ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3725

Д.Ц.Стоянов, Х.Я.Христов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Стоянов Д.Ц., Христов Х.Я. P2-3725

Нелинейные представления группы Ли

Работа является обзором основных определений и теорем теории непрерывных групп Ли, изложенных на языке нелинейных представлений этих групп. Это означает, что основные теоремы теории непрерывных групп Ли переформулированы так, чтобы с их помощью можно было классифицировать все возможные реализации (не только линейные) данной группы Ли G .

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1968.

Stoyanov D., Khristov Kh. P2-3725

Non-Linear Representations of the Lee Group

The basic determinations and theorems of the theory of the continuous Lee groups, expressed in terms of non-linear representations of these groups, are reviewed. This means that the basic theorems of this theory are reformulated in such a way that it is possible to classify all the possible realizations (not only linear) of the given Lee group G using these theorems.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1968

P2 - 3725

Д.Ц.Стоянов, Х.Я.Христов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ

Введение

Теория о реализации данной группы преобразования n -мерного пространства по заданным структурным постоянным этой группы была давно развита Софусом Ли /1/. Было доказано, что заданным структурным постоянным всегда соответствует некоторая реализация некоторой группы с теми же структурными постоянными. Таким образом вопрос о существовании произвольных реализаций данной группы был решен еще тогда. Осталось только их классифицировать. Хотя такая классификация не создает никаких принципиальных затруднений, все же историческое развитие этой теории пошло несколько в другом направлении. Более интересным оказался вопрос о том, можно ли выбрать линейные реализации данной группы (последние, как известно, называются линейными представлениями). Требование линейности – это дополнительное требование, поэтому теория линейных представлений интенсивно развилась и обосновалась как отдельная наука ввиду большого количества свойств, присущих линейным представлениям. Эта теория развивается и до сих пор.

Отказ от требования линейности, очевидно, уменьшит количество свойств уже нелинейных реализаций (или представлений) данной группы, и является шагом назад. С другой стороны, ввиду меньшего количества свойств, в этом случае удается сделать несколько больше, чем в случае линейных представлений. Удается классифицировать не только неприводимые нелинейные представления, число которых конечное, если группа имеет конечное число параметров, но и все приводимые (они могут быть вполне приводимы).

Как уже отмечено, в работах классиков /1,2,3/ в сущности, содержится все необходимое для построения нелинейных представлений данной группы. Однако формулировки теорем, определений и пр., на наш взгляд, непригодны для непосредственного применения (точно так же, как они непригодны для непосредственного применения в линейном случае /4/). Поэтому настоящим обзором мы ставим себе целью сформулировать известные определения и теоремы из теории трансформационных групп в виде, пригодном для непосредственных применений, т.е. для получения и классификации нелинейных представлений данной группы Ли. Следует также отметить, что в обзор входят только такие сведения из теории С.Ли, которые непосредственно необходимы для построения указанных представлений. В обзоре, таким образом, содержится все, что было использовано, и все для полного понимания работы авторов /6/, где были классифицированы и получены все линейные представления группы SU(2).

§1. *Определение нелинейного представления*

1. Заданы группа Ли G и топологическое пространство U_n. Предположим, что в U_n задана система координат так, что любой элемент этого пространства $p \in U_n$ можно было задать с помощью n чисел

$$p \equiv \{ x_1 x_2 \dots x_n \}.$$

В этом смысле мы будем говорить, что пространство U_n — n -мерное. Группу Ли G будем считать f параметрической, т.е. любой элемент $g \in G$ задается с помощью f параметров $g \equiv \{ g_1, g_2 \dots g_f \} \equiv \{ g_\mu \}$.

Замечание: В этой работе латинские индексы всегда будут принимать значения от 1 до n, а греческие – от 1 до f. По повторяющимся индексам в сомножителях всегда будем подразумевать суммирования в соответствующих пределах.

Рассмотрим множество функций Γ:

$$F_i(g_\mu, x_k) \qquad \{g_\mu\} \equiv g \in G \qquad \{x_k\} \equiv p \in U_n \tag{1.1}$$

заданы на группе G и в некоторой области D пространства U_n. Будем считать, что область значений этих функций совпадает с $D \subset U_n$. Предположим, что $F_i(g_\mu, x_k)$ — непрерывно дифференцируемые по g_μ и x_k столько раз, сколько нам это понадобится в дальнейшем. В целях дальнейшего изложения мы будем считать, что множество Γ содержит только функционально независимые F_i, т.е. такие F_i, для которых

$$\det\left\{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 \qquad \{x_k\} \equiv p \in D \tag{1.2}$$

для всех $g \in G$.

