

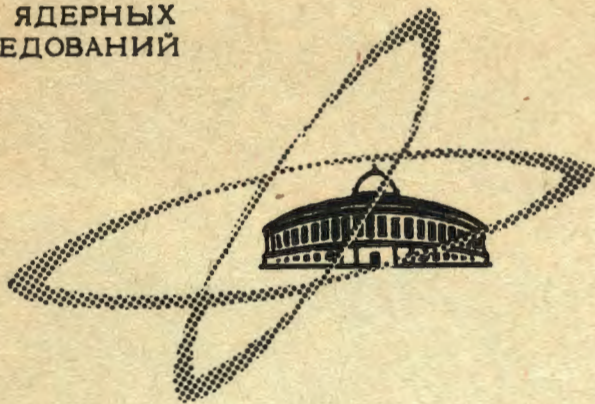
МЭТР, 1968, Т.55, В.4(10),
с.1296-1303

Л-84

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3692



И.Лукач, Я.А.Сморodinский

ОРБИТИРОВАНИЕ И РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3692

И.Лукач, Я.А.Сморodinский

ОРБИТИРОВАНИЕ И РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Направлено в ЖЭТФ



В в е д е н и е

Известно, что в классической теории рассеяния в определенном классе сферически симметричных потенциалов существует явление орбитирования (orbiting) /1-5/. Сущность этого явления состоит в том, что рассеиваемая частица взаимодействует с рассеивающим центром таким образом, что, приблизившись к этому центру, совершает вокруг него некоторое число оборотов, после чего удаляется на бесконечность под некоторым наблюдаемым углом рассеяния. Таким образом, взаимодействующие частицы могут находиться длительное время во взаимодействии, что должно соответствовать некоторому резонансному состоянию с определенным временем жизни.

В общем случае орбитирование происходит тогда, когда эффективная потенциальная энергия

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2m r^2} \quad (1)$$

где $U(r)$ - потенциал взаимодействия, M - момент падающей частицы, m - приведенная масса имеет хотя бы один максимум (барьер) и энергия падающей частицы близка к величине этого барьера /3,4/.

Условие существования максимума эффективной потенциальной энергии в точке r_B имеет вид:

$$\left. \frac{d U_{\text{eff}}(r)}{d r} \right|_{r=r_B} = 0, \quad \left. \frac{d^2 U_{\text{eff}}(r)}{d r^2} \right|_{r=r_B} < 0. \quad (2)$$

Если условия (2) выполнены, то $U_{\text{eff}}(r)$ вблизи точки r_B , в которой имеется максимум E_B , можно разложить в ряд по степеням $(r - r_B)$, сохраняя при этом члены второго порядка малости, т.е. положить

$$U_{\text{eff}}(r) = E_B \left[1 - \frac{(r - r_B)^2}{\rho^2} \right]; \quad \frac{1}{\rho^2} = - \frac{1}{2E_B} \left. \frac{d^2 U_{\text{eff}}}{d r^2} \right|_{r=r_B} \quad (3)$$

и провести исследование явлений при энергиях, близких к величине барьера E_B с приближением (3) для $U_{\text{eff}}(r)$.

Убедимся сначала, что в классическом рассмотрении частица с энергией $E = E_B$ вращается вокруг рассеивающего центра. По известной формуле классической механики для полного полярного угла θ_0

$$\theta_0 = 2 \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U_{\text{eff}}(r)]}}$$

находим, используя приближение (3):

$$\theta_0 = \frac{M \cdot \rho \cdot [3 + \text{sign}(E - E_B)]}{2 r_B^2 \sqrt{2m E_B}} \ell_n \frac{E_B}{|E - E_B|} + \text{const}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что при $E \rightarrow E_B$, $\theta_0 \rightarrow \infty$, и частица "сидит на барьер", где вращается практически бесконечно долго с угловой скоростью

$$\omega = \frac{M}{m r_B^2}.$$

Для иллюстрации на рис. 1 показан вид траектории частицы, совершившей вокруг центра два оборота и рассеявшейся под нулевым углом рассеяния.

Орбитирование дает вклад в классическое дифференциальное сечение рассеяния, где появляется сумма по виткам, так как на один и тот же наблюдаемый угол рассеяния рассеиваются частицы, совершившие разное количество витков вокруг рассеивающего центра, в зависимости от их момента.

В многочисленных монографиях по рассеянию об орбитировании упоминается очень редко и совсем не ставится вопрос о квантомеханическом рассмотрении явления орбитирования.

В настоящей работе рассматривается поведение квантово-механических характеристик процесса рассеяния при энергиях порядка величины барьера E_B и выясняется, что в случае достаточно высокого и широкого барьера при энергии $E = E_B$ имеется резонанс, соответствующий квазистационарному состоянию. Учитывая, что

$$E_B = U(r_B) + \frac{M^2}{2m r_B^2}, \quad (5)$$

где r_B является функцией момента M и параметров потенциала, мы, таким образом, имеем уравнение траектории резонансов, которая при физических значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$, $L = 0, 1, 2, \dots, L_{кр.}$ определяет семейство резонансных энергий $E_B^{(L)}$. В конце работы для иллюстрации рассчитана и нарисована зависимость $E = E_B(M^2)$ для нескольких потенциалов.

С методической точки зрения настоящая работа имеет значение для понимания физической картины резонанса вблизи вершины потенциального барьера в классической и квантовой механике и как конкретный пример расчёта траектории резонансов (траектории Редже) при заданном потенциале взаимодействия $U(r)$. Не менее интересны и вопросы, связанные с излучением орбитирующих частиц. Результаты этих исследований будут опубликованы позже в отдельной работе.

Расчёт матрицы рассеяния

Найдем выражение для S -матрицы в случае, когда эффективная потенциальная энергия (1) имеет эффективный барьер высоты E_B в точке r_B , за которым образуется эффективная яма глубины E_d в точке r_1 . Предполагаем, что эту $U_{eff}(r)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$U_{\text{off}}(r) = \begin{cases} \frac{h^2 L(L+1)}{2mr^2} & r > r_2 \\ E_B \left[1 - \frac{(r-r_B)^2}{\rho^2} \right] & r_1 < r < r_2 \\ E_A + \frac{h^2 L(L+1)}{2m} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] & 0 < r < r_1 \end{cases} \quad (6)$$

как показано на рис. 2.

