ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3727

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К.Волков

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1968

P2 - 3727

М.К.Волков

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в Annals of Physics

## 1. Введение

До недавнего времени в физике элементарных частиц существовало мнение, что теории с неперенормируемыми взаимодействиями относятся к разряду нелокальных теорий (см., например[1]). Однако последние исследования[2-7] показали, что существует большой класс таких неперенормируемых взаимодействий, которые могут быть описаны в рамках локальных теорий. Заметим при этом, что конкретная формулировка принципа локальности теории может быть дана различными способами, но всегда тесно связана с теми пространствами обобщенных и основных функций, на которых строится изучаемая теория.

При изучении перенормируемых взаимодействий требуется рассматривать пространство обобщенных функций умеренного роста. Для описания неперенормируемых взаимодействий необходимо работать с совершенно иным пространством обобщенных функций. Соответственно меняется и пространство основных функций.

Детальными исследованиями, посвященными формулировке неперенормируемых теорий на новом пространстве обобщенных и основных функций занимались Джаффе, Мейман, Гюттингер, Ефимов[2-6]. Не разбирая здесь подробно их работ , мы лишь укажем, что все они характеризуются прежде всего выходом за рамки пространства обобщенных функций умеренного роста, определенных на пространстве основных функций $S$ (пространство Шварца[1,8-10]). В нашей работе мы используем то определение условия локальности, которое дано в[3-6]. В определении условия локальности Джаффе несколько отличается от остальных авторов.

Вместо пространства основных функций $S$, которое использовалось в перенормируемых теориях, рассматривается пространство $Z$ аналитических функций, на котором определяются функционалы быстрого роста, характерные для неперенормируемых взаимодействий. Исследуется функция Грина скалярных частиц, которую, как и амплитуду рассеяния, в неперенормируемых теориях поля можно записать в виде:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n [\Delta^{\circ}(x)]^n , \tag{1.1}$$

где $\Delta^{\circ}(x)$ – причинная функция Грина свободного скалярного поля. Функция, подобная (1.1), изучалась, например, в работах /4,5,11/

Условие локальности теории по (3-6) приводит к следующим требованиям на коэффициенты ряда (1.1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = 0 . \tag{1.2}$$

Исходя из этого условия локальности, мы будем в дальнейшем устанавливать границу между локальными и нелокальными взаимодействиями.

В работе построен фурье-образ выражения (1.1). Иными словами, определено значение обобщенной функции (1.1) на функции $e^{ipx}$, принадлежащей пространству основных функций $Z$. Предварительно для (1.1) находится такое интегральное представление, которое позволяет без особого труда переходить к импульсному пространству.

Изучаются как локальные, так и нелокальные неперенормируемые взаимодействия. Исследуется вопрос, связанный с неоднозначностью предлагаемой процедуры. Выяснено, что при нелокальных взаимодействиях можно построить фурье-образ либо однозначно, либо с точностью до одного произвольного параметра. Среди локальных взаимодействий найден довольно широкий класс таких, которые допускают однозначный переход от конфигурационного к импульсному пространству.

Разработанный здесь метод применим к большому числу теорий, описывающих неперенормируемые взаимодействия /12-20/.



## 2. Нелокальные неперенормируемые взаимодействия

Запишем двухточечную функцию Грина в форме

$$\Phi_m(x) = i \sum_{2}^{\infty} C(n) [i \Delta^{\circ}_m(x)]^n . \tag{2.1}$$

Нашей основной задачей будет построение преобразования Фурье этого выражения. Член с $n=1$ не рассматриваем, поскольку его фурье-образ находится без труда.

Поскольку рассматривается нелокальное взаимодействие, коэффициенты $C(n)$ подчиняются условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-b} |C(n)|^{1/n} = A , \tag{2.2}$$

где $A$ есть некоторая константа, отличная от нуля, а $b$ подчиняется условию $2 > b \geq 0$. Это взаимодействия, для которых можно ввести понятие "элементарной длины $\ell$" /6/.

Вместо (2.2) мы потребуем выполнения даже более сильного условия. А именно: целая функция $f(z)$, представимая степенным рядом

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{C(n)}{(2n)!} z^n , \tag{2.3}$$

должна быть ограничена в некотором секторе $|\phi| \leq \epsilon$, $\epsilon \geq 0$, $z = r e^{i\phi}$. Назовем это требование условием (2.3). Ниже будет показано, что из (2.3) следует условие (2.2).

Для $[i \Delta^{\circ}_m(x)]^n$ имеет место следующее интегральное представление через фазовый объем $\Omega^{(m)}_n(\mu^2)$ $n$ – скалярных частиц /21/

$$[i \Delta^{\circ}_m(x)]^n = \frac{i}{2} \left(-\frac{1}{16\pi^3}\right)^{n-1} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\mu^2 \, \Omega^{(m)}_n(\mu^2) \Delta^{\circ}_{\mu}(x). \tag{2.4}$$

Для случая безмассовых частиц равенство (2.4) выглядит особенно просто

$$\lambda^{-n} = \frac{2\pi i (-1)^n}{4^n \Gamma(n) \Gamma(n-1)} \int_0^{\infty} d\mu^2 (\mu^2)^{n-1} \frac{H^{(2)}_1(\mu\sqrt{\lambda})}{\mu\sqrt{\lambda}} . \tag{2.5}$$

Здесь $H_1^{(2)}(\mu\sqrt{\lambda})$ – функция Ганкеля, $\Gamma(n)$ – гамма-функция, $\lambda = x^2 - i\delta$. ( $\delta$ – бесконечно малая положительная величина). В дальнейшем будет рассмотрен именно этот случай.