И, наконец, мы потребуем, чтобы в Γ содержались один раз сами x_k:

$$F_i(0, x_k) = x_i . \tag{1.3}$$

Во множестве Γ можно определить произведение. Именно условия (1.2) и (1.3) дают возможность рассматривать $F_i(g_\mu, x_k)$ как преобразование области $D \subset U_n$

$$x_i' = F_i(g_\mu, x_k) \qquad \{x_k\} \equiv p \in D \qquad \{x_k'\} \equiv q \in D . \tag{1.4}$$

Но тогда произведение можно определить как последовательное применение двух таких преобразований. Пусть заданы два элемента множества Γ:

$$F_i(g_\mu, x_k) \qquad \text{и} \qquad F_i(h_\mu, x_k) .$$

Произведение этих двух элементов будем обозначать

$$F_i(g_\mu | * F_i(h_\nu || x_k) \tag{1.5}$$

и, по определению,

$$F_i(g_\mu|*F_i(h_\nu||x_k) = F_i[g_\mu, F_k(h_\nu, x_\ell)]. \tag{1.6}$$

Функции $F_i(g_\mu|*F_i(h_\nu||x_x)$ не обязаны принадлежать множеству Γ. Но если все они принадлежат этому множеству, то оно, очевидно, является полугруппой. Действительно, из (1.6) следует, что умножение ассоциативное, а из (1.3) – что Γ содержит и единичный элемент. Условие (1.2) означает, что у любого преобразования (1.4) есть и обратное, но мы нигде не предположили, что оно принадлежит множеству Γ.

2. Множество функции Γ будем называть представлением группы G в области D n-мерного пространства U_n, если

$$F_i[g_\mu, F_k(h_\nu, x_\ell)] \equiv F_i[(gh)_\mu, x_k], \tag{1.7}$$

где $(gh)_\mu$ — параметры элемента $gh \in G$. Покажем, что условие (1.7) превращает полугруппу Γ в группу (что необходимо для того, чтобы множество функций Γ образовали представление группы G). Для этого мы должны показать, что Γ содержит все обратные преобразования, которые в силу (1.2), как уже отмечали, существуют. Обратную функцию мы будем обозначать через

$$F_i^{-1}(g_\mu, x_k).$$

Поскольку она всегда существует для любого F_i, то мы вместо (1.7) можем написать эквивалентное ему равенство

$$F_k(h_\nu, x_\ell) = F_k^{-1}\{g_\mu, F_i[(gh)_\nu, x_k]\}. \tag{1.8}$$

Подставляя в последнее равенство $h = g^{-1}$, получаем

$$F_k(g_\nu^{-1}, x_\ell) = F_k^{-1}(g_\nu, x_\ell), \tag{1.9}$$

где g_ν^{-1} – параметры элемента g^{-1}. Кроме того, использовали равенства (1.3), так как $(g\, g^{-1})_\nu \equiv (e)_\nu \equiv 0$. Но $g^{-1} \in G$, поэтому $F_k(g_\nu^{-1}, x_\ell) \in \Gamma$ и, следовательно,

$$\Gamma_k^{-1}(g_\nu, x_k) \in \Gamma \quad \text{для любых} \quad g \in G, \tag{1.10}$$

что и требовалось доказать.

3. Представления $F_i(g_\mu, x_k)$ и $\Phi_i(g_\mu, y_k)$, заданные в области D n – мерного пространства U_n, называются эквивалентными, если $\{y_\ell\}$ и $\{x_\ell\}$ связаны между собой невырожденной трансформацией

$$y_i = f_i(x_k), \tag{1.11}$$

где $f_i(x_k)$ определены в области D и последняя является областью значений этих функций. Невырожденность преобразования (1.11) означает, что

$$\det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 \tag{1.12}$$

во всей области D. Это дает возможность обращать преобразование (1.11) в этой области. Обратное преобразование обозначим следующим образом:

$$x_k = f_k^{-1}(y_\ell). \tag{1.13}$$

Зная конкретный вид трансформаций (1.11) и (1.13), легко можно найти связь между $F_i(g_\mu, x_k)$ и $\Phi_i(g_\nu, y_\ell)$. Получим эту связь в общем виде. Исходя из преобразования

$$y_i' = \Phi_i(g_\nu, y_\ell) \tag{1.14}$$

и имея в виду, что

$$y_\ell = f_\ell(x_k) \quad \text{и} \quad y_\ell' = f_\ell(x_k'), \tag{1.15}$$

где

$$x_k' = F_k(g_\nu, x_\ell), \tag{1.16}$$

легко получить

$$F_k(g_\nu, x_\ell) = f_k^{-1}\{\Phi_i[g_\nu, f_\ell(x_j)]\}. \tag{1.17}$$

Заметим, что если представления и преобразование (1.11) линейные, то формула (1.17) переходит в хорошо известную формулу эквивалентных преобразований. Поэтому (1.17) является обобщением последней.

Если $\Phi_i(g_\nu, y_\ell)$ — представление группы G в области $D \subset U_n$, то легко показать, что $F_k(g_\nu, x_k)$ из формулы (1.17) — тоже представление G в D. Это утверждение следует из нижеследующей цепочки равенств:

$$F_k[g_\nu, F_\ell(h_\mu, x_j)] = f^{-1}\{\Phi_i[g_\nu f_\ell(f_i^{-1}\{\Phi_p[h_\mu, f_q(x_r)]\})]\} =$$

$$= f_k^{-1}\{\Phi_i[g_\nu \Phi_p(h_\mu, f_q(x_r))]\} = f_k^{-1}\{\Phi_i[(g\,h)_\mu, f_q(x_r)]\} =$$

$$= F_k[(g\,h)_\mu, x_\ell]$$

4. Пусть в области D заданная функция $I(x_k)$. $I(x_k)$ называется инвариантом представления $F_i(g_\mu, x_k)$, если выполняется следующее тождество:

$$I[F_i(g_\mu, x_k)] \equiv I(x_k). \tag{1.19}$$

Представления, для которых не все инварианты тождественно равны постоянным, называются приводимыми. В противном случае их называют неприводимыми.