Уравнение Шредингера в сферических координатах для радиальной волновой функции (умноженной на r) имеет вид:

$$\frac{d^2 R_{kL}}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2m}{h^2} U_{\text{off}}(r) \right] R_{kL} = 0. \quad (7)$$

Выпишем сначала решение $R_{kL}^{(+)}(r)$ уравнения (7), имеющее на бесконечности вид $\exp(ikr - \frac{i\pi}{2}L)$. Решения для всех трех областей имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} H_{\lambda}^{(1)}(kr) & r_2 < r \\ g(z) &= \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}k_B \rho \epsilon\right) \Psi\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}k_B \rho \epsilon, \frac{1}{2}; iz\right) \\ h(z) &= \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i}{4}k_B \rho \epsilon\right) \Psi\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}k_B \rho \epsilon, \frac{1}{2}; -iz\right) & r_1 < r < r_2 \\ k(r) &= \sqrt{\frac{\pi k_1 r}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} H_{\lambda}^{(1)}(k_1 r) \\ \ell(r) &= \sqrt{\frac{\pi k_1 r}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} H_{\lambda}^{(2)}(k_1 r) & 0 < r < r_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $H_{\nu}^{(1)(2)}(x)$ - функции Ганкеля, $\Gamma(x)$ - гамма функция Эйлера,
 $\Psi(a, \gamma, x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция, и введены обозначения

$$E = \frac{h^2 k^2}{2m}, \quad E_B = \frac{h^2 k_B^2}{2m}, \quad E - E_B + \frac{h^2 L(L+1)}{2m r_1^2} = \frac{h^2 k_1^2}{2m}$$

$$\lambda = L + \frac{1}{2}, \quad \epsilon = 1 - \frac{E}{E_B}, \quad z = \frac{k_B}{\rho} (r - r_B)^2.$$

Решение $R_{kL}^{(+)}$ имеет вид:

$$R_{RL}^{(+)}(r) = \begin{cases} f & r > r_2 \\ \gamma \cdot g + \delta \cdot h & r_1 < r < r_2 \\ \alpha \cdot k + \beta \cdot \ell & 0 < r < r_1, \end{cases} \quad (9)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - постоянные, которые определяются из условий сшивания волновых функций в точках r_1 и r_2 . Условия сшивания имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f_{21} = \gamma g_2 + \delta h_2 \\ f_2' = \gamma g_2' + \delta h_2' \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \gamma g_1 + \delta h_1 = \alpha k_1 + \beta \ell_1 \\ \gamma g_1' + \delta h_1' = \alpha k_1' + \beta \ell_1' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где индексами 1 и 2 обозначены значения функций в точках r_1 и r_2 и штрих обозначает производную по r . Решая систему уравнений (10) относительно постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, получаем для них следующие выражения:

$$\gamma = \frac{W(f_2, h_2)}{W(g_2, h_2)}; \quad \alpha = \frac{W(f_2, h_2) W(j_1, g_1)}{W(g_2, h_2) W(k_1, \ell_1)}$$

$$\delta = - \frac{W(f_2, g_2)}{W(g_2, h_2)}; \quad \beta = - \frac{W(f_2, g_2) W(j_1, h_1)}{W(g_2, h_2) W(k_1, \ell_1)}, \quad (11)$$

где через $W(\xi, r) = \xi \frac{\partial r}{\partial \xi} - r \frac{\partial \xi}{\partial r}$ обозначены вронскианы соответствующих функций в соответствующих точках и функция j выражается через функцию Бесселя $I_\lambda(x)$ следующим образом:

$$j(r) = k - \ell = 2i\sqrt{\frac{\pi k_1 r}{2}} I_\lambda(k_1 r).$$

Найдем теперь явное выражение для матрицы рассеяния

$$S(k, L) = \exp[2i\delta_L(k)].$$

Вторым решением уравнения (7) является решение $R_{kL}^{(-)} = [R_{kL}^{(+)}]^*$. Общее решение $R_{kL}(r)$ уравнения (7), имеющее на бесконечности вид

$$R_{kL}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx \sin(kr - \frac{\pi}{2}L + \delta_L(k)),$$

записывается как

$$R_{kL}(r) = [R_{kL}^{(-)}(r) - S R_{kL}^{(+)}(r)]. \quad (12)$$

Это решение в области $0 < r < r_1$ в явном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{kL}(r) &= \alpha^* k^* + \beta^* \ell^* - S(\alpha k + \beta \ell) = \\ &= \frac{1}{2} \{[(\alpha^* + \beta^*) - S(\alpha + \beta)](k + \ell) + [(\beta^* - \alpha^*) + S(\beta - \alpha)](k - \ell)\}. \end{aligned}$$

Из-за регулярности волновой функции $R_{kL}(r)$ в нуле необходимо, чтобы коэффициент при функции

$$k + \ell = \sqrt{r} [H_\lambda^{(1)}(k_1 r) - H_\lambda^{(2)}(k_1 r)] = 2i\sqrt{r} N_\lambda(k_1 r)$$

равнялся нулю, т.е.

$$\alpha^* + \beta^* - S(\alpha + \beta) = 0.$$

Отсюда следует, что матрица рассеяния равна

$$S(k, L) = \exp[2i\delta_L(k)] = \frac{\alpha^* + \beta^*}{\alpha + \beta} \quad (13)$$

или же, используя явные выражения (11) для коэффициентов α, β и учитывая, что

$$W(k_1, l_1) = -2ik_1; \quad W(g_2, h_2) = 2i\sqrt{\frac{k_B}{\rho}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} k_B \rho \epsilon\right) \left| \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4} k_B \rho \epsilon\right) \right|^2,$$

окончательно получаем

$$S(k, L) = \frac{W^*(f_2, h_2) W^*(j_1, g_1) - W^*(f_2, g_2) W^*(j_1, h_1)}{W(f_2, h_2) W(j_1, g_1) - W(f_2, g_2) W(j_1, h_1)}. \quad (14)$$

Резонансные состояния

Полюсы S -матрицы определяются нулями выражения (функций Йоста):

$$F = W(f_2, h_2) W(j_1, g_1) - W(f_2, g_2) W(j_1, h_1). \quad (15)$$

Перепишем теперь в несколько более явной форме выражение (15) для F :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial f_2}{\partial r_2} \frac{\partial j_1}{\partial r_1} (g_1 h_2 - g_2 h_1) + f_2 j_1 \left(\frac{\partial g_1}{\partial r_1} \frac{\partial h_2}{\partial r_2} - \frac{\partial g_2}{\partial r_2} \frac{\partial h_1}{\partial r_1} \right) - \\ &- f_2 \frac{\partial j_1}{\partial r_1} \left(g_1 \frac{\partial h_2}{\partial r_2} - h_1 \frac{\partial g_2}{\partial r_2} \right) - j_1 \frac{\partial f_2}{\partial r_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial r_1} h_2 - \frac{\partial h_1}{\partial r_1} g_2 \right) = \\ &= f_2 j_1 k_B^2 \left\{ \left(\frac{\partial \ln f_2}{k_B \partial r_2} - \frac{\partial}{k_B \partial r_2} \right) \left(\frac{\partial \ln j_1}{k_B \partial r_1} - \frac{\partial}{k_B \partial r_1} \right) \right\} [g_1 h_2 - g_2 h_1]. \end{aligned}$$

где частные производные по r_1, r_2 действуют на функции с индексами 1 и 2 соответственно.

