N \\ 0 & \text{при } m-n > N \end{cases} \tag{3.11}$$

Если $n \leq r(N)$, $m-n \leq N$, то при всех s: $0 \leq s \leq \min(m,n)$ $(A_N)^{(m-s,n-s)} = A^{(m-s,n-s)}$ и, значит,

$$(B_N)^{(m,n)} = (I_{(1)} * A_N)^{(m,n)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!} I^{(s,s)} V (A_N)^{(m-s,n-s)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!} I^{(s,s)} V A^{(m-s,n-s)} = (I_{(1)} * A)^{(m,n)} =$$

$$= [I_{(1)} * (I_{(-1)} * K)]^{(m,n)} = K^{(m,n)} . \qquad (3.12)$$

Если $n \leq r(N)$, $m - n > N$, то при всех s : $0 \leq s \leq \min(m,n)$ $(A_N)^{(m-s,n-s)} = 0$ и, значит,

$$(B_N)^{(m,n)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{s!} I^{(s,s)} V (A_N)^{(m-s,\, n-s)} = 0 \quad . \qquad (3.13)$$

Объединяя (3.12), (3.13), получим

$$(B_N)^{(m,n)} = \begin{cases} K^{(m,n)} & \text{при } n \leq r(N),\ m \leq n + N , \\ \\ 0 & \text{при } n \leq r(N),\ m > n + N . \end{cases} \qquad (3.14)$$

Возьмем произвольный n – частичный вектор $\Phi^{(n)} \subset \mathfrak{D}$; N будем считать настолько большим, что $r(N) \geq n$. Тогда

$$\| (C - B_N) \Phi^{(n)} \|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m!\, n!\, \| [K^{(m,n)} - (B_N)^{(m,n)}] \Phi^{(n)} \|^2 =$$

$$= \sum_{m=n+N+1}^{\infty} m!\, n!\, \| K^{(m,n)} \Phi^{(n)} \|^2 = \| P_{n+N}\, C\, \Phi^{(n)} \|^2 \to 0 \text{ при } N \to \infty . \qquad (3.15)$$

(Здесь P_k – оператор проектирования на подпространстве с числом частиц больше k). Тем самым доказано, что (3.6) определяет оператор B, удовлетворяющий (3.10).

2. Разложение out – полей по in – полям.

Обратимся к релятивистской квантвовой теории одного скалярного поля, в которой выполнено условие асимптотической полноты /6/.

Ниже H обозначает гильбертово пространство функций $f(p)$ $(p = (p^0, p^1, p^2, p^3))$ в 4-мерном пространстве Минковского, измеримых и квадратично суммируемых по мере $d\mu(p) = \theta(p^0)\,\delta(p^2 - m_0^2)$ ($m_0 > 0$ – масса частиц). Каждому $f \in H$ сопоставлены операторы $a^{\pm}(f) = a^{\pm}_{in}(f)$ в пространстве Фока $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{in}$, описывающие "входящие" частицы. Как известно /2/, операторы $a^{\pm}(f)$ можно продолжить на $D(\sqrt{N})$, где $N = N_{in}$ –оператор числа in – частиц:

$$D(\sqrt{N}) = \{\Phi \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} n \int |\Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)|^2 \, d\mu(p_1) \dots d\mu(p_n) < \infty\}. \qquad (3.16)$$

В $\mathcal{H}$ задано унитарное представление неоднородной группы Лоренца, в частности, подгруппы трансляций:

$$(U(a)\Phi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = e^{i(\sum_{k=1}^{n} p_k)a}\, \Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n),$$

P_α $(\alpha = 0,1,2,3)$ – генераторы представления $U(a)$, и $M = (p^2)^{1/4} = (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)^{1/4}$ – квадратный корень из оператора массы – положительный самосопряженный оператор:

$$(M\Phi)^{(n)}(p_1, \dots p_n) = [(p_1 + \dots + p_n)^2]^{1/4} \cdot \Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \qquad (3.17)$$

$$D(M) = \{\Phi \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} \int [(p_1 + \dots + p_n)^2]^{1/2} \cdot |\Phi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)|^2 \times d\mu(p_1) \dots d\mu(p_n) < \infty\}. \qquad (3.18)$$

(В качестве M можно было выбрать квадратный корень из оператора энергии P_0 ; на возможность использования релятивистски-инвариантного оператора квадрата массы P^2 указал L. Streit, /7/).