Выражение (2.1) с учётом (2.4), приводится к виду

$$\Phi_m(x) = -\frac{1}{2}\sum_1^\infty \left(\frac{-1}{16\pi^3}\right)^n C(n+1) \int\limits_{[(n+1)m]^2}^{\infty} d\mu^2\, \Omega_{n+1}^{(m)}(\mu^2)\, \Delta_\mu^\circ(x) \tag{2.6}$$

или, при $m = 0$,

$$\Phi_0(x) = -\sum_1^\infty \left(-\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{C(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{(\mu^2)^{1-n}} \Delta_\mu^\circ(x). \tag{2.7}$$

Чтобы преобразование Фурье функции $\Phi_0(x)$ имело смысл, введем обрезание по $\mu^2$ массой $M^2 < \infty$

$$\Phi_{0\,\text{рег}}(x) = -\sum_1^\infty (-1)^n \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} F(n, \mu^2)\, \Delta_\mu^\circ(x), \tag{2.8}$$

где

$$F(n, \mu^2) = \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2n} \frac{C(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}. \tag{2.9}$$

Теперь поставим перед собой задачу: по значениям $F(n, \mu^2)$ в заданной последовательности точек $n = 1, 2, 3, \ldots$ восстановить аналитическую функцию, регулярную в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и подчиняющуюся условиям $(z = x + iy)$

а) $|F(z, \mu^2)| < Be^{\Lambda|z|}$ $(\operatorname{Re} z \geq 0)$, $F(x, \mu^2) \to 0$ $(x \to \infty)$ (2.10)

б) $|F(iy, \mu^2)| < Be^{(\pi-\epsilon)|y|}$ $(-\infty < y < \infty,\ \epsilon > 0)$. (2.11)

Если такая функция будет построена, то $\Phi_{0\,\text{рег}}(x)$ можно представить в виде



$$\Phi_{0\,\text{рег}}(x) = \frac{i}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} F(z, \mu^2)\, \Delta_\mu^\circ(x) \quad (0 < a < 1). \tag{2.12}$$

Это представление оказывается весьма удобным для построения фурье-образа функции $\Phi_0(x)$.

Существуют различные методы построения целой функции по ее значениям в заданной последовательности точек /22/. Условия (2.10) и (2.11) достаточны для однозначного восстановления такой функции. Мы выбираем метод, основанный на следующей теореме /22/:

Теорема 1

Пусть $n$ – последовательность натуральных чисел, а $F(z, \mu^2)$ удовлетворяет условиям (2.10) и (2.11). Тогда, при достаточно большом $q$ функция $F(z, \mu^2)$ может быть представлена в виде

$$F(z, \mu^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}\left\{\int_{-q}^{\infty} P_\mu(x) e^{-zx} dx + e^{qx} \sum_1^\infty (-1)^n n F(n, \mu^2) \frac{e^{-qn}}{z - n}\right\}, \tag{2.13}$$

где $P_\mu(z)$ – аналитическая функция, представляемая в достаточно далекой полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$ рядом Дирихле

$$P_\mu(z) = \sum_1^\infty (-1)^n n F(n, \mu^2) e^{nz}. \tag{2.14}$$

Функцию $F(z, \mu^2)$, однозначно восстановленную по значениям $F(n, \mu^2)$ с помощью теоремы 1, запишем в виде:

$$F(z, \mu^2) = \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2z} \frac{C(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)}, \tag{2.9'}$$

где функция $C(z+1)$ в целочисленных точках на реальной положительной оси принимает значения $C(n+1)$.

Условия, при которых справедлива теорема 1, налагают определенные ограничения на коэффициенты $C(n)$. Найдем их.

Сходимость ряда Дирихле в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z < a$ вполне обеспечивается условием (2.2) при любом положительном $a$.

Другим важным требованием, при котором справедлива формула (2.13), является условие, чтобы сумма ряда Дирихле (2.14) аналитически продолжалась в полосу $|\mathrm{Im}\, z| < \epsilon$ и была ограничена в ней. Это условие тесно связано с условием (2.11). Посмотрим, какие ограничения оно налагает на коэффициенты $C(n)$.

Сопоставим с рядом Дирихле (2.14) степенной ряд, который получается из него заменой переменных $v = e^z$

$$\tilde{\tilde{P}}_\mu(v) = \sum_1^\infty (-1)^n\, n F(n, \mu^2)\, v^n . \qquad (2.15)$$

Тогда условие ограниченности ряда Дирихле (2.14) в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < \epsilon$ аналогично условию ограниченности степенного ряда (2.15) в секторе $|\phi| < \epsilon$ $(v = re^{i\phi})$. Из теории целых функций известно следующее (теоремы Фрагмена-Ленделефа): чтобы целая функция была ограничена в некотором секторе, необходимо, чтобы порядок ее роста удовлетворял условию $\rho \geq 1/2$ (при $\rho = 1/2$ сектор переходит в луч).

Теперь для получения условия на $C(n)$ достаточно воспользоваться теоремой 2 /22/.

Теорема 2

Пусть $\tilde{\tilde{P}}(v) = \sum_0^\infty d_n v^n$. Если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \ln M_{\tilde{\tilde{P}}}(r) = \sigma , \qquad (2.16)$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/\rho}\, |d_n|^{1/n} = (e\sigma\rho)^{1/\rho} \qquad (2.17)$$



и, наоборот, из (2.17) следует (2.16). $(M_{\tilde{\tilde{P}}}(r) = \max|\tilde{\tilde{P}}(v)|)$.