Представление $F_i(g_\mu, x_k)$ называется квазидиагональным, если найдется такое число r $(1 \le r < n)$, что совокупность функций $F_i(g_\mu, x_k)$ можно разбить на две части:

$$
\begin{aligned}
&F_b(g_\mu, x_c) \qquad && b, c = 1 \div r \\
&F_u(g_\mu, x_v) \qquad && u, v = r+1 \div n,
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Если же $F_i(g_\mu, x_k)$ можно разбить на следующие две части:

$$
\begin{aligned}
&F_b(g_\mu, x_c) \qquad && b, c = 1 \div r \\
&F_u(g_\mu, x_k) \qquad && u = r+1 \div n \qquad k = 1 \div n,
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

то тогда представление будем называть полуквазидиагональным.

Если представление приводимо и одновременно с этим квазидиагонально, то тогда его назовем вполне приводимым. В связи с последним определением следует отметить, что если не требовалось линейности представления, то квазидиагональность и полная приводимость не совпадают. Как увидим дальше на примере группы $SU(2)$, квазидиагональное представление вообще может не являться приводимым. Это происходит потому, что приводимость определяется только с помощью инвариантов (а не с помощью инвариантных подпространств. В последнем случае вместо (1.19) имели бы равенство $I(F_i(g_\mu, x_k)) = \lambda(g_\mu) I(x_k)$, что определяет одномерное инвариантное подпространство пространства

U_n, и тогда очевидно, что $I(x_k)$ не является инвариантом) представления.

Теперь мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Любое приводимое представление в то же время является и полуквазидиагональным.

Пусть $I_a(x_k)$ $(a = 1 \div r)$ r — функционально независимые инварианты представления $F_i(g_\mu, x_k)$. Функциональная независимость в этом случае означает, что матрица

$$\left\| \frac{\partial I_a}{\partial x_k} \right\| \qquad a = 1 \div r \qquad k = 1 \div n \qquad r \leq n \tag{1.22}$$

имеет ранг r. Без ограничения общности положим, что

$$\det \left\{ \frac{\partial I_a}{\partial x_b} \right\} \neq 0 \qquad a, b = 1 \div r. \tag{1.23}$$

Тогда введем новые переменные

$$\begin{aligned} y_a &= I_a(x_k) \qquad & a &= 1 \div r \\ y_s &= x_s \qquad & s &= r + 1 \div n. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Легко убедиться в том, что в силу (1.23):

$$\det \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\} \neq 0.$$

Теперь с помощью (1.17) перейдем к эквивалентному представлению в переменных y_i.

$$\Phi_a(g_\mu, y_k) = I_a\{F_i[g_\nu, I_k^{-1}(y_\ell)]\} \qquad a = 1 \div r, \tag{1.25}$$

где $I_k^{-1}(y_\ell)$ — обратное преобразование к (1.24). Однако в силу определения (1.19), имеем

$$\Phi_a(g_\mu, y_k) \equiv I_a[I_k^{-1}(y_\ell)] \equiv y_a \qquad a = 1 \div r \tag{1.26}$$

и еще

$$\Phi_s(g_\mu, y_k) = F_s[g_\mu, I_k^{-1}(y_\ell)] \qquad s = r + 1 \div n \tag{1.27}$$

Равенства (1.26) и (1.27), в сущности, и доказывают нашу теорему, так как преобразования (1.26) не только не зависят от y_k для $k > r$, но даже единичны. Преобразования же (1.27) вообще могут зависеть от всех y_k, и поэтому в координатах (1.24) данное представление является полуквазидиагональным.

§2. Генераторные функции нелинейного представления

1. Генераторные функции обычно вводятся при рассматривании бесконечномалых преобразований. Такое введение иногда кажется более наглядным. Мы, однако, введем их сразу, так как бесконечномалые преобразования нам не понадобятся, а если даже придется их ввести, то можно сделать легко по аналогии с линейными представлениями.

Итак, генераторными (или инфинитезимальными) функциями данного представления $F_i(g_\mu, x_k)$, действующего в области D n-мерного пространства U_n, будем называть функции

$$M_i^\mu(x) = \left[\frac{\partial F_i(g, x)}{\partial g_\mu}\right]_{g_\nu = 0}. \tag{2.1}$$

По условию функции $M_i^\mu(x)$ будем считать непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам x_k. Условие непрерывной диффференцируемости можно несколько расширить. А именно: считать, что $M_i^{\mu}(x_k)$ удовлетворяют условиям Липшица (об этом можно посмотреть, например, в книге Степанова[5]). Дальше мы всегда будем говорить о непрерывной дифференцируемости, помня, что по существу можно под этим подразумевать условия Липшица.