Как видно из (3.18), M перестановочен с оператором проектирования на n-частичные состояния; $M^{(n,n)}$ – часть оператора M, лежащая в $H^{(n)}$:

$$D(M^{(n,n)}) = \{ \Phi^{(n)} \in H^{(n)} : \int [(p_1 + \ldots + p_n)^2]^{1/2} \cdot | \Phi^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) |^2 \times \tag{3.19}$$

$$\times \, d\mu(p_1) \ldots d\mu(p_n) < \infty \} \, .$$

Покажем, что M удовлетворяет фундаментальному соотношению (2.5). Действительно,

$$D(I^{(s,s)} \otimes M^{(k,k)}) = \{ \Phi \in H^{(s)} \otimes H^{(k)} : \tag{3.20}$$

$$\int [(p_{s+1} + \ldots + p_{s+k})^2]^{1/2} | \Phi(p_1, \ldots, p_s ; p_{s+1}, \ldots, p_{s+k}) |^2 d\mu(p_1) \ldots d\mu(p_{s+k}) < \infty \}$$

Так как для $\forall p_i \in \operatorname{supp} d\mu(p)$

$$(p_1 + \ldots + p_{s+k})^2 \geq (p_1 + \ldots + p_s)^2 + (p_{s+1} + \ldots + p_{s+k})^2 \geq (p_{s+1} + \ldots + p_{s+k})^2 , \quad \text{то} \tag{3.21}$$

$$D(I^{(s,s)} \otimes M^{(k,k)}) \supset D(M^{(s+k,\, s+k)}) = \{ \Phi \in H^{(s+k)} :$$

$$\int [(p_1 + \ldots + p_{s+k})^2]^{1/2} | \Phi(p_1, \ldots, p_{s+k}) |^2 d\mu(p_1) \ldots d\mu(p_{s+k}) < \infty \} .$$

Согласно определению симметричного произведения (дополнение, п.3), из (3.21) следует (2.5):

$$D(I^{(s,s)} \vee M^{(k,k)}) \supset D(M^{(s+k,\, s+k)}) . \tag{3.22}$$

Заметим, что из (3.16), (3.18) и неравенства $[(p_1+\dots+p_n)^2]^{1/2} \geq n\, m_0$ для $\forall p_i \in \operatorname{supp} d\mu(p)$ следует

$$D(\sqrt{N}\,) \supset D(M), \quad \text{так что} \tag{3.23}$$

$$D(a^{\pm}(f)) \supset D(M). \tag{3.24}$$

С помощью унитарного оператора рассеяния S в $\mathcal{H}$ задаются операторы, описывающие "выходящие" частицы

$$a^{\pm}_{out}(f) = S^{-1} a^{\pm}(f)\, S \quad \text{для} \quad \forall f \in H \tag{3.25}$$

с областью определения

$$D(a^{\pm}_{out}(f)) = S^{-1} D(a^{\pm}(f)). \tag{3.26}$$

Оператор S в квантовой теории инвариантен относительно неоднородной группы Лоренца, в частности, относительно трансляций:

$$SU(a) = U(a)S \quad , \tag{3.27}$$

откуда следует, что S и S^{-1} перестановочны с генераторами P_α представления и оператором $M = (P^2)^{1/4}$, значит,

$$S^{-1}D(M) = D(M). \tag{3.28}$$

Из (3.24), (3.26), (3.28) следует, что наряду с $a^{\pm}(f)$ в $D(M)$ определены $a^{\pm}_{out}(f)$:

$$D(a^{\pm}_{out}(f)) \supset D(M). \tag{3.29}$$

Из того, что $(a^{\pm}(f))^* \supset a^{\mp}(\bar{f})$ (см.[2]) следует

$$D((a^{\pm}_{out}(f))^*) \supset D(a^{\mp}_{out}(\bar{f})) \supset D(M) . \tag{3.30}$$

Как показывают (3.29), (3.30), операторы $a^{\pm}_{out}(f)$ удовлетворяют условию теоремы § 3.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю М.К.Поливанову, В.С.Владимирову, И.Т.Тодорову и С.С.Хоружему за плодотворные дискуссии, связанные с данной работой.