Равенство (2.17) в применении к (2.15) дает следующее соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{2-b}\, |n F(n, \mu^2)|^{1/n} = \left(\frac{\sigma e}{2}\right)^2, \qquad (2.18)$$

где $2 > b \geq 0$, что следует из условия $\rho \geq 1/2$. Отсюда, для коэффициентов $C(n)$ получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-b}\, |C(n)|^{1/n} = \left(2\pi \frac{\sigma}{\mu}\right)^2 . \qquad (2.19)$$

Сравнивая полученное равенство с (2.2) и (2.3), мы видим, что для рассматриваемых нами теорий с нелокальными взаимодействиями функция $F(z, \mu^2)$ однозначно восстанавливается по своим значениям в целочисленных точках на реальной положительной оси.

Используя вид функции $F(z, \mu^2)$, приведенный в (2.9)', запишем $\Phi_{0\,\mathrm{рег}}(x)$ в форме:

$$\Phi_{0\,\mathrm{рег}}(x) = \frac{i}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\, \frac{(4\pi)^{-2z} C(z+1)}{\sin \pi z\, \Gamma(z)\, \Gamma(z+1)} \int_0^{M^2} d\mu^2 (\mu^2)^{z-1}\, \Delta^0_\mu(x). \qquad (2.20)$$

Перейдем теперь к импульсному пространству. Поскольку при применении операции фурье-преобразования к (2.20) все интегралы абсолютно сходятся, то эту операцию можно относить прямо к $\Delta^0_\mu(x)$. В результате имеем:

$$\Phi_{0\,\mathrm{рег}}(p) = \frac{i}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\, \frac{(4\pi)^{-2z} C(z+1)}{\sin \pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \int_0^{M^2} d\mu^2\, \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\delta} . \qquad (2.21)$$

Массу $M^2$ можно устремить к бесконечности. Тогда выражение (2.21) можно считать спектральным представлением двухточечной функции $\Phi_0(p)$. Оно обеспечивает унитарность теории.

Интеграл по $\mu^2$ легко берется, и для $\Phi_0(p)$ получается еще одно представление в виде интеграла типа Меллина-Бернса[23]

$$\Phi_0(p) = -i\frac{\pi}{2}\frac{1}{(p^2+i\delta)}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\,\frac{e^{-i\pi z}}{\sin^2\pi z}\,\frac{\left(\frac{p^2+i\delta}{(4\pi)^2}\right)^z}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}\,C(z+1). \qquad (2.22)$$

Оставшийся интеграл сводится к сумме двукратных вычетов в целочисленных точках действительной оси. Окончательно приходим к результату:

$$\Phi_0(p) = \frac{1}{p^2+i\delta}\sum_1^\infty\left(-\frac{p^2+i\delta}{(4\pi)^2}\right)^n\frac{C(n+1)}{n!(n-1)!}\left\{\ln\left(\frac{p^2+i\delta}{(4\pi)^2}e^{-i\pi}\right)+[\ln C(n+1)]'-\Psi(n)-\Psi(n+1)\right\} \qquad (2.23)$$

$\Psi(n)$ -пси-функция Эйлера. Из полученной формулы видно, что двухточечная функция (2.1) с коэффициентами $C(n)>0$ в импульсном пространстве записывается через знакопеременный ряд. Эта функция имеет разрез в плоскости $p^2$ с точкой ветвления при $p^2=0$. Скачок на разрезе равен целой функции по $p^2$, выражающейся через знакопеременный степенной ряд.

Спектральная функция, выражающаяся знакопостоянным степенным рядом по $p^2$, соответствует функции Грина $\chi_0(x)$

$$\chi_0(x) = i\sum_2^\infty C(n)\left[-i\,\Delta_0^\circ(x)\right]^n \qquad (2.24)$$

Найдем фурье-образ этой функции. Для этой цели приведем ее к виду, подобному (2.8) для функции $\Phi_{0\,\text{рег.}}(x)$

$$\chi_{0\,\text{рег.}}(x) = \sum_1^\infty\int_0^{M^2}\frac{d\mu^2}{\mu^2}F(n,\mu^2)\,\Delta_\mu^\circ(x), \qquad (2.25)$$



где $F(n,\mu^2)$ дано в (2.9). По этим значениям можно восстановить функцию $F(z,\mu^2)$, регулярную в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и подчиняющуюся условиям (2.10) и (2.11). Поэтому для (2.25) имеет место интегральное представление

$$\chi_{0\,\text{рег.}}(x) = \frac{1}{2i}\int_L dz\,\operatorname{ctg}\pi z\int_0^{M^2}\frac{d\mu^2}{\mu^2}F(z,\mu^2)\,\Delta_\mu^\circ(x), \qquad (2.26)$$

где контур $L$ указан на рис. 1. Чтобы построить фурье-образ этой величины, необходимо предварительно контур $L$ развернуть так, чтобы он шел параллельно мнимой оси в полосе $0<\operatorname{Re} z<1$. Непосредственно в интеграле (2.26) такой операции провести нельзя. Однако можно применить промежуточную процедуру, использованную в работах[19].

Введем параметр $\gamma$ под знак синуса в знаменателе подинтегрального выражения (2.26)

$$\chi^\gamma_{0\,\text{рег.}}(x) = \frac{1}{2i}\int_L dz\,\frac{\cos\pi z}{\sin\gamma\pi z}\,\frac{(4\pi)^{-2z}C(z+1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}\int_0^{M^2}d\mu^2(\mu^2)^{z-1}\,\Delta_\mu^\circ(x). \qquad (2.27)$$

При $\gamma\to 1$ $\chi^\gamma_{0\,\text{рег.}}(x)$ переходит в $\chi_{0\,\text{рег.}}(x)$. Если же положить $\gamma\geq 2$, то контур $L$ в (2.27) можно выпрямить.

