ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3731

А.В.Ефремов

МОДЕЛЬ ПОЛЕЙ ЛИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3731

А.В.Ефремов

МОДЕЛЬ ПОЛЕЙ ЛИ

Введение

Известно, что самый острый вопрос аксиоматической теории поля - вопрос о ее нетривиальности. Многочисленные попытки построения моделей привели пока лишь к ряду условий на поля и их коммутаторы несовместимых с нетривиальной S-матрицей (см., например, [1] или [2]). Одной из таких попыток была попытка Гринберга [3] и Лопушаньского [4], которые к обычным постулатам аксиоматической теории добавили соотношение

$$[A(x), A(y)] = \Delta(x-y) + \int b(x,y,z) A(z) dz \tag{I}$$

которое в p-пространстве с учетом трансляционной инвариантности (приводящей с $b(x,y,z) = b(x-z, y-z)$) приобретает более простой вид:

$$[A(p), A(q)] = \Delta(p)\delta(p+q) + b(q,p)A(p+q).$$

Вскоре после этого Робинсоном [5] на основании тождества Якоби для функции $b(p,q)$ и слабой локальности была показана ее тривиальность. Однако существенным пунктом этого доказательства было использование скалярного характера поля A. Например, для векторных полей $A_i(p)$ нетрудно проверить, что функция

$$b_{ij}^{l}(p,q) = \delta_i^l p_j - \delta_j^l q_i$$

удовлетворяет как тождеству Якоби, так и условию локальности. Однако такая функция b_{ij}^{l} противоречит условию спектральности. Последнее условие, совместно с тождеством Якоби, оказывается настолько мощным, что вообще исключает всякую возможность рассеяния частиц в моделях типа (I).

2. Отсутствие рассеяния

Действительно, пусть $A(x), B(x), C(x)$ и т.д.-набор неприводимых бозе-полей любой тензорной и "изотопической" природы, коммутатор которых равен

$$[A(p), B(q)] = \Delta_{AB}(p)\delta(p+q) + b^{C}_{AB}(p,q)\, C(p+q). \qquad (2)$$

Ясно, что для непротиворечивого задания такого вида коммутатор функции Δ_{AB} и b^{C}_{AB} должны удовлетворять тождествам Якоби:

$$\left[b^{C}_{AB}\binom{p+q}{p,q} b^{E}_{C\mathcal{D}}\binom{\ell}{p+q,\,k} + \text{цикл. пер. } A,p;\ B,q;\ \mathcal{D},k \right] \delta(p+q+k-\ell) = 0 \qquad (3)$$

$$\left[b^{C}_{AB}\binom{p+q}{p,q} \Delta_{C\mathcal{D}}(k) + \text{цикл. пер. } A,p;\ B,q;\ \mathcal{D},k \right] \delta(p+q+k) = 0 \qquad (4)$$

и условию антисимметрии при перестановке полей, т.е.

$$b^{C}_{AB}(p,q) = -\, b^{C}_{BA}(q,p) \qquad (5)$$

$$\Delta_{AB}(p) = -\Delta_{BA}(-p). \qquad (6)$$

Для того чтобы найти ограничения на $b(p,q)$, налагаемые условием спектральности, достаточно связать $b(p,q)$

функциями Вайтмана и воспользоваться результатами ограничений [1,2], налагаемых на них этим условием. Это приводит нас к заключению, что

$$\text{при } (p+q)^2>0 \quad b^{C}_{AB}\binom{p+q}{p,q} \neq 0 \quad \text{только когда либо } p^2>0, \text{ либо } q^2>0. \qquad (7)$$

Но условие спектральности не дает никаких ограничений на b при пространственно-подобном $p+q$. Таким образом, $b(p,q)$ может быть записано в виде

$$b^{E}_{AB}\binom{p+q}{p\,q} = \chi\binom{1}{1\,\cdot}\, c^{E}_{AB}(p,q) + \chi\binom{1}{\cdot\,1}\bar{c} + \chi\binom{2}{2\,\cdot} d + \chi\binom{2}{\cdot\,2}\bar{d} + \chi\binom{3}{1\,3} e + \chi\binom{3}{3\,1}\bar{e} + \chi\binom{3}{2\,3} f + \chi\binom{3}{3\,2}\bar{f} + \chi\binom{3}{1\,2} g + \chi\binom{3}{2\,1}\bar{g} + h\,\chi\binom{3}{3\,3}, \qquad (8)$$