Дополнение

1. Приведем простое утверждение о линейных неограниченных операторах в гильбертовых пространствах.

Лемма 1. Пусть A и B –замкнутые операторы с плотными областями определения $D(A)$ и $D(B)$ в одном и том же гильбертовом пространстве H и с областями значений соответственно в H_1 и H_2.

Пусть существует область $D \subset D(A) \cap D(B)$, такая что

$$\overline{B|_D} = B \tag{4.1}$$

(здесь $B|_D$ – сужение оператора B на область D).

Тогда условия

а) $D(A) \supset D(B)$

б) $\|Af\|^2 \leq a(\|f\|^2 + \|Bf\|^2)$ при некотором a и $\forall f \in D$ эквивалентны.

Доказательство. Замкнутость оператора B означает, что $D(B)$ есть (полное) гильбертово пространство H_B с нормой

$$\|f\|^2_B = \|f\|^2 + \|Bf\|^2 .$$

Если выполнено а), то оператор A' определен во всем пространстве H_B со значениями в H_1 формулой: $A'f = Af$ для $\forall f \in H_B$.
Из замкнутости оператора A (с графиком в $H \oplus H_1$) следует замкнутость A' (с графиком в $H_B \oplus H_1$). Из теоремы Банаха(/4/, § 51, теорема 3) следует, что A' ограничен: $\| A'f\|^2 \le a \| f \|^2_B$ для $\forall f \in H_B$; б) следует из а).

Пусть выполнено б); из (4.1) заключаем, что для $\forall f \in D(B)$ существует $\{ f_n\}_1^\infty \subset D$, т.ч. $\| f_n - f\|^2 + \| B(f_n - f)\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Используя б), получаем $\| A(f_n - f_m)\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, что влечёт за собой сходимость Af_n при $n \to \infty$. Значит, $f \in D(A)$, и а) доказано.

Для каждого замкнутого оператора A с плотной областью определения $D(A) \subset H$ и областью значений $R(A) \subset \mathcal{H}$ существует положительный самосопряженный оператор A^*A с областью определения $D(A^*A) \subset H$, такой что $\overline{A|_{D(A^*A)}} = A$ (/3/, Лемма 12.7. 1).

Обозначим $K = \sqrt{A^*A}$ – положительный замкнутый квадратный корень из A^*A. Он обладает свойствами:

$$\overline{K|_{D(A^*A)}} = K, \quad \| Kf\| = \| Af \| \quad \text{для} \quad \forall f \in D(A^*A).$$

К операторам A и K приложима лемма 1, так что

$$D(A) = D(\sqrt{A^*A}); \tag{4.2}$$

так как $D(\sqrt{1 + A^*A}) = D(\sqrt{A^*A})$, то также имеем

$$D(A) = D(\sqrt{1 + A^*A}). \tag{4.3}$$

Мы будем пользоваться следующим определением части оператора.
Определение. Пусть C – линейный оператор, $D(C) \subset H$, $R(C) \subset \mathcal{H}$; H' и $\mathcal{H}'$ – замкнутые подпространства в H и $\mathcal{H}$ соответственно; P и $\mathcal{P}$ – операторы проектирования: $H' = PH$, $\mathcal{H}' = \mathcal{P}\mathcal{H}$. Частью оператора C, принадлежащей подпространствам H' и $\mathcal{H}'$, называется оператор X с $D(X) \subset H'$, $P(X) \subset \mathcal{H}'$, такой что

$$D(X)=D(C)\bigcap H',\tag{4.4}$$

$$Xf=\mathcal{P}Cf\equiv(\mathcal{P}CP)f \quad \text{для } \forall f\in D(X).\tag{4.5}$$

Часть X замкнутого, плотно определенного оператора C, вообще говоря, не допускает замыкания. Однако, если часть Y оператора C^*, принадлежащая подпространствам $\mathcal{H}'$ и H', имеет плотную область определения $D(Y)\subset\mathcal{H}'$, то часть X оператора C, принадлежащая подпространствам H' и $\mathcal{H}'$, допускет замыкание, и $\overline{X}\subset Y^*$. Если к тому же $D(X)$ плотно H', то Y также допускает замыкание, и $\overline{Y}\subset X^*$.