$$\chi^\gamma_{0\,\text{рег}}(x) = \frac{1}{2i}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty}dz\,\frac{\cos\pi z}{\sin\gamma\pi z}\,\frac{(4\pi)^{-2z}C(z+1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}\int_0^{M^2}d\mu^2(\mu^2)^{z-1}\Delta_\mu^\circ(x). \qquad (2.28)$$

Теперь фурье-образ находится просто, и сразу получаем спектральное представление функции $\chi^\gamma_0(p)\,(M^2\to\infty)$

$$\chi^\gamma_0(p) = \frac{1}{2i}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty}dz\,\frac{\cos\pi z}{\sin\gamma\pi z}\,\frac{(4\pi)^{-2z}C(z+1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}\int_0^\infty d\mu^2\,\frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2-p^2-i\delta} \qquad (2.29)$$

Интегрируя по переменным $\mu^2$ и $z$ и переходя к пределу $\gamma = 1$, окончательно получаем для функции Грина $\chi_0(p)$

$$\chi_0(p) = \frac{(-1)}{p^2+i\delta}\sum_1^\infty \left(\frac{p^2+i\delta}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{C(n+1)}{n!(n-1)!}\left\{\ln\left(\frac{p^2+i\delta}{(4\pi)^2}e^{-i\pi}\right)+[\ln C(n+1)]'-\Psi(n)-\Psi(n+1)\right\}. \tag{2.30}$$

Спектральная функция здесь строго положительная величина, являющаяся целой функцией от $p^2$.

Поскольку коэффициенты $C(n)$ пропорциональны константе связи $g$ в соответствующей степени, то легко видеть из (2.23) и (2.30), что функции Грина $\Phi_0(p)$ и $\chi_0(p)$ имеют логарифмические точки ветвления по $g^2$ при $g^2=0$.

### *3. Локальные неперенормируемые взаимодействия*

Рассмотрим теперь двухточечную функцию $\Phi_0(x)$, когда ее коэффициенты удовлетворяют условию локальности теории

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|C(n)|^{1/n} = 0 \tag{3.1}$$

Условие (3.1) находится в противоречии с условием (2.18). Поэтому в данном случае по значениям $F(n,\mu^2)$ нельзя однозначно восстановить аналитическую функцию, регулярную в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ и удовлетворяющую условиям (2.10) и (2.11).

Мы ограничимся изучением таких локальных взаимодействий, в которых $|C(n)|^{1/n}$ стремится к нулю, как некоторая конечная обратная степень $n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^k|C(n)|^{1/n} = A, \quad A>0, \quad k>0. \tag{3.2}$$



Это ограничение не выведет нас за рамки наиболее интересных случаев локальных неперенормируемых взаимодействий (см., например, /13-20/).

Для функции $\Phi_0(x)$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию (3.2), мы предлагаем следующую процедуру перехода к импульсному пространству.

Введем в $F(n,\mu^2)$ параметр $\gamma$

$$F_\gamma(n,\mu^2) = \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2n}\frac{C(\gamma n+1)}{\Gamma(\gamma n)\Gamma(\gamma n+1)}. \tag{3.3}$$

При $\gamma=1$ $F_\gamma(n,\mu^2)$ переходит в $F(n,\mu^2)$. Условие (2.18) в применении к $F_\gamma(n,\mu^2)$ выглядит следующим образом:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{2-b}|n F_\gamma(n,\mu^2)|^{1/n} = \left(\frac{\sigma e}{2}\right)^2 \qquad (2>b\geq 0), \tag{3.4}$$

откуда для коэффициентов $C(\gamma n)$ получаем

$$|C(\gamma n)|^{1/n} \underset{n\to\infty}{\to} n^{b+2(\gamma-1)}\left[2\pi\frac{e\sigma}{\mu}\left(\frac{\gamma}{e}\right)^\gamma\right]^2. \tag{3.5}$$

Выбирая параметр $\gamma$ так, чтобы он лежал в интервале $0<\gamma<1-b/2$, можно добиться того, что условия (3.1) и (3.4) будут удовлетворены одновременно. (Из (3.2) и (3.5) следует $\gamma = \frac{2-b}{2+k}$).

Поскольку условие (3.4) выполнено, по значениям $F_\gamma(n,\mu^2)$ можно теперь уже восстановить аналитическую функцию $F_\gamma(z,\mu^2)$, регулярную в правой полуплоскости и удовлетворяющую условиям (2.10) и (2.11). Это означает, что для суммы ряда, через который выражается функция $\Phi^\gamma_{0\,\text{рег.}}(x)$,

$$\Phi^\gamma_{0\,\text{рег}}(x) = -\sum_1^\infty(-1)^n\int_0^{M^2}\frac{d\mu^2}{\mu^2}F_\gamma(n,\mu^2)\Delta^c_\mu(x) \tag{3.6}$$

можно написать интегральное представление

$$\Phi^{\gamma}_{0\,\text{рег}}(x) = \frac{i}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz \, \frac{(4\pi)^{-2z}}{\sin \pi z} \, \frac{C(\gamma z+1)}{\Gamma(\gamma z)\Gamma(\gamma z+1)} \int_0^{M^2} d\mu^2 (\mu^2)^{z-1} \Delta^{o}_{\mu}(x) \quad (3.7)$$

Функция $\Phi^{\gamma}_{o\,\text{рег}}(x)$, представленная в форме (3.7), легко записывается в импульсном пространстве ( $M^2 \to \infty$ ) и мы сразу получаем спектральное представление для $\Phi^{\gamma}_{o}(p)$

$$\Phi^{\gamma}_{0}(p) = \frac{i}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz \, \frac{(4\pi)^{-2z} \cdot C(\gamma z+1)}{\sin \pi z \quad \Gamma(\gamma z)\Gamma(\gamma z+1)} \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\delta} \quad (3.8)$$

Интегралы по $\mu^2$ и по $z$ легко берутся. Полагая $\gamma = 1$, мы снова приходим к формуле (2.23).