Здесь интересно отметить, к чему переходит $M_i^{\mu}(x_k)$, если представление $F_i(g_{\mu}, x_k)$ – линейное. Считая, что в последнем случае

$$F_i(g_{\mu}, x_k) = T_{ik}(g_{\mu})\, x_k \ , \tag{2.2}$$

в силу (2.1) получаем, что

$$M_i^{\mu}(x_k) = I_{ik}^{\mu}\, x_k \ . \tag{2.3}$$

Имея в виду последние две формулы (2.2) и (2.3), мы сможем любой результат сравнивать с результатами линейных представлений. Дальше мы снова вернемся к этому вопросу и увидим, что связь между линейными и нелинейными представлениями даже в общем случае более глубока, чем это может показаться на первый взгляд.

2. Здесь мы рассмотрим связь между генераторными функциями эквивалентных представлений. Пусть заданы два эквивалентных представления $F_i(g_{\mu}, x_k)$ и $\Phi_i(g_{\nu}, y_{\ell})$ с генераторными функциями соответственно $M_i^{\mu}(x_k)$ и $N_i^{\mu}(y_k)$. Как мы уже показали, если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ связаны равенствами (1.11), причем выполняется (1.12), то F_i и Φ_i связаны равенством (1.17). Мы продифференцируем равенство (1.17) по g_{μ}, полагая потом все $g_{\mu} = 0$. Используя определение (2.1), получим

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} M_k^{\mu}(x_{\ell}) = N_i^{\mu}(y_{\ell}) \ ; \qquad y_i = f_i(x_k) \ . \tag{2.4}$$

Следует заметить, что для получения (2.4) мы пользовались равенством, которое получается из (1.17), если решать его по отношению к $\Phi_i(g_\mu, y_\ell)$.

Точно так же из равенства (1.19) путем дифференцирования по g_μ получаем, что, если функция $I(x)$ является инвариантом, то необходимо выполнять следующее уравнение

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} M_k^\mu(x) = 0 \qquad \text{для всех } \mu . \tag{2.5}$$

Можно показать, что это условие является также достаточным, т.е. (2.5) можно рассматривать как уравнение для получения инвариантов данного представления. Доказательства последнего факта приводим в приложении.

Если число возможных значений индекса k превышает число значений μ, т.е. если $n > f$, в силу теоремы /2,1/ из книги Эйзенхарта (заметим, что система уравнений (2.5) полная), уравнения (2.5) имеют $n - f$ независимых решений. Это означает, что мы сможем сформулировать следующее утверждение:

Теорема 2. Размерность максимального неприводимого нелинейного представления f-параметрической группы Ли равна в точности f.

Действительно, если размерность представления $n > f$, то имеются, по меньшей мере, $n - f$ независимых инвариантов и, следовательно, данное представление приводимо.

Равенство (2.4) можно рассматривать двумя разными способами. Во-первых, с его помощью можно получать генераторные функции эквивалентных представлений, зная преобразование перехода из одних переменных в другие. Во-вторых, (2.4) можно рассматривать как уравнение для функций $y_i = f_i(x_k)$, зная генераторные функции двух эквивалентных представлений. Поскольку в последнем случае (2.4) есть система из fn уравнений для n неизвестных, то вопрос о решимости такой системы не является тривиальным. Даже если система (2.4) имеет решения, то следует исследовать еще и вопрос о том, можно ли из них подобрать n функционально независимые. Если и последнее возможно сделать, мы будем говорить, что (2.4) имеет подходящее решение. В противном случае решение неподходящее, и представления не являются эквивалентными. С другой стороны, если в (2.4) фиксировать индекс μ, то из всего сказанного до сих пор мы можем написать уравнение (2.4) (для данного фиксированного μ, например, равно μ_o) в таком виде, чтобы оно всегда имело решение. Пусть $N_i^{\mu}(y_\ell) = c\, y_i$, где c – произвольная постоянная. Тогда

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} M_k^{\mu_o}(x_\ell) = c\, y_i \quad . \tag{2.6}$$

Видно, что каждое y_i удовлетворяет одно и то же уравнение, поэтому мы можем не писать в (2.6) индекс i. Таким образом, для всех n функции $y_i = f_i(x_k)$ у нас есть только одно уравнение (2.6). Согласно общей теории, этих уравнений/5/, в силу непрерывной дифференцируемости $M_k^{\mu_o}(x_\ell)$, уравнение (2.6) всегда имеет подходящее решение. Действительно, соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,y}{c\,y} = \frac{d\,x_k}{M_k^{\mu_o}(x_\ell)} \qquad k = 1 \div n \tag{2.7}$$

имеет n функционально независимых первых интегралов

$$\phi_i(y, x_k) = c_i \qquad \det\left\{\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 \,. \tag{2.8}$$

Решая каждое из равенств (2.8) по y, получаем

$$y_i = f_i(x_k, c_i), \tag{2.9}$$

т.е. n -параметрическая фамилия подходящих решений (2.6), ибо из функциональной независимости функции $\phi_i(y, x_k)$ следует (как нетрудно это проверить), что

$$\det\left\{\frac{\partial y_0}{\partial x_k}\right\} \neq 0. \qquad (2.10)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 3. Для любого представления существует такая система координат, в которой,по крайней мере,одна из генераторных функций может принять следующий простой вид

$$M_i^{\mu_0}(x) = c\, x_i \quad , \qquad (2.11)$$

который назовем каноническим (а также диагональным).