Для дальнейшего необходимо записать в явном виде и вычислить функцию $(g_1 h_2 - g_2 h_1)$.

При этом необходимо учесть, что точка $z=0$ является точкой ветвления для функций g, h , так что $g_1 \equiv g(z_1 e^{2\pi i})$ и $h_1 \equiv h(z_1 e^{-2\pi i})$, где уже $\arg z_1 = 0$.

Из теории вырожденной гипергеометрической функции следует /8/, что

$$\begin{aligned} & \Gamma(a - \gamma + 1) \Psi(a, \gamma; i z e^{2\pi i}) = \\ & = [1 + e^{-2\pi i \gamma} - e^{2\pi i(a-\gamma)}] \Gamma(a - \gamma + 1) \Psi(a, \gamma; i z) + \\ & + e^{-2\pi i \gamma} [e^{2\pi i a} - 1] \Gamma(1 - a) e^{i z} \Psi(\gamma - a, \gamma; -i z). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя соотношение (17), можем написать:

$$\begin{aligned} g(z_1 e^{2\pi i}) &= i \exp\left(\frac{\pi}{2} k_B \rho \epsilon\right) [g(z_1) - h(z_1)] + h(z_1) \\ h(z_1 e^{-2\pi i}) &= -i \exp\left(\frac{\pi}{2} k_B \rho \epsilon\right) [h(z_1) - g(z_1)] + g(z_1). \end{aligned}$$

В результате получаем: $g_1 h_2 - g_2 h_1 =$

$$= h(z_1)h(z_2) - g(z_1)g(z_2) - i \exp\left(\frac{\pi}{2} k_B \rho \epsilon\right) [g(z_1) - h(z_1)][g(z_2) - h(z_2)]. \quad (18)$$

Нас интересует значение выражения (18) при энергиях E порядка E_R , т.е. при малых ϵ , и поэтому можем разложить выражение (18) в ряд по степеням ϵ , сохраняя члены первого порядка малости

$$g_1 h_2 - g_2 h_1 = (g_1 h_2 - g_2 h_1)|_{\epsilon=0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} (g_1 h_2 - g_2 h_1)|_{\epsilon=0}. \quad (19)$$

Так как мы не можем написать явное выражение для производной вырожденной гипергеометрической функции по параметру, то мы используем для функций g, h их асимптотические выражения при больших значениях величины $(k_B \rho)$, т.к. $z_1 = \frac{k_B}{\rho} (r_B - r_1)^2 \approx k_B \rho$, $z_2 = \frac{k_B}{\rho} (r_2 - r_B)^2 \approx k_B \rho$. Таким образом, мы фактически разлагаем выражение (18) при условии:

$$\epsilon \ll \frac{1}{k_B \rho} \ll 1. \quad (20)$$

Запишем в явном виде функции $g(z)$, $h(z)$ и их производные по ϵ $\frac{\partial g}{\partial \epsilon}$, $\frac{\partial h}{\partial \epsilon}$ при больших z .

$$g(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = h^*(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4} k_B \rho \epsilon\right) z^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{z}{2} - \frac{1}{4} k_B \rho \epsilon \ln z\right) - \frac{\pi}{8} k_B \rho \epsilon\right]$$

$$\frac{\partial g(z)}{\partial \epsilon} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\partial h^*(z)}{\partial \epsilon} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} k_B \rho \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4} k_B \rho \epsilon\right) z^{-\frac{1}{4}} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\pi}{2} - i(\ln z - \Psi\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4} k_B \rho \epsilon\right)) \right].$$

$$\cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi}{8} + \frac{z}{2} - \frac{1}{4} k_B \rho \epsilon \ln z\right) - \frac{\pi}{8} k_B \rho \epsilon\right], \quad (21)$$

где $\Psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Подставляя эти выражения в выражение (19), получаем

$$\left(g_1 h_2 - g_2 h_1 \right) \Big|_{(k_B \rho) \rightarrow \infty} = \frac{i}{2} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right) [G(z_1, z_2) - H(z_1, z_2) k_B \rho \epsilon], \quad (22)$$

$\epsilon \rightarrow 0$

где для краткости через G, H обозначены следующие выражения:

$$G(z_1, z_2) = 4(z_1 z_2)^{-\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{z_1 - z_2}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \right]$$

$$H(z_1, z_2) = (z_1 z_2)^{-\frac{1}{4}} \left\{ \ln z_1 \left[\sqrt{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} - \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \right] + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \ln z_2 \left[\sqrt{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} + \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \right] - \pi \cos \frac{z_1 - z_2}{2} - \left[\Psi\left(\frac{1}{4}\right) + \Psi\left(\frac{3}{4}\right) \right] \sqrt{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \right\}.$$

Теперь необходимо к выражению (22) применить оператор

$$\left(\frac{\partial \ln f_2}{k \partial r_2} - \frac{\partial}{k \partial r_2} \right) \left(\frac{\partial \ln j_1}{k \partial r_1} - \frac{\partial}{k \partial r_1} \right) \Big|_{k=k_B} \quad (24)$$

и найти нуль функции Йоста (15).