Рассмотрим теперь выражение (2.24). Формулу (2.25) можно переписать так

$$\chi_{0\,\text{рег}}(x) = \sum_1^{\infty} (-1)^n \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} D(n, \mu^2) \Delta^{o}_{\mu}(x), \quad (3.9)$$

где

$$D(n, \mu^2) = \cos \pi n \, F(n, \mu^2). \quad (3.10)$$

Введем параметр $\gamma$ в $D(n, \mu^2)$

$$D_{\gamma}(n, \mu^2) = \cos \pi \gamma n \, F_{\gamma}(n, \mu^2). \quad (3.11)$$

Нетрудно убедиться, что параметр $\gamma$ можно выбрать таким образом, чтобы получить возможность восстановить функцию $F_{\gamma}(z, \mu^2)$ по $F_{\gamma}(n, \mu^2)$ и выпрямить контур в интеграле (2.26). Запишем функцию $D_{\gamma}(z, \mu^2)$ в форме



$$D_{\gamma}(z, \mu^2) = \cos \pi \gamma z \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2z} \frac{C(\gamma z+1)}{\Gamma(\gamma z)\Gamma(\gamma z+1)}. \quad (3.12)$$

Тогда для параметризованной функции $\chi^{\gamma}_{o\,\text{рег}}(x)$ можно записать следующее интегральное представление

$$\chi^{\gamma}_{0\,\text{рег}}(x) = \frac{1}{2i}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz \, \frac{\cos \pi\gamma z (4\pi)^{-2z} C(\gamma z+1)}{\sin \pi z \; \Gamma(\gamma z)\Gamma(\gamma z+1)} \int_0^{M^2} d\mu^2 (\mu^2)^{z-1} \Delta^{o}_{\mu}(x). \quad (3.13)$$

Фурье-образ $\chi^{\gamma}_{o}(x)$ имеет вид ($M^2 \to \infty$)

$$\chi^{\gamma}_{0}(p) = \frac{1}{2i}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz \, \frac{\cos \pi\gamma z (4\pi)^{-2z} C(\gamma z+1)}{\sin \pi z \; \Gamma(\gamma z)\Gamma(\gamma z+1)} \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\delta}. \quad (3.14)$$

Эту формулу можно считать спектральным представлением $\chi^{\gamma}_{0}(p)$. После взятия интегралов и перехода к пределу $\gamma = 1$, получаем выражение (2.30).

Все, что было сказано в разделе 2 относительно неаналитичности двухточечных функций по константе связи $g$, в полной мере относится и к локальным неперенормируемым теориям.

Спектральные функции в обоих случаях имеют существенно особые точки при бесконечных импульсах. Различие локальных и нелокальных взаимодействий состоит в том, что, если в первом случае спектральная функция растет на бесконечности во всей $p^2$ плоскости, то во втором случае она имеет область, зависящую от величины $b$, в которой она убывает. Для тех взаимодействий, где коэффициенты $C(n)$ выражаются степенным образом через гамма-функции, функции $\Phi_o(p)$ и $\chi_o(p)$ есть $G$-функции Майера. Их поведение в плоскости $p^2$ хорошо известно/23/.

## 4. *Проблема однозначности метода*

Введение промежуточной параметризации, необходимой при построении фурье-образов функций $\Phi_0(x)$ и $\chi_0(x)$ в локальных теориях, а для $\chi_0(x)$ и в нелокальных, влечет за собой появление определенной неоднозначности. Опишем ее на примере локальных взаимодействий.

Коэффициенты $C(n)$, через которые выражаются функции $\Phi_0(x)$ и $\chi_0(x)$, можно записать в виде

$$C'(n) = C(n) + a(n)\sin\pi n. \tag{4.1}$$

Очевидно, что $C'(n) = C(n)$ и функции $\Phi_0'(x)$ и $\chi_0'(x)$, выраженные через новые коэффициенты, не изменяются. Однако при введении параметра $\gamma$ равенство $C'(n) = C(n)$ нарушается, и, после возвращения к значению $\gamma = 1$, фурье-образы $\Phi_0'(p)$ и $\chi_0'(p)$ будут отличаться от прежних на целые функции по $p^2$, равные

$$A(p^2) = \frac{1}{p^2 + i\delta}\sum_1^\infty (-1)^n \left(\frac{p^2 + i\delta}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{a(n+1)}{n!(n-1)!} \tag{4.2}$$

для функции $\Phi_0'(p)$ и

$$B(p^2) = \frac{(-1)}{p^2 + i\delta}\sum_1^\infty \left(\frac{p^2 + i\delta}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{a(n+1)}{n!(n-1)!} \tag{4.3}$$

для функции $\chi_0'(p)$. Мнимые части $\Phi_0(p)$ и $\chi_0(p)$, а значит, и спектральные функции, определяются однозначно.

В нелокальных теориях $\Phi_0(p)$ определяется однозначно, и произвол в определении $\chi_0(p)$ можно свести к одному неопределенному параметру, применяя метод аналитического продолжения по константе связи к выражению (2.23). Покажем это.