Естественно, возникает вопрос об одновременном приведении двух генераторных функций в диагональную форму. Пусть, например, заданы две генераторные функции $M_i^1(x)$ и $M_j^2(x)$ и пусть известно, что существует преобразование

$$y_i = f_i(x_k), \qquad (2.12)$$

такое, что в координатах y_i, M_j^1 и M_j^2 принимают канонический вид. Это означает, что функции (2.12) одновременно удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} M_j^1(x_k) = c_1 y_i \quad ; \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} M_j^2(x_k) = c_2 y_i \quad , \qquad (2.13)$$

где вообше $c_1 \neq c_2$.

Тогда, дифференцируя первые уравнения по x_k с последуюшим умножением на $M_k^2(x_\ell)$ с суммированием по индексам k , и дифференцируя второе уравнение по x_k с последующим умножением на $M^1_k(x_\ell)$ тоже с суммированием по индексам k, получим два выражения. Вычитая последние, получим следующее равенство

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial M^1_i}{\partial x_k} M^2_k - \frac{\partial M^2_i}{\partial x_k} M^1_k\right) = 0 . \tag{2.14}$$

Учитывая невырожденность преобразования (2.18), т.е. что

$$\det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 ,$$

получаем

$$\frac{\partial M^1_i}{\partial x_k} M^2_k - \frac{\partial M^2_i}{\partial x_k} M^1_k = 0 . \tag{2.15}$$

Следовательно, условие (2.15) необходимо для того, чтобы две генераторные функции можно было перевести в диагональную форму одновременно, т.е. с одним и тем же преобразованием.

Теперь наоборот, пусть M^1_j и M^2_j удовлетворяют тождественно условию (2.15). Пусть , кроме того, дано преобразование

$$y_i = f_i(x_k) \qquad \det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 , \tag{2.16}$$

для которого

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} M^1_k(x_\ell) = c_1 y_i . \tag{2.17}$$

Умножим последнее равенство слева на оператор

$$M^2_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.18}$$

и получим

$$M_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_k^1 (x_\ell) \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = c_1 M_j^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} . \tag{2.19}$$

С помощью (2.15) легко получить следующее тождество:

$$M_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_k^1 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = M_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_k^2 (x_\ell) \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) . \tag{2.20}$$

После подстановки последнего в (2.19), получаем, что функция

$$M_j^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \qquad \text{для любого} \quad y_i \tag{2.21}$$

тоже удовлетворяет уравнению (2.17). Из последнего результата следует, что из всех решений уравнения (2.17) можно выбрать такое, что

$$M_j^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = c_2 y_i . \tag{2.21}$$

Таким образом доказали третью теорему.

Теорема 4. Условие (2.15) является необходимым и достаточным для одновременного приведения двух генераторных функций к каноническому виду.

§3. Связь генераторных функций с нелинейным представлением. Основные теоремы С.Ли

Генераторные функции нелинейного представления играют ту же роль, что и генераторы линейного представления. Эту роль мы раскроем с помощью нижеследующих трех основных теорем С.Ли. Эти теоремы были сформулированы вообще для группы преобразования n -мерного пространства и с их помощью строилась сама эта группа. У нас группа вообще задана и поэтому мы будем рассматривать эти теоремы как теоремы о существовании и однозначности представления данной группы. Поэтому сами формулировки теорем несколько отличаются от обычных, хотя бы потому, что у нас речь идет о представлении. Но, кроме того, они и несколько упрощены (как и сами доказательства), для того, чтобы можно было непосредственно сравнить их с соответствующими теоремами из теории линейных представлений . Итак, перейдем к теоремам.

Теорема 5. Первая основная теорема. Генераторные функции однозначно определяют представление группы G .

Доказательство. В силу закона умножения у нас есть следующее тождество для представления группы G :

$$F_i\{(gh)_\mu ; F_k[(h^{-1})_\nu , x_\ell]\} = F_i(g_\mu, x_k), \tag{3.1}$$

где $(gh)_\mu$ –параметры элемента $gh \in G$. Дифференцируя (3.1) по параметрам g_μ и полагая $h = g^{-1}$, получаем

$$\frac{\partial F_i(g_\nu, x_k)}{\partial g_\mu} = \sum_{\omega=1}^{r} S_{\mu\omega}(g_r)\, M_i^\omega [F_k(g_\nu, x_k)], \tag{3.2}$$

где

$$S_{\mu\omega}(g_r) = \left(\frac{\partial(gh)_\mu}{\partial g_\omega}\right)_{h=g^{-1}} \tag{3.3}$$