(4.6)

2. Тензорное произведение неограниченных операторов.

Пусть $H_1,\dots,H_n$ – гильбертовы пространства; $\mathcal{L}(H_1,\dots,H_n)$– – линейное пространство таких мультиантилинейных (т.е. антилинейных по каждому аргументу) форм над $H_1^*=H_1,\dots,H_n^*=H_n$, элементы которого $F=\sum_{s=1}^{N} f_1^s\otimes\dots\otimes f_n^s$ с произвольным N и произвольными $f_i^s\in H_i$ определяются формулой: при $\forall x_i\in H_i$

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{s=1}^{N}(x_1,f_1^s)(x_2,f_2^s)\dots(x_n,f_n^s),$$

где (x_i,f_i) – скалярное произведение в H_i. $\mathcal{L}(H_1,\dots,H_n)$ становится предгильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение:

$$\left(\sum_{s=1}^{M} f_1^s\otimes\dots\otimes f_n^s,\ \sum_{t=1}^{N} h_1^t\otimes\dots\otimes h_n^t\right)=\sum_{s=1}^{M}\sum_{t=1}^{N}(f_1^s,h_1^t)\dots(f_n^s,h_n^t).$$

Пополнение предгильбертова пространства $\mathcal{L}(H_1,\dots,H_n)$ называется тензорным произведением $H_1,\dots,H_n$ и обозначается $H_1\otimes\dots\otimes H_n$ /5/.

Для тензорного произведения имеет место свойство ассоциативности (в смысле изоморфизма гильбертовых пространств):

$$(H_1\otimes H_2)\otimes H_3=H_1\otimes H_2\otimes H_3=H_1\otimes(H_2\otimes H_3).\tag{4.7}$$

Если D_i – произвольное линейное многообразие в H_i ($i=1,\dots,n$), то $\mathfrak{L}(D_1,\dots,D_n)$ будет в дальнейшем означать линейную оболочку в $H_1\otimes\dots\otimes H_n$ векторов $f_1\otimes\dots\otimes f_n$ с любыми $f_i\in D_i$.

Пусть A_i ($i=1,\dots,n$) – замкнутые (или допускающие замыкание) операторы с плотными областями определения $D(A_i)\subset H_i$ и со значениями $R(A_i)\subset\mathcal{H}_i$. Тогда на плотном в $H_1\otimes\dots\otimes H_n$ множестве $\mathfrak{L}(D(A_1),\dots,D(A_n))$ определен оператор A со значениями в $\mathcal{H}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{H}_n$ по формуле:

$$A(f_1\otimes\dots\otimes f_n)=(A_1f_1)\otimes\dots\otimes(A_nf_n). \tag{4.8}$$

$D(A)$ плотно в $H_1\otimes\dots\otimes H_n$, поэтому у A есть сопряженный A^*. $D(A^*)$ плотно в $\mathcal{H}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{H}_n$, так как легко проверить, что $\mathfrak{L}(D(A_1^*),\dots,D(A_n^*))\subset D(A^*)$. Следовательно, A имеeет замыкание.

Определение. Тензорное произведение $A_1\otimes\dots\otimes A_n$ замкнутых (или допускающих замыкание), плотно определенных операторов A_i: $D(A_i)\subset H_i$, $R(A_i)\subset\mathcal{H}_i$ есть замыкание оператора A, определенного в $\mathfrak{L}(D(A_1),\dots,D(A_n))\subset H_1\otimes\dots\otimes H_n$ формулой (4.8) /8/).

Для тензорного произведения операторов имеет место свойство ассоциативности:

$$(A_1\otimes A_2)\otimes A_3=A_1\otimes A_2\otimes A_3=A_1\otimes(A_2\otimes A_3) \tag{4.9}$$

(в смысле равенства операторов определенных в $H_1\otimes H_2\otimes H_3$ со значениями в $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3$; см. 4.7).