где $\chi\binom{K}{I\,J}$-характеристическая функция, равная I только тогда, когда $p\in I$, $q \in J$, $p+q\in K$ (I, J, K равны I,2,3, причем область $I=1$ означает верхнюю полу, $I=2$ - нижнюю полу, а $I=3$ - внешность светового конуса) и равные нулю в остальных случаях, а $c, \bar{c}, d, \bar{d}$ и др. - некоторые функции импульсов p и q. Кроме того из соотношения (5) следует, что

$$\bar{c}^{E}_{AB}(p,q) = -\, c^{E}_{BA}(q,p), \quad \bar{d}^{E}_{AB}(p,q) = -\, d^{E}_{BA}(q,p) \qquad (9)$$
$$\text{и т.д.}$$

Условия спектральности и антисимметрии (6) для функции приводят к следующему ее виду

$$\Delta_{AB}(p) = \chi(1)\gamma_{AB}(p) + \chi(2)\bar{\gamma}_{AB}(p), \qquad (10)$$

где

$$\bar{\gamma}_{AB}(p) = -\gamma_{BA}(-p).$$

Переходя теперь к совместности условий (7) и (3), заметим предварительно, что для доказательства равенства нулю вакуумного ожидания тройного и высших коммутаторов достаточно доказать равенство нулю произведения

$$b^{C}_{AB}(p,q)\, b^{E}_{CD}(p+q,k)\, \Delta_{EF}(-p-q-k).$$

Поэтому в тождестве (3) достаточно рассмотреть только случай $\ell^2 > 0$. Самым важным для нас следствием локальности является отсутствие в (8) слагаемого с $\chi\binom{1\ \text{или}\ 2}{3,3}$, т.е.

$$b\binom{1}{3,3} = b\binom{2}{3,3} = 0, \qquad (11)$$

которое в конце концов и приведет с отсутствию рассеяния. Действительно, если $p\in 3$, $q\in 3$ и $k\in 3$, то, как нетрудно проверить, равенство (3) удовлетворяется тождественно. Следовательно, хотя бы один из этих импульсов должен лежать внутри светового конуса. Пусть $p\in 1$, $q\in 3$, $k\in 3$, причем $p+q\in 3$, $k+q\in 3$, $k+p\in 3$

(т.е. случай $\binom{133}{333}$). При этом условии тождество (3) символически можно записать следующим образом: (для простоты записи мы опускаем символ b с индексами)

$$\binom{3}{13}\binom{L}{33} + \binom{3}{33}\binom{L}{31} + \binom{3}{31}\binom{L}{33} = 0.$$

Первое и последнее слагаемое в этом равенстве равны нулю в силу (11), а второе дает (при $L=1$)

$$h^{E}_{AB}(q,k)\, c^{F}_{ED}(q+k,p) = 0.$$

Если же $p\in 2$ (т.е. случай $\binom{233}{333}$), то это приводит к

$$h\bar{d} = 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию $\binom{133}{113}$.
Тождество Якоби для нее имеет вид

$$\binom{1}{13}\binom{1}{13} + \binom{1}{33}\binom{1}{11} + \binom{3}{31}\binom{1}{33} = 0.$$

Второе и третье слагаемые равны нулю из (11), а первое дает

$$c\,c = 0$$

и, следовательно, (из (9)) и

$$\bar{c}\,c = 0.$$

Точно такой же анализ случаев

$$\binom{233}{223}, \binom{123}{321}, \binom{123}{323}, \binom{123}{121}, \binom{123}{131}$$

$$\binom{112}{121}, \binom{112}{123}, \binom{221}{212}, \binom{221}{313}, \binom{113}{131} \text{ и } \binom{223}{232}$$

приводит соответственно к тому, что

$$d d = \bar{d} d = 0,\ c d = \bar{c} d = 0,\ e d = \bar{e} d = 0,\ d\bar{c} = d\bar{c} = 0$$

$$f\bar{c} = \bar{f}\bar{c} = 0,\ \bar{c}\bar{c} = c\bar{c} = 0,\ g\bar{c} = \bar{g}\bar{c} = 0,\ d\bar{d} = \bar{d}\bar{d} = 0$$

$$\bar{g}\bar{d} = g\bar{d} = 0 \quad e\bar{c} = \bar{e}\bar{c} = 0 \quad \text{и} \quad f\bar{d} = \bar{f}\bar{d} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$\langle [[[A(p), B(q)], C(k)], D(l)] \rangle_0 = b^{E}_{AB}(p,q)\, b^{F}_{EC}(p+q,k)\, \Delta_{FD}(l)\, \delta(p+q+k+l) = 0. \tag{I2}$$

Следовательно, равны нулю и все высшие коммутаторы, поскольку они выражаются через произведения $b(p,q)$ типа (I2), причем последние три сомножителя имеют в точности вид (I2).