и, следовательно, $S_{\mu\omega}(g_r)$ определены однозначно для заданной группы G , так как они зависят только от закона умножения в этой группе. Поэтому, зная генераторные функции представления, мы можем записать явно систему уравнений (3.2) и рассматривать ее как систему для определения самых $F_i(g_\nu, x_k)$. Покажем, что (3.2) вместе с очевидными начальными условиями

$$F_i\,(0,x_k) = x_i \tag{3.4}$$

имеет однозначное решение (если оно существует), чем мы и докажем первую основную теорему. Положим в (3.2) $\mu = 1$ и $g_2 = g_3 = \ldots = g_r = 0$. Тогда у нас получится следующее уравнение:

$$\frac{dF_i\,(g_1, 0\ldots 0, x_k)}{d g_1} = \sum S_{1\nu}(g_1\,0\ldots 0)M_i^{\nu}\,[F_\ell\,(g_1\,0\ldots 0, x_k)]\,, \tag{3.5}$$

которое вместе с (3.4) имеет однозначное решение

$$F_i\,(g_1, 0\ldots 0, x_k) = F_i^1\,(g_1, x_k)\,. \tag{3.6}$$

Теперь возьмем снова (3.2), положим $\mu = 2$ и $g_3 = g_4 = \ldots = g_r = 0$. В этом случае

$$\frac{\partial F_i\,(g_1\,g_2\,0\ldots 0, x_k)}{\partial g_2} = \sum_\nu S_{2\nu}(g_1\,g_2\,0\ldots 0)M_i^{\nu}[F_\ell\,(g_1\,g_2\,0\ldots 0, x_k)] \tag{3.7}$$

условие (3.6) является начальным условием для уравнения (3.7) и поэтому (3.7) вместе с (3.6) также имеют однозначное решение

$$F_i\,(g_1\,g_2\,0\ldots 0, x_k) = F_i^2\,(g_1 g_2 x_k)\,, \tag{3.8}$$

Продолжая эту процедуру, пока переберем все g_μ, убеждаемся в справедливости сформулированной теоремы.

Теорема 6. Вторая основная теорема. Генераторные функции представления $F_i\,(g_\mu, x_k)$ группы G удовлетворяют уравнениям

$$\sum_j \left(M_j^{\mu} \frac{\partial M_i^{\nu}}{\partial x_j} - M_j^{\nu} \frac{\partial M_i^{\mu}}{\partial x_j} \right) = \sum_\omega C_{\mu\nu}^{\omega}\, M_i^{\omega}\,, \tag{3.9}$$

где $C^{\omega}_{\mu\nu}$ – структурные постоянные группы G.

Доказательство. Поскольку предполагается существование решения уравнения (3.2), то можно выписать необходимые и достаточные условия для этого, которые в данном случае должны являться тождествами. Эти условия символично записывают в виде

$$\frac{\partial^2 F_i(g_\omega, x_k)}{\partial g_\mu \partial g_\nu} = \frac{\partial^2 F_i(g_\omega, x_k)}{\partial g_\nu \partial g_\mu} \tag{3.10}$$

или в развернутом виде:

$$\sum_\omega \left\{ \frac{\partial S_{\mu\omega}(g_\tau)}{\partial g_\nu} M^{\omega}_i [F_\ell(g_\epsilon, x_k] + S_{\mu\omega}(g_\tau) \frac{\partial M^{\omega}_i}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(g_\epsilon, x_k)}{\partial g_\nu} \right\} = \tag{3.11}$$

$$= \sum_\omega \left\{ \frac{\partial S_{\nu\omega}(g_\delta)}{\partial g_\mu} M^{\omega}_i [F_\ell(g_\epsilon, x_k)] + S_{\nu\omega}(g_\tau) \frac{\partial M^{\omega}_i}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(g_\epsilon, x_k)}{\partial g_\mu} \right\}.$$

Полагая в последнем тождество $g_\mu = 0$, получаем (3.9), потому что, по определению,

$$C^{\omega}_{\mu\nu} = \left\{ \frac{\partial S_{\nu\omega}(g_\tau)}{\partial g_\mu} - \frac{\partial S_{\mu\omega}(g_\tau)}{\partial g_\nu} \right\}_{g_\mu = 0} \tag{3.12}$$

являются структурными постоянными группы G.

Как следствие доказанной теоремы можно сказать, что условие (3.9) является необходимым для существования решения системы (3.2) в окрестности точки $g_\mu = 0$.

Из (3.9) можно легко раскрыть связь между линейными и нелинейными представлениями группы G. Если введем линейные операторы

$$X^{\mu} = \sum_{i} M_{i}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{i}}, \tag{3.13}$$

то после умножения (3.9) справа на $\frac{\partial}{\partial x_i}$ суммируя по i, получаем

$$X^{\mu} X^{\nu} - X^{\nu} X^{\mu} = \sum_{\omega} C_{\mu\nu}^{\omega} X^{\omega}. \tag{3.14}$$

Последний результат означает, что, перебирая все возможные функции M_i^{μ} нелинейного представления, тем самым мы перебираем все возможные линейные представления алгебры группы, причём их базис дается с помощью линейных дифференциальных операторов (3.13). С другой стороны, для фиксированных M_i^{μ} линейное представление (3.13) вообще приводимо, поэтому каждой совокупности генераторных функций M_i^{μ} соответствует некоторая серия линейных представлений группы G.