Для более удобной записи последующих формул введем еще следующие обозначения:

$$A(r_1) = \frac{\partial \ln j_1}{k \partial r_1} \Big|_{k=k_B} = -\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{k_B r_1} + \frac{\bar{k}}{k_B} \frac{I_{\lambda=1}(\bar{k}_1 r_1)}{I_{\lambda}(\bar{k}_1 r_1)}; \bar{k}_1^2 = \frac{2m}{k^2} (E_B - E) + \frac{L(L+1)}{r_1^2}$$

$$B(r_2) = \operatorname{Re} \frac{\partial \ln f_2}{k \partial r_2} \Big|_{k=k_B} = -\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{k_B r_2} + \frac{I_{\lambda}(k_B r_2) I_{\lambda-1}(k_B r_2) - I_{-\lambda}(k_B r_2) I_{-\lambda+1}(k_B r_2)}{I_{\lambda}^2(k_B r_2) + I_{-\lambda}^2(k_B r_2)} \quad (25)$$

$$C(r_2) = \operatorname{Im} \frac{\partial \ln f_2}{k \partial r_2} \Big|_{k=k_B} = \frac{2}{\pi k_B r_2} [I_{\lambda}^2(k_B r_2) + I_{-\lambda}^2(k_B r_2)]^{-1} > 0.$$

С помощью обозначений (25) действие оператора (24) на функцию (22) приводит к следующему уравнению для ϵ :

$$\left[(ABC + \frac{\partial^2 G}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} - A \frac{\partial G}{k_B \partial r_2} - B \frac{\partial G}{k_B \partial r_1}) + iC(AC - \frac{\partial G}{k_B \partial r_1}) \right] -$$

$$-k_B \rho \epsilon \left[(A \nabla H + \frac{\partial^2 H}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} - A \frac{\partial H}{k_B \partial r_2} - B \frac{\partial H}{k_B \partial r_1}) + iC (A H - \frac{\partial H}{k_B \partial r_1}) \right] = 0. \quad (26)$$

Из этого уравнения после некоторых преобразований и явного выделения действительной и мнимой частей полученного выражения находим, что матрица рассеяния имеет полюс при энергии

$$E = E_B - E_\epsilon - \frac{i}{2} E_\gamma, \quad (27)$$

где

$$E_\epsilon = \frac{E_B G}{k_B \rho H} \left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ell_{nH}}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right]^2 + C^2 \left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right)^2 \right\}^{-1}$$

$$\left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ell_{nH}}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right] \left[\left(A - \frac{\partial \ell_{nG}}{k_B \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ell_{nG}}{k_B \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ell_{nG}}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right] + \right.$$

$$\left. + C^2 \left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right) \left(A - \frac{\partial \ell_{nG}}{k_B \partial r_1} \right) \right\} \quad (28)$$

$$E_\gamma = - \frac{2 C E_B}{k_B \rho \frac{\partial H/G}{k_B \partial r_2}} \left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ell_{nH}}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right]^2 + C^2 \left(A - \frac{\partial \ell_{nH}}{k_B \partial r_1} \right)^2 \right\}^{-1}$$

$$\left\{ \left[A \frac{\partial \ell_{nH}/G}{k_B \partial r_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ell_{nHG}}{k_B \partial r_1} - \frac{\partial \ell_{nH}/G}{k_B \partial r_2} + \frac{\partial^2 \ell_{nH}/G}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right) \right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \left(\frac{C}{H} \right)^2 \left[4 \frac{\partial^2 \ell_{nG}}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \frac{\partial H/G}{k_B \partial r_1} \frac{\partial H/G}{k_B \partial r_2} + \left(\frac{\partial^2 H/G}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right)^2 \right] \right\} > 0.$$

В том, что величина $E_\gamma > 0$, можно убедиться непосредственным вычислением производных по r_1 и r_2 от функций G и H , определенных выражениями (23). При этом окажется, что

$$\frac{\partial H/G}{k_B \partial r_2} < 0$$

и при достаточно больших z_1, z_2

$$4 \frac{\partial^2 \ln G}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \frac{\partial H/G}{k_B \partial r_1} \frac{\partial H/G}{k_B \partial r_2} + \left[\frac{\partial^2 H/G}{k_B^2 \partial r_1 \partial r_2} \right]^2 < 0$$

откуда следует, что $E_\gamma > 0$.

Таким образом можно заключить, что при энергиях падающих частиц примерно равных величине эффективного потенциального барьера, возникает квазистационарное ($E_\gamma > 0$) состояние. При достаточно больших z_1, z_2 , т.е. в случае достаточно высокого и широкого барьера $E_\epsilon \ll E_B$ и величина E_γ достаточно мала, так что получаем резонанс при энергии $E = E_B$. Так как высота эффективного потенциального барьера E_B (5) является функцией момента M падающей частицы, то при заданном потенциале взаимодействия частиц $U(r)$ уравнение

$$E = E_B = U(r_B) + \frac{M^2}{2m r_B^2}$$

определяет при физических значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$, $L=0,1,\dots,L_{kr}$ семейство резонансных энергий $E_B^{(L)}$.

Похожий результат получается и в несколько более грубом приближении для $U_{\text{eff}}(r)$ в области $r_1 < r < r_2$, а именно, приближением прямоугольного потенциального барьера высоты E_B . В этом случае в области $r_1 < r < r_2$ имеем решения

$$g = \exp(r k_B \sqrt{\epsilon}), \quad h = \exp(-r k_B \sqrt{\epsilon})$$

и для функций G и H получаем простые выражения

$$G = a; \quad H = -\frac{1}{6} a^3; \quad a = r_2 - r_1$$

и, соответственно, для E_γ получается:

$$E_\gamma = \frac{12C}{(k_B a)^3} \frac{\left(A + \frac{3}{2k_B a}\right)^2 + \frac{3}{4(k_B a)^2}}{\left[B\left(A + \frac{3}{k_B a}\right) - \frac{3}{k_B a}\left(A + \frac{2}{k_B a}\right)\right]^2 + C^2\left(A + \frac{3}{k_B a}\right)^2}, \quad (29)$$

где через A, B, C обозначены по-прежнему выражения (25).

Для иллюстрации полученных результатов вычислим траектории резонансных энергий $E_B = E_B(M^2)$ для нескольких конкретных потенциалов, в случае которых E_B выражается через M^2 аналитически.

Примеры

а) Потенциал

$$U(r) = v_0 \left[\left(\frac{a}{r} \right)^6 - \left(\frac{b}{r} \right)^4 \right]. \quad (30)$$

Этот потенциал на больших расстояниях представляет собой притяжение порядка r^{-4} , при малых r является отталкивающим с особенностью r^{-6} в нуле и в точке $r = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a^3}{b^2}$ имеет минимум. Эффективная потенциальная энергия для этого потенциала имеет максимум в точке

$$r_B = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a^3}{b^2} \left[\frac{2}{1-\xi} \right]^{1/2},$$

величиной

$$E_B(M^2) = \frac{1}{27} v_0 \left(\frac{b}{a} \right)^{12} (1-\xi)^2 (1+2\xi), \quad (31)$$

где

$$0 \leq \xi = \sqrt{1 - \frac{M^2}{M_{кр}^2}} \leq 1, \quad M_{кр}^2 = \frac{2}{3} m v_0 \frac{b^8}{a^6}.$$

При моментах $M \geq M_{кр}$ эффективного потенциального барьера не существует.