Однако на этом основании мы еще не имеем права делать заключение о тривиальности модели, поскольку вакуумное ожидание двойного коммутатора $b^{C}_{AB}(p,q)\Delta_{CD}(-p-q)$ пока еще не обратилось в нуль.

Посмотрим, какое условие на эту величину дает тождество (4) с учетом спектральности (I0). Пусть $p \in 1,\ q \in 3,\ p+q \in 1$ (случай(I,3,I)). Тогда символически

$$\binom{1}{13}(2) + \binom{2}{32}(1) + \binom{3}{21}(3) = 0.$$

Третье слагаемое равно нулю в силу (I0), а первые два дают

$$c^{E}_{AB}(p,q)\,\bar{\gamma}_{EF}(-p-q) + d^{E}_{BF}(q,-p-q)\,\gamma_{EA}(p) = 0. \tag{I3}$$

Случай же (2,3,2) приводит к уравнению

$$d^{E}_{AB}(p,q)\,\gamma_{EF}(-p-q) + \bar{c}^{E}_{BF}(q,-p-q)\,\bar{\gamma}_{EA}(p) = 0, \tag{I4}$$

которое следует из (I3) и (9). Остальные случаи, как нетрудно проверить, автоматически удовлетворяются в силу (I3) и (I4). Таким образом, на данном этапе мы не можем обратить в нуль двойной коммутатор полей. Дальнейшее рассмотрение общего случая представляется нам затруднительным, поэтому для выяснения механизма действия уравнения (I3) обратимся к частному случаю векторных полей.

3. Векторные поля

Как уже говорилось выше, для скалярных полей не удается построить модели, отличной от обобщенных свободных полей, когда двойной коммутатор полей тождественно обращается в нуль [5]. Однако для векторных полей такая возможность, вообще говоря, не закрыта. Нетрудно проверить, например, что

$$b^{k}_{ij}(p,q) = \rho(p,q)\, p_i q_j \left[q(p+q) p_k - p(p+q) q_k \right] \tag{I4}$$

автоматически удовлетворяет условию (3), поскольку

$$b^{l}_{ij}(p,q)\, b^{m}_{ln}(p+q,k) = 0. \tag{I5}$$

(на самом деле можно показать, что такое b_{ij}^{κ} является единственным решением, удовлетворяющим одновременно (I3)). Условие же (I3) с учетом CPT-инвариантности

$$b_{ij}^{\kappa}(-p,-q) = b_{ij}^{\kappa}(p,q)$$

разложений типа (8) и (I0) условия (9) и тензорного свойства C_{ij}^{κ} и $\gamma_{\kappa e}$

$$C_{ij}^{\kappa}(-p,-q) = -C_{ij}^{\kappa}(p,q);\ \gamma_{\kappa e}(-p) = \gamma_{\kappa e}(p)$$

приводит к связям

$$C_{ij}^{\kappa}(p,q) = -d_{ij}^{\kappa}(p,q) \qquad (I5)$$

и замене равенства (I3) на

$$C_{ij}^{k}(p,q)\,\gamma_{\kappa e}(-p-q) = C_{ej}^{\kappa}(-p-q,\,q)\,\gamma_{\kappa i}(p). \qquad (I7)$$

Подставляя сюда выражение (I4) мы находим, что $\rho(p,q)$ должно иметь вид

$$\rho(p,q) = \delta(p^2)\varepsilon(p_0)\,U(q^2,(p+q)^2) + \delta(q^2)\varepsilon(q_0)\,U(p^2,(p+q)^2), \qquad (I8)$$

а

$$\Delta_{ij}(p) = a\,\delta_{ij}\,\delta(p^2)\varepsilon(p_0) + p_i p_j \beta(p), \qquad (I9)$$

где $\qquad U(q^2,0) \neq 0.$

Посмотрим теперь, какие ограничения накладывает на требование локальности. Необходимым и достаточным условием того, что

$$\tilde{\rho}(x,y) = \int e^{ipx+iqy}\rho(p,q) = 0 \quad \text{при} \quad x \sim y$$

является представление вида.[6]

$$\rho(p,q) = \int d^4u \int ds\, \varepsilon(p_0-q_0-u_0)\,\delta((p-q-u)^2-s)\,\Psi(u,s,p+q). \qquad (20)$$