Воспользовавшись уравнением (3.9), условия полной интегрируемости уравнений (3.2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial S_{\mu\rho}(g_{\tau})}{\partial g_{\nu}} - \frac{\partial S_{\nu\rho}(g_{\tau})}{\partial g_{\mu}} = \sum_{\omega,\tau} C_{\tau\omega}^{\rho} S_{\mu\omega}(g_{\epsilon}) S_{\nu\tau}(g_{\epsilon}). \tag{3.14}$$

(3.14) можно рассматривать как уравнение для определения функции $S_{\mu\rho}(g_{\tau})$ при заданных структурных постоянных $C_{\tau\omega}^{\rho}$. Если еше положим, что

$$S_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

которое непосредственно следует из того факта, что параметры единичного элемента равны нулю. Для доказательства равенства (3.15) мы выведем соотношение для функции $S_{\mu\nu}(g_{\tau})$, которое нам понадобится при доказательстве третьей основной теоремы. Из ассоциативности умножения в группе G можно написать

$$f g g_1 = (f g) g_1 = f (g g_1). \tag{3.16}$$

Положим

$$h = f g ; \quad h_1 = g g_1 . \tag{3.17}$$

Тогда

$$\frac{\partial (f g g_1)_\mu}{\partial f_\nu} = \sum_\omega \frac{\partial (h g_1)_\mu}{\partial h_\omega} \frac{\partial (f g)_\omega}{\partial f_\nu} . \tag{3.18}$$

Подставляя в последнее $g_1 = h^{-1}$, и учитывая, что $g g_1 = f^{-1}$, то из (3.18) получаем

$$S_{\mu\nu}(f_\epsilon) = \sum_\omega S_{\mu\omega}[(f g)_\epsilon] \frac{\partial (f g)_\omega}{\partial f_\nu} . \tag{3.19}$$

Теперь (3.15) следует непосредственно, если в (3.19) подставим $g = f^{-1}$. Тогда

$$S_{\mu\nu}(f_\epsilon) = \sum_\omega S_{\mu\omega}(0) S_{\omega\nu}(f_\epsilon) \tag{3.20}$$

тождественно, что по существу доказывает (3.15).

Уравнения (3.14) вместе с начальным условием (3.15) имеют решение, которое можно записать в виде:

$$S_{\mu\nu}(g_r) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\omega} C^{\mu}_{\nu\omega} g_{\omega} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(a+1)!}\sum_{\mu_1\omega_1} C^{\mu_1}_{\mu\omega_1} C^{\mu_2}_{\mu_1\omega_2} \ldots C^{\nu}_{\mu_{a-1}\omega_a} g_{\omega_1} g_{\omega_2} \ldots g_{\omega_a} + \tag{3.21}$$

$$+ \ldots .$$

В силу того, что структурные постоянные группы Ли G ограничены, т.е. можно найти такое c, что $|C^{\omega}_{\mu\nu}| < c$, видно, что ряд в правой части (3.21) мажорируется рядом

$$1 + \frac{1}{2!} cu + \frac{1}{3!} f c^2 u^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} f^{n-1} (cu)^n + \ldots, \tag{3.22}$$

где $u = \sum_{\omega} |g_{\omega}|$, а f – число параметров группы G. Сумма ряда (3.22) равна

$$\frac{e^{cfu} - 1}{cuf^2} + 1 - \frac{1}{f} \tag{3.23}$$

[8]

и, следовательно, ряд (3.21) сходится.

Теперь пусть заданы некоторые функции $N^{\mu}_{i}(x_k)$, удовлетворяющие уравнению типа (3.9) с заданными структурными постоянными. Тогда, как уже видели, из уравнения (3.14) вместе с (3.15) можно определить однозначно $S_{\mu\nu}(g)$. Условие (3.14) вместе с условием (3.9) для N^{μ}_{i} является достаточным для решения системы типа (3.2):

$$\frac{\partial \Phi_i(g_{\nu}, x_k)}{\partial g_{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{f} S_{\mu\nu}(g_r) N^{\nu}_{i}[\Phi_k(g_{\nu}, x_k)], \tag{3.24}$$

причём

$$\Phi_i(0, x_k) = x_i \ .$$

Покажем, что $\Phi_i(g_\nu, x_k)$ является представлением группы G с соответствующими структурными постоянными. Этот факт является содержанием третьей основной теоремы С.Ли.

Теорема 7. Третья основная теорема. Любые функции $N_i^\mu(x_k)$, удовлетворяющие уравнениям типа (3.9), где $C^\omega_{\mu\nu}$ – структурные постоянные группы G, являются генераторными функциями некоторого представления группы G. Само представление можно получить, проинтегрировав систему (3.24).