Выпишем производную E_B по M^2

$$\frac{\partial E_B}{\partial M^2} = \frac{1}{9} \frac{v_0}{M_{кр}^2} (1-\xi) \geq 0.$$

Отсюда видно, что при

$$M = 0, \quad E_B = 0, \quad \left. \frac{\partial E_B}{\partial M^2} \right|_{M=0} = 0.$$

Резонансные энергии $E_B^{(L)}$ получаются при значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$,

$L = 0, 1, \dots, L_{кр}$, где

$$L_{кр} = \left[\sqrt{\frac{M_{кр}^2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right]$$

([x] - целая часть x). Вид кривой $E_B = E_B(M^2)$ для потенциала (30) показан на рис. 3.

б) Потенциал

$$U(r) = -v_0 R^3 \frac{a^2}{r^2} \quad (32)$$

Потенциал (32) представляет собой потенциальную яму, регулярную в нуле и равную величине $-v_0$. На больших расстояниях он убывает как r^{-2} , т.е. имеет практически конечный радиус действия порядка a . Эффективная потенциальная энергия $U_{\text{eff}}(r)$ для этого потенциала имеет барьер в точке

$$\frac{1}{r_B^2} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-\xi}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-\xi}}$$

с величиной

$$E_B(M^2) = -\frac{v_0}{2\sqrt{2}} (1-\xi)^{3/2} + \frac{3}{8} v_0 (1-\xi^2) \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-\xi}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-\xi}}, \quad (33)$$

где $0 \leq \xi = \sqrt{1 - \frac{M^2}{M_{кр}^2}} \leq 1$, $M_{кр}^2 = \frac{3}{2} m v_0 a^2$.

При этом опять эффективный потенциальный барьер существует только для моментов $0 < M < M_{кр}$. Так как

$$\frac{\partial E_B}{\partial M^2} = \frac{1}{4m a^2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-\xi}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-\xi}} \geq 0,$$

то получаем вид резонансной кривой $E_B = E_B(M^2)$, который показан на рис. 4.

в) Потенциал

$$U(r) = v_0 \left[\frac{a}{r} - \left(\frac{\beta}{r} \right)^{3/2} \right], \quad a > 0. \quad (34)$$

Этот потенциал рассматриваем потому, что он сам в точке $r_0 = \frac{9}{4} \frac{\beta^3}{a^2}$ имеет барьер, величина которого равна $E_0 = \frac{4}{27} v_0 \left(\frac{a}{\beta} \right)^3$. Находя максимум эффективной потенциальной энергии для потенциала (34), получаем, что барьер находится в точке

$$r_B = \frac{9}{16} \frac{\beta^3}{a^2} (1 + \xi)^2$$

и имеет величину

$$E_B(M^2) = \frac{8}{27} v_0 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \frac{1 + 3\xi}{(1 + \xi)^3}, \quad (35)$$

где

$$0 \leq \xi = \sqrt{1 - \frac{M^2}{M_{kp}^2}} \leq 1, \quad M_{kp}^2 = \frac{9}{16} m v_0 \frac{\beta^3}{\alpha}.$$

Эффективный потенциальный барьер существует только для моментов $0 \leq M < M_{kp}$.

Далее, так как

$$\frac{\partial E_B}{\partial M^2} = \frac{8}{9} \frac{v_0}{M_{kp}^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 (1 + \xi)^{-4} > 0,$$

то в результате получаем резонансную траекторию, показанную на рис. 5. Интересно то, что эта траектория начинается при $L=0$ с резонансной энергии $E_B^{(0)} = E_0$.

Сечение рассеяния

Сечение упругого рассеяния дается формулой

$$\sigma(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) |1 - S_L(E)|^2. \quad (36)$$

Слагаемые в выражении (36) с моментами $0 \leq L \leq L_{kp}$ имеют резонансный характер (резонанс при $L=0$ имеется тогда, когда потенциальная энергия взаимодействия имеет барьер). Поэтому формула (36) принимает вид

$$\sigma(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} \sum_{L=0}^{L_{kp}} (2L+1) \frac{[E_Y^{(L)}]^2}{[E - E_B^{(L)}]^2 + \frac{1}{4}[E_Y^{(L)}]^2}, \quad (37)$$

где $E_B^{(L)}$ определяется уравнением (5) и $E_Y^{(L)}$ — выражением (28), причём отброшены члены с $L > L_{kp}$, которые в данном случае не имеют резонансного характера.

Формула (37) отличается от обычной резонансной формулы тем, что все резонансные энергии $E_B^{(L)}$ лежат на одной резонансной траектории, определенной уравнением (5). Такая резонансная траектория полностью определена параметрами потенциала взаимодействия и является аналогом траектории Редже, однако, эти два понятия не совсем совпадают. Редже рассматривал комплексные

моменты как функцию от действительных энергий, наши же резонансные траектории найдены как полюса S - матрицы для комплексных энергий при действительных моментах.