Запишем коэффициенты $C(n)$ в форме

$$C(n) = (g^2)^n h(n). \tag{4.4}$$



Тогда (2.23) принимает вид

$$\Phi_0(p) = \frac{g^2}{p^2 + i\delta}\sum_1^\infty \left(-g^2\frac{p^2 + i\delta}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{h(n+1)}{n!(n-1)!}\left\{\ln\left(g^2\frac{p^2 + i\delta}{(4\pi)^2}e^{-i\pi}\right) + \right. \tag{4.5}$$

$$\left. + (\ln h(n+1))' - \Psi(n) - \Psi(n+1)\right\}.$$

Аналитически продолжая (4.5) по $g^2$ до отрицательных значений $g^2$ и учитывая разрез в плоскости $g^2$, получаем

$$\chi_0(p) = \alpha\,\Phi_0(p^2 g^2 e^{i\pi}) + \beta\,\Phi_0(p^2 g^2 e^{-i\pi}), \tag{4.6}$$

где параметры $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют условиям /19/

$$\alpha + \beta = 1, \qquad \mathrm{Re}(\alpha - \beta) = 0. \tag{4.7}$$

Последнее условие следует из унитарности. Окончательно получаем

$$\chi_0(p) = -\frac{g^2}{p^2 + i\delta}\sum_1^\infty \left(\frac{g^2(p^2 + i\delta)}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{h(n+1)}{n!(n-1)!}\left\{\ln\left(g^2\frac{p^2 + i\delta}{(4\pi)^2}e^{\pi(2\eta - 1)}\right) + \right. \tag{4.8}$$

$$\left. + (\ln h(n+1))' - \Psi(n) - \Psi(n+1)\right\},$$

где $\eta$ — единственный параметр, через который выражаются $\alpha$ и $\beta$ с учётом (4.7)

$$\alpha = 1/2 - i\eta, \quad \beta = 1/2 + i\eta. \tag{4.9}$$

Итак, в нелокальных теориях преобразование Фурье двухточечных функций удается провести либо однозначно, либо с одним неопределенным параметром. В локальных теориях возникает функциональная неопределенность. В $x$ – пространстве она имеет форму $A(\Box)\,\delta^{(4)}(x)$ или $B(\Box)\,\delta^{(4)}(x)$ и локализована в $x=0$.

Подобная неоднозначность описана в работах Гюттингера[4,5] и Джаффе[24], посвященных исследованию неперенормируемых взаимодействий.

Однако оказывается, что и среди локальных неперенормируемых взаимодействий существует достаточно широкий класс таких, которые допускают однозначное построение фурье-образа двухточечных функций.

Действительно, запишем $\Phi_0(x)$ в виде

$$\Phi_0(x) = i\sum_1^\infty \frac{C(n+1)}{(2\pi)^{2(n+1)}}\left(\frac{1}{x^2-i\delta}\right)^{n+1}. \tag{4.10}$$

Вводя промежуточную регуляризацию для пропагатора $\frac{1}{x^2-i\delta}$ такую, чтобы можно было построить фурье-образ любой его степени, переходим к импульсному пространству (регуляризация будет конкретизирована в дальнейшем).

$$\Phi_{0\,\text{рег}}(p) = i\sum_1^\infty \frac{C(n+1)}{(2\pi)^{2(n+1)}}\int d^4x\,\frac{e^{ipx}}{(x^2-i\delta)^{n+1}_{\text{рег}}} \tag{4.11}$$

Рассмотрим нефизическую область $p^2<0$ и выберем систему координат, где $p=\{0,\vec{p}\}$. Тогда можно перейти к евклидовой метрике[19] и конкретизировать регуляризацию введением обрезания при малых $\lambda(\lambda=-x^2)$

$$\Phi_{0\,\text{рег}}(p) = -\frac{1}{|p|}\sum_1^\infty(-1)^n\frac{C(n+1)}{(2\pi)^{2n}}\int_{\ell^2}^\infty d\lambda\lambda^{-n}\,\mathcal{J}_1(|p|\sqrt{\lambda}). \tag{4.12}$$



Восстановим функцию $\phi(z,\lambda)$, регулярную при $\operatorname{Re} z>0$ и удовлетворяющую условиям (2.10) и (2.11), по ее значениям $\phi(n,\lambda)$

$$\phi(n,\lambda) = \frac{C(n+1)}{[(2\pi)^2\lambda]^n}. \tag{4.13}$$

Это можно сделать, если $k$ в равенстве (3.2) лежит в области

$$0<k<2. \tag{4.14}$$

Тогда для (4.12) имеет место интегральное представление

$$\Phi_{0\,\text{рег}}(p) = \frac{i}{4|p|}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty}\frac{dz}{\sin\pi z}\,\frac{C(z+1)}{(2\pi)^{2z}}\int_{\ell^2}^\infty d\lambda\lambda^{-z}\,\mathcal{J}_1(|p|\sqrt{\lambda}). \tag{4.15}$$

В этом выражении можно перейти к пределу $\ell^2\to 0$ и взять интеграл по $\lambda$ и по $z$

$$\Phi_0(p) = \frac{(-1)}{|p|^2}\sum_1^\infty\left(\frac{|p|}{4\pi}\right)^{2n}\frac{C(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\left[\ln\left(\frac{|p|}{4\pi}\right)^2+(\ln C(n+1))'-\Psi(n)-\Psi(n+1)\right] \tag{4.16}$$

Аналитически продолжая это выражение по $p^2$ так, чтобы выйти из нефизической области $p^2<0$ на верхний берег разреза $p^2+i\delta$, получаем уже известный нам результат (2.23).

Аналогичную процедуру можно провести и для функции $\chi_0(x)$, только там следует рассматривать сначала физическую область $p^2>0$ и вычислять мнимую и действительную части функции $\chi_0(x)$ раздельно.

Итак, мы видим, что в довольно широком классе локальных неперенормируемых взаимодействий возможен однозначный переход от конфигурационного к импульсному пространству.

## 5. Случай массовых частиц

Для массовых частиц мы найдем асимптотическое выражение для двухточечной функции Грина в импульсном пространстве при $p^2 \to \infty$ в случае локального неперенормируемого взаимодействия.