Лемма 2. Пусть A и B – два замкнутых оператора с плотными областями определения в одном и том же гильбертовом пространстве $D(A)\subset H$, $D(B)\subset H$ и со значениями $R(A)\subset H_1$, $R(B)\subset H_2$, причём $D(A)\supset D(B)$; S – замкнутый плотно определенный оператор, $D(S)\subset H'$, $R(S)\subset\mathcal{H}'$. Тогда

$$D(S \otimes A) \supset D(S \otimes T) \quad , \qquad \text{где} \tag{4.10}$$

$$T = \sqrt{1 + B^*B} \tag{4.11}$$

(замкнутый) положительный квадратный корень из $1 + B^*B$. Если выполнено одно из требований:

а) S ограничен,

б) B имеет ограниченный обратный, то

$$D(S \otimes A) \supset D(S \otimes B). \tag{4.13}$$

Доказательство. $D(A) \supset D(B)$ означает (см. дополнение, лемма 1)

$$\| Af \|^2 \leq a (\| f \|^2 + \| Bf \|^2) \quad \text{для} \ \forall f \in D(B). \tag{4.13}$$

С помощью оператора $T = \sqrt{1 + B^*B}$, обладающего свойствами (см. 4.3):

$$D(B) = D(T), \quad \| Tf \|^2 = \| f \|^2 + \| Bf \|^2, \tag{4.13}$$

записывается:

$$\| Af \|^2 \leq a \| Tf \|^2 \qquad \text{для} \ \forall f \in D(T). \tag{4.14}$$

Оба оператора $S \otimes A$ и $S \otimes T$ определены в общей области $D = \mathfrak{L}(D(S), D(T))$, причём, согласно определению тензорного произведения, $S \otimes T = \overline{S \otimes T}\,|_D$. Из леммы 1 будет следовать (4.10), если мы покажем, что

$$\| (S \otimes A) F \|^2 \leq a (\| F \|^2 + \| (S \otimes T) F \|^2) \qquad \text{для} \ \forall F \in D . \tag{4.15}$$

Произвольный вектор $F \in \mathfrak{L}(D(S), D(T))$ имеет вид

$$F = \sum_{p=1}^{N} f_p \otimes g_p , \qquad \text{где} \quad f_p \in D(S), \quad g_p \in D(T).$$

Тогда $$\|(S\otimes A)F\|^2 = \|\sum_{p=1}^{N}(S\otimes A)(f_p \otimes g_p)\|^2 =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{N}(Sf_p, Sf_q)(Ag_p, Ag_q).$$

Матрица $[(Sf_p, Sf_q)]_{p,q=1,..,N}$ положительно определена, поэтому она представима в виде

$$(Sf_p, Sf_q) = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2 \cdot \bar{U}_{pk}\, U_{qk}, \qquad \text{так что}$$

$$\|(S\otimes A)F\|^2 = \sum_{p,q,k=1}^{N}\lambda_k^2\, \bar{U}_{pk}\, U_{qk}(Ag_p, Ag_q) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2 \|A\sum_{q=1}^{N}U_{qk}g_q\|^2 \le a\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2\|T\sum_{q=1}^{N}U_{qk}g_q\|^2 =$$

$$= a\sum_{p,q,k=1}^{N}\lambda_k^2\,\bar{U}_{pk}\,U_{qk}(Tg_p, Tg_q) = a\,\|(S\otimes T)F\|^2 \le$$

$$\le a\,(\|F\|^2 + \|(S\otimes T)F\|^2).$$

Доказано (4.15).

Включение (4.12) при выполнении одного из условий а), б) доказывается с помощью незначительных изменений.

(Из леммы 2, в частности, следует, что тензорное произведение непрерывных операторов S и A – непрерывный оператор: достаточно взять в (4.12) $B=0$; $D(S\otimes A) \supset D(S\otimes 0) = H' \otimes H$; см. /8/).

3. Симметричное (тензорное) произведение операторов

H – гильбертово пространство функций $f(p)$, квадратично суммируемых по мере $d\mu(p)$; $H^{\vee n}$ – n – ая симметричная степень пространства; H — гильбертово пространство симметричных функций $f^{(n)}(p_1,...,p_n)$, квадратично интегрируемых по мере $d\mu(p_1)...d\mu(p_n)$ /9/.