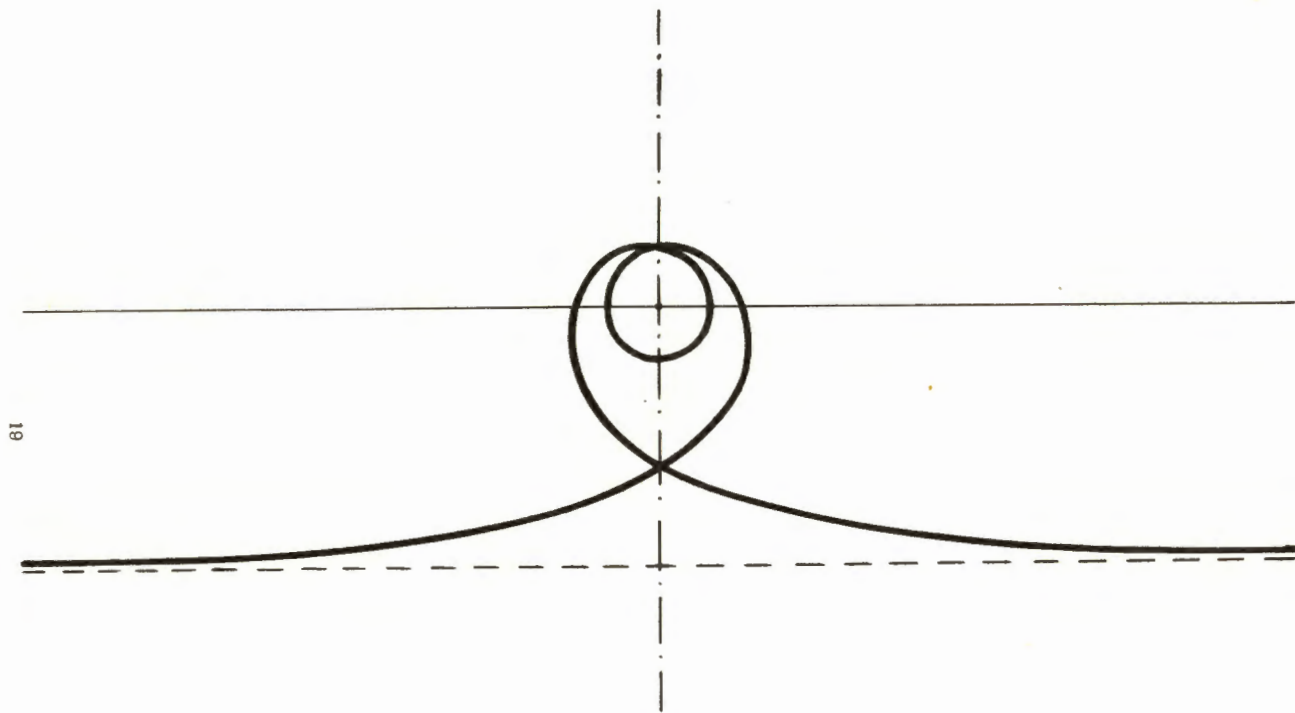
Полученные результаты позволяют рассматривать квантово-механическое резонансное состояние вблизи вершины эффективного потенциального барьера как аналог классического явления орбитирования. С классической точки зрения картина резонанса воспринимается как вращение частицы вокруг рассеивающего центра с определенным временем жизни, зависящим от числа оборотов частицы. Такой характер движения проявляется, например, в спектре излучения орбитирующей частицы. В таком спектре появляется максимум, ширина которого связана с временем жизни данного состояния.

Л и т е р а т у р а

1. Ford K.W., Wheeler I.A. Ann. of Phys., 7, 259-287, (1959).
2. Ford. K.W., Hill D.L., Wabano M., Wheeler I.A., Ann. of Phys., 7, 239 (1959).
3. М.Э.Баширов, М.И.Файнгольд, Л.Г.Яковлев. Особенности классического рассеяния в поле $-\frac{\alpha}{r}$. Уч. записки Ульяновского университета т. 18, вып. 5, 1964.
4. М.И.Файнгольд. Некоторые особенности спирального рассеяния, дис. АНУзССР, Институт яд. физики, Ташкент, 1966.
5. И.Лукач, Дипломная работа, физ. фак. МГУ, 1965.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, ГИФМЛ, Москва, 1963.
7. Де Альфаро В., Режде Т. Потенциальное рассеяние, МИР, Москва, 1966.
8. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, Наука, Москва, 1966.
9. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1, Наука, Москва, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел

1 февраля 1968 года.



19

Рис. 1. Классическая траектория рассеянной частицы в потенциале $-\frac{a}{r^3}$, совершившая вокруг рассеивающего центра два оборота и рассеявшаяся под нулевым углом рассеяния.