Рассмотрим функцию $\chi_m(x)$ с коэффициентами $C(n)$, удовлетворяющими условию (3.1)

$$\chi_m(x) = \frac{1}{2}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\cos\pi n}{(16\pi^3)^n} C(n+1) \int\limits_{[(n+1)m]^2}^{\infty} d\mu^2 \Omega_{n+1}^{(m)}(\mu^2)\Delta_\mu^\circ(x). \qquad (5.1)$$

Поскольку нас интересует асимптотика $\chi_m(p)$ при $p^2 \to \infty$, то, как это видно, например, из формулы (3.14), основной вклад здесь дает интеграл по $\mu^2$ в области больших значений $\mu^2$. Поэтому можно использовать следующую приближенную формулу

$$\chi_m(x) \approx \sum_1^\infty (-1)^n \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{d\mu^2}{\mu^2} R(n,\mu^2)\Delta_\mu^\circ(x), \qquad (5.2)$$

где/25/

$$R(n,\mu^2) = \cos\pi n \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2n} \frac{C(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \{1 + n(n-1)\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \times$$

$$\times [\ln\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 + \Psi(n) + \Psi(n-1) - \Psi(1) - \Psi(2)]\}. \qquad (5.3)$$

Вводя параметр $\gamma$ и проделывая операции, описанные в части 3, получаем для фурье-образа

$$\chi_m^\gamma(p) \approx \frac{1}{2i}\int\limits_{a+i\infty}^{a-i\infty} \frac{dz}{\sin\pi z} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \frac{R_\gamma(z,\mu^2)}{\mu^2 - p^2 - i\delta}. \qquad (5.4)$$



Интегрируя (5.4) по $\mu^2$ и по $z$ и переходя к пределам $\gamma = 1$, $p^2 \gg m^2$, мы приходим к выражению, близкому к формуле (2.30). Разница между ними будет тем меньше, чем быстрее убывают коэффициенты $C(n)$ при $n \to \infty$.

## 6. Примеры взаимодействий

Для иллюстрации разработанного нами метода рассмотрим некоторые конкретные неперенормируемые взаимодействия.

Возьмем сначала псевдовекторное взаимодействие спинорного поля $\Psi(x)$ с псевдоскалярным мезонным полем $\phi(x)$

$$L(x) = L_0(\Psi(x),\phi(x)) - ig:\bar\Psi(x)\gamma_5\gamma_\nu\Psi(x)\partial^\nu\phi(x):, \qquad (6.1)$$

где $L_0(\Psi(x),\phi(x))$ – лагранжиан свободных полей. Унитарным преобразованием/20/

$$\Psi'(x) = \exp\{-g\gamma_5\phi(x)\}\Psi(x) \qquad (6.2)$$

лагранжиан (6.1) приводится к виду

$$L(x) = L_0(\Psi'(x),\phi(x)) - \frac{m}{2}:\bar\Psi'(x)e^{-2g\gamma_5\phi(x)}\Psi'(x): \qquad (6.3)$$

Здесь $L_0(\Psi'(x),\phi(x))$ – свободный лагранжиан с безмассовым спинорным полем, а знак нормального произведения в (6.3) относится лишь к спинорным полям.

Двухточечная функция Грина, как и амплитуда рассеяния скалярных частиц во втором порядке по $m$, выражаются через функцию $F(x)$ /19/

$$F(x) = iC(gm')^2 Sp\{S^\circ(x)S^\circ(-x)\}\exp\{-i(2g)^2\Delta_\mu^\circ(x)\}, \qquad (6.4)$$

где $S^{\circ}(x)$ — пропагатор свободного безмассового спинорного поля, $m' = m \exp\{i2g^2 \Delta^{\circ}_{\mu}(0)\}$, а $C$ – константа. Полагая и массы скалярных частиц равными нулю, получаем для $F(x)$

$$F(x) = iC \frac{(\pi m')^2}{g^4} \sum_{3}^{\infty} (-1)^n \frac{(2g)^{2n}}{\Gamma(n-2)} [i\Delta^{\circ}_0(x)]^n. \tag{6.5}$$

Фурье-образ этого выражения равен $(\kappa = (\frac{g}{2\pi})^2)$

$$F(p) = -C\kappa m'^2 (p^2 + i\delta) \sum_{0}^{\infty} \frac{[\kappa(p^2 + i\delta)]^n}{n!(n+1)!(n+2)!} \{ \ln[\kappa(p^2 + i\delta)e^{-i\pi}] - \tag{6.6}$$

$$- \Psi(n+1) - \Psi(n+2) - \Psi(n+3)\},$$

Этот ряд можно записать через полусумму $G$ – функций Майера[23]

$$G^{20}_{03}(\kappa(p^2 + i\delta) \mid 1,0,-1) + G^{20'}_{03}(\kappa(p^2 + i\delta)e^{-12\pi} \mid 1,0,-1),$$

а мнимую часть через $G^{10}_{03}(\kappa(p^2) \mid 1,0,-1)$. При $p^2 \to \infty$ она экспоненциально растет

$$\operatorname*{Im}_{p^2 \to \infty} F(p) \approx C' \frac{\exp\{3(\kappa p^2)^{1/3}\}}{(\kappa p^2)^{1/3}}. \tag{6.7}$$

В качестве второго примера мы приведем выражение для Бете-Солпитеровской амплитуды рассеяния фермионных частиц $A + \bar{A} \to A + \bar{A}$, которая была найдена Гюттингером[4,5] $(L_{int}(x) = g j_A(x) j_B(x)$, $j_A(x) = :\bar{\Psi}_A(x)\gamma_5\Psi_A(x):$, $m_A = m_B = 0$, $s = (p_1 + p_2)^2 = 0)$,

$$\Psi_F(x) = a\chi_F(x) + b\Phi_F(x) \tag{6.8}$$



где

$$\chi_F(x) = \exp\{-\frac{\sqrt{g}}{x^2 - i\delta}\}, \quad \Phi_F(x) = \exp\{\frac{\sqrt{g}}{x^2 - i\delta}\}. \tag{6.9}$$