Тензорное произведение $H^{\vee m}\otimes H^{\vee n}$ можно реализовать функциями $\phi^{(m,n)}(p_1,\dots,p_m;\ p_{m+1},\dots,p_{m+n})$, симметричными по $p_1,\dots,p_m$ и по $p_{m+1},\dots,p_{m+n}$, квадратично суммируемыми по мере $d\mu(p_1)\dots d\mu(p_{m+n})$.

Ниже символами типа $A^{(m,n)}$ мы будем обозначать замкнутые (или допускающие замыкание) операторы с плотными областями определения $D(A^{(m,n)}) \subset H^{Vn}$ и областями значений $R(A^{(m,n)}) \subset H^{Vm}$.

Как следует из п.2 дополнения, выражение $A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)}$ определяет замкнутый оператор с плотной областью определения ;

$$D(A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)}) \subset H^{Vm} \otimes H^{Vn}$$

и

$$R(A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)}) \subset H^{Vm'} \otimes H^{Vn'}.$$

Очевидно, что $H^{V(m+n)}$ и $H^{V(m'+n')}$ суть (замкнутые) подпространства соответственно в $H^{Vm} \otimes H^{Vn}$ и $H^{Vm'} \otimes H^{Vn'}$.

Определение. Симметричным произведением $A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)}$ операторов $A^{(m',m)}$ и $B^{(n',n)}$ назовем часть оператора $A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)}$, принадлежащую подпространствам $H^{V(m+n)}$ и $H^{V(m'+n')}$. (Определение части оператора дано в дополнении, п. 1).

Лемма 3. Если операторы $A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)}$ и $A^{(m',m)*} \vee B^{(n',n)*}$ имеют плотные области определения соответственно в $H^{V(m+n)}$ и $H^{V(m'+n')}$, то они допускают замыкание, причем

$$\overline{A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)}} \subset (A^{(m',m)*} \vee B^{(n',n)*})^*, \tag{4.16}$$

$$\overline{A^{(m',m)*} \vee B^{(n',n)*}} \subset (A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)})^*. \tag{4.17}$$

Доказательство. Мы воспользуемся утверждением (4.6). Обозначим $C = A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)}$; $X = A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)}$ – часть оператора C, принадлежащая $H^{V(m+n)}$ и $H^{V(m'+n')}$; легко видеть, что

$$C^* \equiv (A^{(m',m)} \otimes B^{(n',n)})^* \supset A^{(m',m)*} \otimes B^{(n',n)*}. \tag{4.18}$$

(Это следует из того, что оба оператора замкнуты, совпадают в

$$D = \mathfrak{L}(D(A^{(m',m)*}),\ D(B^{(n',n)*})),$$

и, по определению тензорного произведения,

$$A^{(m',m)*} \otimes B^{(n',n)} = \overline{A^{(m',m)*} \otimes B^{(n',n)*}|_D}\ .$$

Из включения (4.18) следует включение для частей этих операторов, принадлежащих $H^{V(m'+n')}$ и $H^{V(m+n)}$:

$$Y \supset A^{(m',m)*} \vee B^{(n',n)*}.$$

По условию правый оператор этого включения, а, значит, и Y, имеет плотную область определения. Из (4.6) следует, что X допускает замыкание, и (4.16):

$$\bar{X} = \overline{A^{(m',m)} \vee B^{(n',n)}} \subset Y^* \subset (A^{(m',m)*} \vee B^{(n',n)*})^*.$$

Точно так же получается (4.17). Из леммы 2 дополнения непосредственно следует

Теорема. Пусть $A^{(m,n)}$, $B^{(m',n)}$, $S^{(k,\ell)}$ – замкнутые операторы с плотными областями определения соответственно в H^{Vn}, H^{Vn}, $H^{V\ell}$ и со значениями соответственно в H^{Vm}, $H^{Vm'}$, H^{Vk}, причём

$$D(A^{(m,n)}) \supset D(B^{(m',n)}).$$

Предположим дополнительно, что $S^{(k,\ell)}$ непрерывен. Тогда

$$D(S^{(k,\ell)} \vee A^{(m,n)}) \supset D(S^{(k,\ell)} \vee B^{(m',n)}).$$

(Заметим, что теорема остается справедливой, если вместо замкнутого оператора $A^{(m,n)}$ взять допускающий замыкание $A^{(m,n)}$).