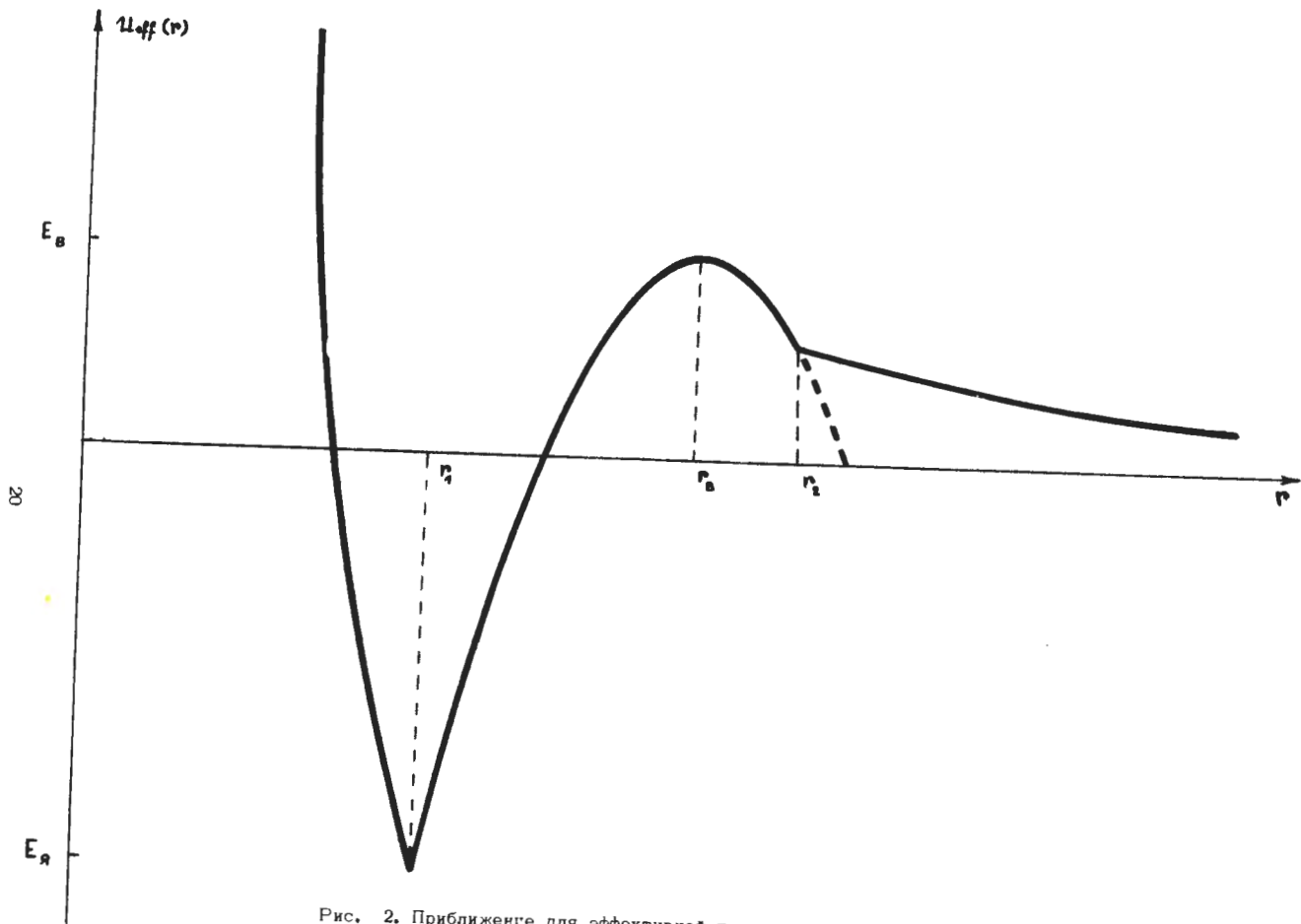


Рис. 2. Приближение для эффективной потенциальной энергии.

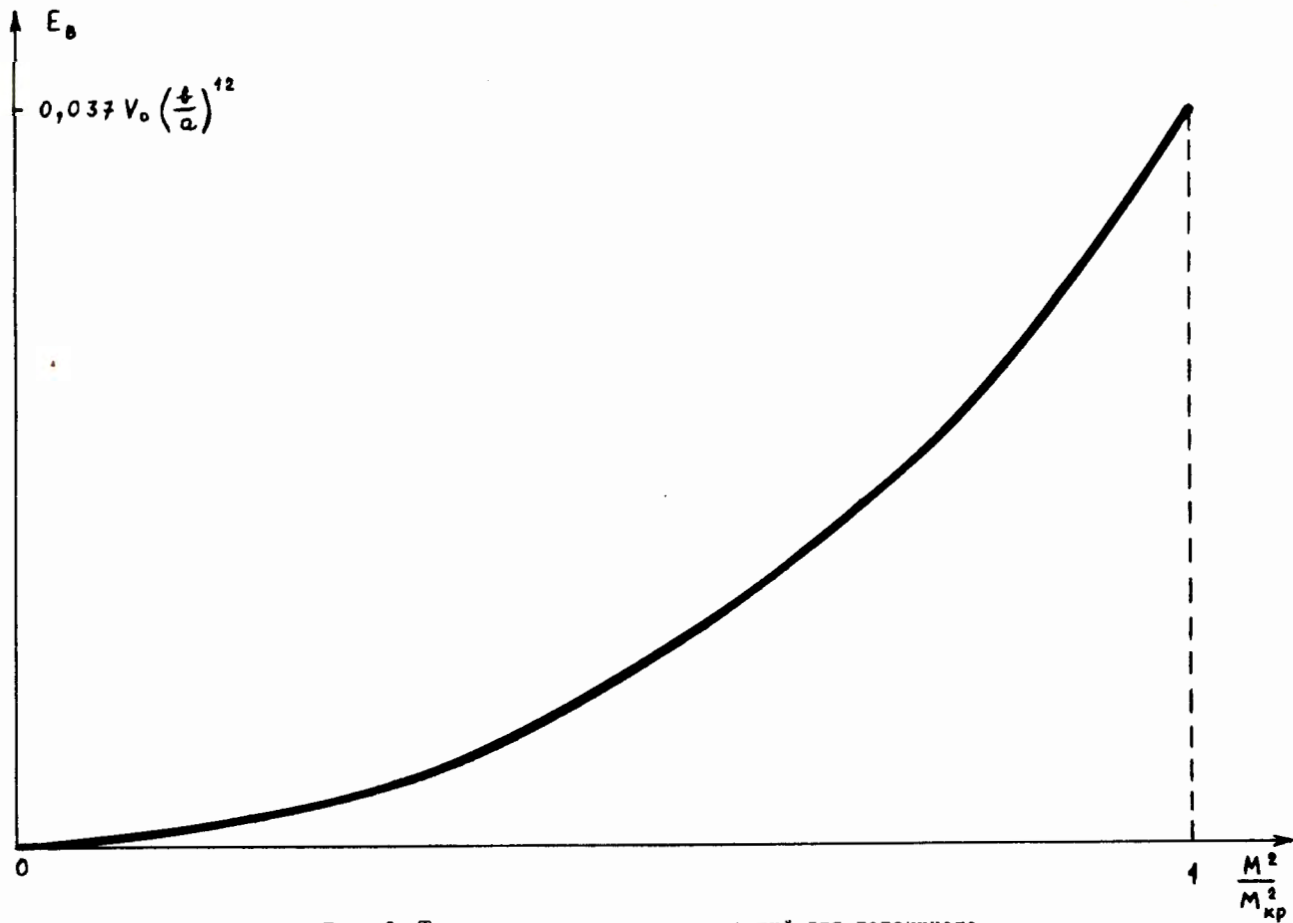


Рис. 3. Траектория резонансных энергий для потенциала

$$U(r) = v_0 \left[\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \left(\frac{b}{r}\right)^4 \right].$$