Тогда для псевдоскалярной проекции $r$ амплитуды $t$

$(r = Sp\{i\gamma_5 t/4\})$

$$r_{\chi} = r_{\chi}(p, p') = \frac{ig}{4(2\pi)^3} \int d^4x \exp\{ix\frac{p'}{2}\} V_F(x)\chi_F(x) = \tag{6.10}$$

$$= ig(2\pi)^3 \int d^4x \exp\{ix\frac{p'}{2}\}(i\Delta^{\circ}_0(x))^3 \exp\{-i(2\pi)^2\sqrt{g}\,\Delta^{\circ}_0(x)\}$$

$(p = \frac{p_2 - p_1}{2}$, $p' = \frac{p_4 - p_3}{2}$, $V_F(x)$ – потенциал) мы получаем выражение, очень близкое к (6.6)

## 7. Заключение

Итак, разработана унитарная процедура построения фурье-образа двухточечных функций Грина в теориях с неперенормируемыми взаимодействиями. Найдены спектральные представления этих функций. Описано поведение спектральных функций при больших значениях импульсов.

Результаты, полученные здесь для локальных теорий, несколько близки к тому, что получал Гюттингер[4,5]. Однако имеются принципиальные отличия. Мы приходим к неаналитической зависимости двухточечных функций от константы связи в импульсном пространстве, чего нет упомянутого автора. Это – следствие того, что наша процедура применяется к двухточечной функции Грина как к единому выражению, в то время, как процедура, разработанная в /4/, действует на каждый порядок по $g^2$ независимо, что разрушает структуру всей функции. Мы считаем, что неаналитическая зависимость физических величин от константы связи-

характерная черта всех неперенормируемых теорий [7,19,26,27].

Кроме того, в работах [4,5] фактически не устранена функциональная неоднозначность, возникающая при построении фурье-образа двухточечной функции Грина.

В заключение автор выражает глубокую признательность проф. Д.И.Блохинцеву за внимание к работе, Р.Денчеву, Г.В.Ефимову и И.Тодорову за полезные дискуссии.

## Литература


1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957г.
2. A.M. Jaffe, Ann.Phys. (N.Y.) 32, 127 (1965), J.Math.Phys. 5, 1174 (1965), Phys.Rev.Letters 17, 661 (1966).
3. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ 47, 1966 (1964),
4. W. Cüttinger, Fortsch. d. Phys. 14, 483 (1966).
5. W.Güttinger and E.Pfaffelhuber, Nuovo Cim., 52, 389 (1967).
6. G.V. Efimov. Commun.Math.Phys. 7, 1938 (1968).
7. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Дубна, Р2-3590 (1967).
8. L. Schwartz, Theorie des Distributions, Hermann, Paris, 1957.
9. R.Jost, The General Theory of Quantized Filds, American Mathematical Society, Providence, 1965.
10. R.F. Streater and A.S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All that, Benjamin, New York, 1964.
11. Г.В.Ефимов. ЖЭТФ 44, 2107 (1063), Nucl.Phys. 74, 657 (1965).
12. G. Feinberg and A. Pais. Phys.Rev. 131, 2724 (1963), 133B477 (1964).
13. T. Pradhan, Nuclear Phys. 43, 11 (1963).
14. B. Klaiber, Nuovo Cim. 36, 165 (1965).
15. R.F. Sawyer, Phys.Rev. 134, B448 (1964).
16. B. Schroer, J. Math. Phys. 5, 1361 (1964).
17. K. Bardacki and B. Schroer, J.Math.Phys. 7, 16 (1966).
18. М.К.Волков, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ 47, 1800 (1964).





19. М.К.Волков. Яд.физ. 6, 1100 (1967), 7, 445, (1968), preprint E2-3472 Dubna (1967) (Commun. Math. Phys. 7,289(1968).
20. R. Arnowitt and S. Deser, Phys.Rev. 100, 349 (1955).
21. Г.В.Ефимов. Яд. физ. 2, 180 (1965).
22. М.А.Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, ГИФМЛ, Москва, 1962.
23. A. Erdelyi(Ed). Higher Transcendental Functions, Vol. 1, New York-Toronto-London, MC GRAW-HILL Company, INC. 1953.
24. A.M. Jaffe, High Energy Behaviour of Local Quantum Fields, Preprint SLAC-PUB-249-250, Stanford (1967).
25. В.А.Колкунов, Н.Н.Мейман, Е.С.Николаевский, В.П.Петрухин. Фазовые интегралы, препринт, ИТЭФ, № 555, Москва, 1967.
26. T.D. Lee. Phys.Rev. 128, 899 (1962).
27. Б.А.Арбузов, А.Т.Филиппов. ЖЭТФ 49, 990 (1965). Nuovo Cim. 38, 796 (1965), preprint E2-3557 Dubna (1967).


Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1968 года.

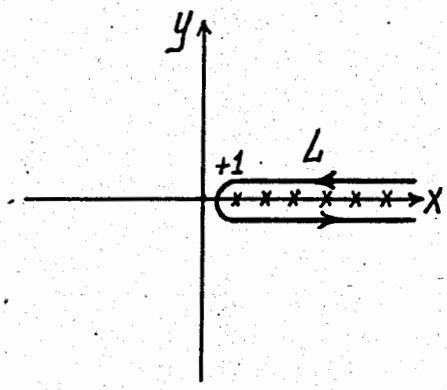


Рис. 1.