4. В заключение приведем пример, который показывает, что для ограниченных операторов повторный ряд (1.8), соответствующий разложению (1.2), (1.3), вообще говоря, не сходится на финитных векторах Φ.

В качестве пространства H одночастичных состояний выберем одномерное унитарное пространство. (Для того чтобы воспользоваться формулами § 1, следует в качестве μ взять меру, сосредоточенную в одной точке множества $\{p\}$). Некоторому единичному вектору $f \in H$ сопоставим операторы $a^+ = a^+(f)$ и $a^- = a^-(f)$. В пространстве $\mathcal{H}$

состояний бозе-частиц векторы $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^n|0\rangle$ являются ортонормированным базисом. Ограниченный оператор C зададим матричными элементами:

$$\langle m|C|n\rangle = (m!\,n!)^{1/2}\, C^{(m,n)} = U_m \cdot \delta_{n,0}\ ,$$

где последовательность u_m такова, что

$$\sum_m |u_m|^2 < \infty\ , \qquad \{\sqrt{m}\ u_m\}_0^\infty\ -$$

не ограничена (например, $u_m = \sum_{k=1}^{\infty} m^{-1/4}\delta_{m,\,k^8}$).

Из (1.2), (1.3), (1.4) находим разложение для C ,

$$C = \sum_{m,n=0}^{\infty} A^{(m,n)}(a^+)^m\,(a^-)^n\ ,$$

где

$$A^{(m,n)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^s}{s!}\, C^{(m-s,n-s)} = \sum_{s=0}^{\min(m,n)} [(m-s)!]^{-1/2}\, \frac{(-1)^s}{s!}\, u_{m-s}\,\delta_{n-s,0}\ .$$

Покажем, что ни при каком $k > 0$ не существует предел последовательности

$$C_N|k\rangle = \sum_{m=0}^{N}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} A^{(m,n)}(a^+)^m(a^-)^n|k\rangle\Big)$$

при $N \to \infty$ ни в сильном, ни в слабом смысле. При $N > k$

$$\|C_N|k\rangle\| \ge |\langle N+k|C_N|k\rangle| =$$

$$= \Big|\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{k} A^{(m,n)} \langle N+k|(a^+)^m(a^-)^n|k\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{k} A^{(m,n)}[(N+k)!\,k!]^{-1/2}\langle 0|(a^-)^{M+k}(a^+)^m(a^-)^n(a^+)^k|0\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{k} A^{(m,n)}[(N+k)!\,k!]^{-1/2}(N+k)!\,k!\,[(k-n)!]^{-1}\cdot\delta_{N+k+n,\,k+n}\Big| =$$

(равенство $N+n=m$ возможно лишь при $m=N$, $n=0$)

$$= \Big|A^{(N,0)}\Big[\frac{(N+k)!}{k!}\Big]^{1/2}\Big| = \Big[\frac{(N+k)!}{N!\,k!}\Big]^{1/2}|u_N| \ge \frac{N^{k/2}}{\sqrt{k!}}\,|u_N|\ ,$$

– не ограничено при $N \to \infty$.

Литература

1. *Ф.А.Березин. Об операторах в представлении вторичного квантования ДАН, 154, 1063, 1964.*
2. *Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования, "Наука", 1965.*
3. *Н.Данфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы, т. 2, "Мир", 1966.*
4. *Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман. Теория линейных операторов в гильбартовом пространстве, "Наука" , 1965.*
5. *F.G. Murray, J. von Neumann, Ann. of Math., (2), 37, 116, 1936.*
6. *R. Jost. The General Theory of Quantized Fields, Amer. Math. Soc. Publications, 1965.* x/
7. *L. Streit. Nuovo Cim., 34, 198, 1964.*
8. *М.А.Наймарк, Изв. АН СССР, сер. мат., № 1, 53. 1939.*
9. *D. Kastler, Introduction à l' électrodynamique quantique, Paris, Dunod, 1961.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1968 года.

x/ *Примечание при корректуре.*
В издательстве "Мир" вышел перевод: Р.Йост, Общая теория квантованных полей, М., 1967.