Для получения же (I7) достаточно, чтобы

$$\Psi(u,s,p+q) = \varphi((p+q)^2)\,\delta(s)\big(\delta(u+p+q)-\delta(u-p-q)\big), \qquad (21)$$

т.е. $U(q^2,(p+q)^2)$ не зависело от первого аргумента. Это условие роковым образом сказывается на тривиальности S- матрицы. Действительно, вакуумное ожидание двойного коммутатора приобретает теперь вид

$$\langle[[A_i(p),A_j(q)],A_\kappa(-p-q)]\rangle_0 \sim \big(\mathcal{D}(p^2)-\mathcal{D}(q^2)\big)\mathcal{D}((p+q)^2)\,p_i q_j (p+q)_\kappa, \qquad (22)$$

а фурье-образ запаздывающей функции (см., напр., [7])

$$r_{ije}(p;q,\kappa) = \qquad (23)$$

$$= \left[\mathcal{D}^r(p)\mathcal{D}^r(-\kappa) + \mathcal{D}^r(-q)\mathcal{D}^r(-\kappa) + \mathcal{D}^r(p)\mathcal{D}^r(-q)\right]\delta(p+q+\kappa),$$

где $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^r$- перестановочная и запаздывающая функции частиц с нулевой массой . Пользуясь теперь обычным приемом [7] можно найти причинную функцию "трехвостки"

$$\tau_{ije}(p,q,\kappa) = \langle T(A(p)A(q)A(\kappa))\rangle_0 = \qquad (24)$$

$$= \frac{p_i q_j \kappa_e (p^2+q^2+\kappa^2)}{(p^2+i\varepsilon)(q^2+i\varepsilon)(\kappa^2+i\varepsilon)}\,\delta(p+q+\kappa).$$

Из этого выражения ясно, что матричный элемент распада на массовой поверхности

$$\lim_{p^2,q^2,k^2\to 0} q^2\cdot p^2\cdot k^2\, \tau_{ije}(p,q,k)=0 \quad \text{т.е.} \quad S=1.$$

4. Заключение

Итак, модель векторных полей Ли оказалась тривиальной, хотя и вменьшей степени, чем модель обобщенных свободных полей, в том смысле, что вершинная функция вне массовой поверхности для нее не равна нулю. Вполне может случиться, хотя и маловероятно, что это свойство специфично только для векторной модели и что можно найти пример других полей, для которых физический распад не запрещен. Однако, несмотря на это, в любой модели полей Ли рассеяние, а, следовательно, и рождение частиц, как показано в разделе 2, несовместимо с постулатом спектральности. В этом смысле такая модель не представляет физического интереса.

Следующим шагом должно быть усложнение модели. На этом пути, нам кажется, наибольший интерес представляют следующие две возможности.

I) Модель с двойным коммутатором типа

$$[[A(x),A(y)],A(z)] = \int b(x,y,z,\xi)A(\xi)\,d\xi ,$$

в дополнение к которому задано вакуумное ожидание от коммутатора $\langle [A(x),A(y)]\rangle_0=\Delta(x-y)$ и $\langle A(x)\rangle_0=0$.

Так же как и модель Ли-полей она разрешима. Однако, в отличие от Ли-полей, тождество Якоби здесь линейно и вместе с условием спектральности приводит только к некоторой дополнительной симметрии функции b при перестановке ее аргументов.

2) Более сложна модель с квадратичной зависимостью коммутатора от полей

$$[A(x),A(y)]=\Delta(x-y)+\int b(x,y,\xi)A(\xi)\,d\xi+\int C(x,y,\xi,\zeta)\{A(\xi),A(\zeta)\}\,d\xi\, d\zeta ,$$

т.к. коммутационные соотношения в р-пространстве не будут уже чисто алгебраическими.

В заключение мне хочется выразить глубокую благодарность И.Т.Тодорову за многочисленные плодотворные дискуссии в процессе работы, а также Н.Н.Ачасову, И.Ф.Гинзбургу и В.Г.Сербо за обсуждение результатов.

Литература

I.Р.Иост. Общая теория квантованных полей, изд.МИР,1967.

2.И.Т.Тодоров,Международная зимняя школа Теор. физ. при ОИЯИ, 1964. том I.

3. O.W.Greenberg, Ann.of Phys. 16, 158 (1961).

4. I.T.Lopuszanski, Phys.Leyy. 8 (1964) 85.

5. D.W.Robinson, Phys.Lett. 9 (1964) 189.

6. F.J.Dyson, Phys.Rev. 110, 1460 (1958) (см.перевод ПСФ №I(1959)

7.С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, 1963, гл.I8.