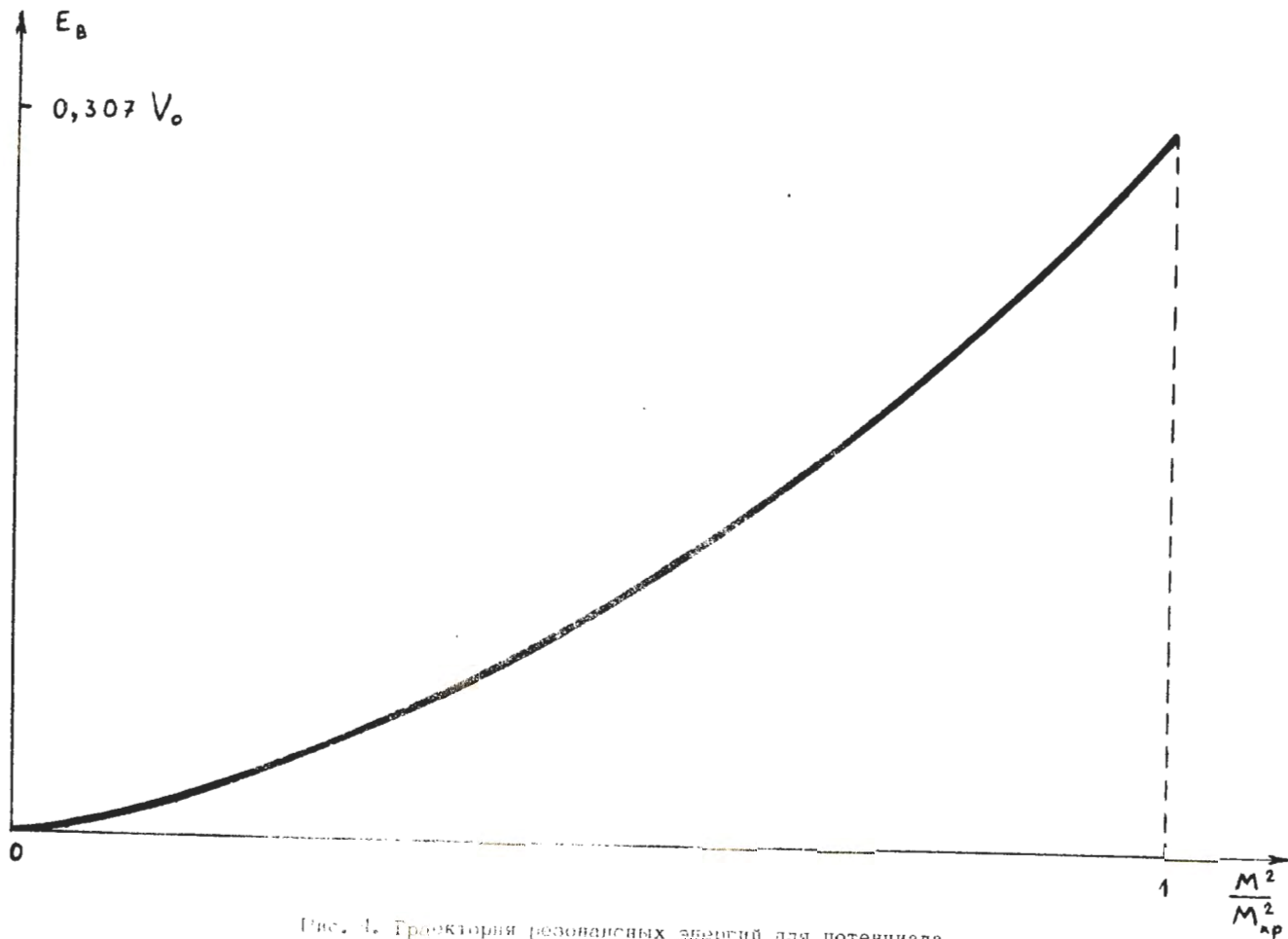


Рис. 4. Траектории резонансных энергий для потенциала

$$V(r) = -\gamma_0 \operatorname{th}^3 \frac{a^2}{r^2}.$$

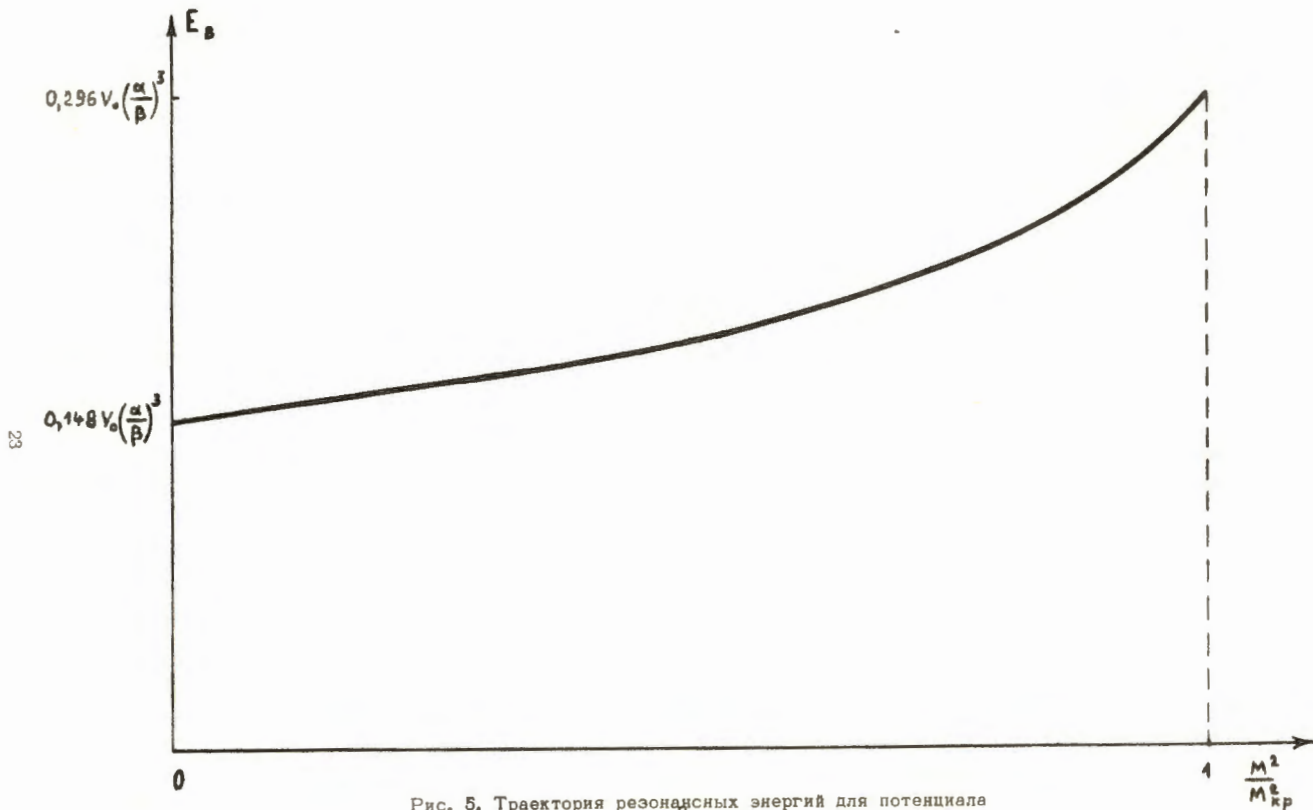


Рис. 5. Траектория резонансных энергий для потенциала
 $U(r) = v_0 \left[\frac{\alpha}{r} - \left(\frac{\beta}{r}\right)^{3/2} \right]; \quad \alpha > 0.$