Доказательство. Мы уже выяснили, что система (3.24) имеет однозначное решение, если выполнены условия теоремы. Осталось лишь доказать, что $\Phi_i(g, x)$ является представлением данной группы. Для этого подставим в (3.24) вместо x_k – $\Phi_k(h_\lambda, x_\ell)$:

$$\frac{\partial\Phi_i[g_\nu, \Phi_k(h_\lambda, x_\ell)]}{\partial g_\mu} = \sum_\nu S_{\mu\nu}(g_\tau) N_i^\nu \{\Phi_k[g_\nu, \Phi_\ell(h_\lambda, x_j)]\} \tag{3.25}$$

$$\Phi_i[0, \Phi_k(h_\lambda, x_\ell)] = \Phi_i(h_\lambda, x_\ell).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\Phi_i[(gh)_\lambda, x_k]}{\partial g_\nu} = \frac{\partial\Phi_i[(gh)_\lambda, x_k]}{\partial (gh)_\mu} \frac{\partial (gh)_\mu}{\partial g_\nu} \ . \tag{3.26}$$

Но поскольку

$$\frac{\partial \Phi_i[(gh)_\lambda, x_k]}{\partial (gh)_\mu} = \sum_\nu S_{\mu\nu}[(gh)_\lambda] N_i^\nu \{\Phi_k[(gh)_\lambda, x_\ell]\}, \tag{3.27}$$

то легко видеть, что

$$\frac{\partial \Phi_i[(gh)_\lambda, x_k]}{\partial g_\nu} = \sum_{\mu,\omega} \frac{\partial (gh)_\mu}{\partial g_\nu} S_{\mu\omega}((gh)_\lambda) N_i^\omega \{\Phi_k[(gh)_\lambda, x_\ell]\} \tag{3.28}$$

Теперь, воспользовавшись равенством (3.19), окончательно получаем

$$\frac{\partial \Phi_i[(gh)_\lambda x_k]}{\partial g_\mu} = \sum_\nu S_{\mu\nu}(g_r) N_i^\omega \{\Phi_k[(gh)_\lambda, x_\ell]\} \tag{3.29}$$

с очевидным начальным условием

$$\Phi_i[(eh)_\lambda, x_k] = \Phi_i(h_\lambda, x_k). \tag{3.30}$$

Видно, что функции $\Phi_i[g_\nu, \Phi_k(h_\lambda, x_\ell)]$ и $\Phi_i[(gh)_\lambda, x_k]$ удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений с одними и теми же начальными условиями. В силу однозначности решения этой системы следует, что

$$\Phi_i[g_\nu, \Phi_k(h_\nu, x_\ell)] = \Phi_i[(gh)_\lambda, x_\ell], \tag{3.31}$$

и, следовательно, $\Phi_i(g, x)$ является представлением группы G.

Если теперь в (3.24) положить все $g_\mu = 0$, то убеждаемся, что $N_i^\mu(x)$ являются генераторными функциями полученного представления. Таким образом, третья основная теорема С.Ли доказана.

Из только что доказанных теорем следует, что если задана группа Ли G (независимо, в какой реализации, в частности, могут быть заданы лишь структурные постоянные этой группы), мы можем построить все ее реализации и тем самым получить все ее представления. Классификацию последних можно провести с точностью до эквивалентности. На основе изложенной выше теории и, в частности, на основе теоремы 2 легко увидеть, что в случае нелинейных представлений решается более общая задача, чем в случае линейных, именно: можно производить классификации всех представлений данной группы, а не только неприводимых (как это делается в линейном случае). Такая классификация, в частности, была сделана нами для группы $SU(2)$ /6/.

Авторы выражают глубокую благодарность В.И.Огиевецкому, И.Т.Тодорову, а также участникам семинара по теории поля за интерес к работе и полезные обсуждения.

Приложение.

Достаточность условия (2.5) следует из интегрируемости системы (3.2). Можно доказать это следующим образом. Пусть $I(x)$ в любой точке $P(x_k)$ удовлетворяет тождественно условию (2.5). Тогда, если x_k и x_k' связаны нелинейным преобразованием

$$x_k = F_k(g_\mu, x_k'),$$

то (2.5) можно записать следующим образом

$$\frac{\partial I[F_j(g, x')]}{\partial F_k(g, x')} M^\mu_k [F_j(g x')] = 0.$$

Умножая последнее на $S_{\mu\nu}(g)$ и суммируя по μ, получим (используя систему (3.2))

$$\frac{\partial I[F_j(g, x')]}{\partial F_k(g, x')} \frac{\partial F_k(g, x')}{\partial g^\mu} = \frac{\partial I[F_j(g, x')]}{\partial g^\mu} = 0,$$

Откуда следует, что $I[F(g, x')]$ не зависит от g_μ, т.е. что

$$I[F_\ell(g, x')] = I(x'_\ell).$$

Последнее показывает, что функция $I(x_\ell)$ является инвариантом представления. Таким образом, достаточность условия (2.5) доказана.

Л и т е р а т у р а

1. *Lie S. and Engel F., Theorie der Transformationsgruppen 1,2 und 3 Leipzig.*
2. *Cartan E. Sur la structur des groupes de transformations finis et continus. These Mong, Paris.*
3. *Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований, ИЛ, Москва, 1947.*
4. *F.Gursey, в кн.: " Relativity, Groups and Topology" eds C. De Witt, B.De Witt, New York-London, 1964.*
5. *Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1958.*
6. *Стоянов Д.Ц. и Христов Х.Я. Нелинейные представления группы SU(2). Препринт ОИЯИ Р2-3648 (1968).*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1968 года.