ЖЭТФ, 1968, т. 54, в.6, с.1806-1815

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3662

Б.М.Барбашов

"КЛАССИЧЕСКАЯ" И КВАНТОВАЯ S-МАТРИЦА В ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3662

Б.М.Барбашов

"КЛАССИЧЕСКАЯ" И КВАНТОВАЯ S-МАТРИЦА В ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

§1. Введение

Скалярное нелинейное поле типа поля Борна-Инфельда[1,2] в двухмерном пространстве x, t имеет следующую функцию Лагранжа:

$$L = \kappa^2 \{ 1 - \sqrt{1 + \kappa^{-2}(\phi_x^2 - \phi_t^2)} \}, \qquad (1)$$

κ характеристическая константа нелинейного поля, играющая роль абсолютного масштаба градиентов поля $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Если $\kappa \to \infty$, то лагранжиан (1) переходит в лагранжиан линейного поля $L_0 = \frac{\phi_t^2 - \phi_x^2}{2}$, подчиняющегося уравнению Даламбера $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$. Если ввести сопряженный импульс поля $\pi(x,t) = \frac{\delta L}{\delta \phi_t}$, то можно записать функцию Гамильтона этого поля:

$$H = g^{-2} \{ \sqrt{(1 + g^2 \phi_x^2)(1 + g^2 \pi^2)} - 1 \}. \qquad (2)$$

Здесь введена удобная для дальнейшего константа g, обратная к κ, $g^2 = \kappa^{-2}$, которая может рассматриваться как константа нелинейности. При $g^2 \to 0$ гамильтониан (2) переходит в гамильтониан линейного поля $H_0 = \frac{\pi^2 + \phi_x^2}{2}$. Уравнение поля, вытекающее из (1) или (2), относится к классу квазилинейных уравнений гиперболического типа[3]

$$(1 - g^2 \phi_t^2)\phi_{xx} + g^2 \phi_x \phi_t \phi_{xt} - (1 + g^2 \phi_x^2)\phi_{tt} = 0. \qquad (3)$$

В работе [4] была решена задача рассеяния двух плоских волн в этой теории. Именно, было найдено решение уравнения (3) $\phi(u,v)$, где $u = x - t$, $v = x + t$, которое удовлетворяет следующим асимптотическим условиям:

$$\lim_{v \to -\infty} \phi(u,v) = \psi_1(u); \qquad \lim_{u \to \infty} \phi(u,v) = \psi_2(v). \tag{4}$$

Здесь $\psi_1(u)$ - плоская волна произвольной формы, движущаяся в положительном направлении по x, $\psi_2(v)$ - плоская волна, движущаяся в противоположном направлении по x.

Решение получено в форме:

$$\phi(u,v) = \psi_1(u + \mu(u,v)) + \psi_2(v + \nu(u,v)),$$

где

$$\mu(u,v) = g^2 \int_{-\infty}^{v} dy\, \psi_2'^2(y + \nu(u,v))$$

$$\nu(u,v) = -g^2 \int_{u}^{\infty} dy\, \psi_1'^2(y + \mu(u,v)) \tag{5}$$

(штрихи у $\psi_{1,2}$ означают производную по аргументу).

Из (4) и (5) можно получить во что переходят две плоские волны ψ_1, ψ_2 ($t = \frac{v-u}{2}$ и в обоих случаях (4) имеем $t \to -\infty$) при $t \to \infty$. Рассеянные волны мы получаем, устремив $u \to -\infty$ и $v \to \infty$ (в обоих случаях $t \to \infty$)

$$\lim_{v \to \infty} \phi(u,v) = \psi_1(u + g^2 P_2); \qquad \lim_{u = -\infty} \phi(u,v) = \psi_2(v - g^2 P_1), \tag{6}$$

где

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^2(y)\,dy; \qquad P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^2(y)\,dy. \tag{7}$$

Таким образом, две плоские волны $\psi_1(u)$, $\psi_2(v)$ при $t=-\infty$ переходят в результате рассеяния в две плоских волны той же формы, но со сдвинутыми аргументами. Величины P_1 и P_2, определяющие сдвиг, равны соответственно энергиям первой и второй волн.

§2. Квантовое рассмотрение процесса рассеяния

Обратимся к квантовой формулировке процесса рассеяния волн в этой модели. Найти операторы рассеянных волн $\hat{\phi}_{out}$, решая уравнение Гейзенберга для операторов поля, чрезвычайно трудная задача, так как даже не ясно, как можно записать нелинейное операторное уравнение, следующее из лагранжиана (1), поскольку нелинейные комбинации некоммутирующих операторов $\hat{\phi}_{x,t}(x,t)$ в одной точке x, t могут оказаться неоператорнозначными выражениями. Поэтому мы не можем автоматически перенести в квантовую теорию уравнение (3)[x)].

Нашей задачей будет показать, что даже в асимптотической области рассеянных волн (6) решение квантовых уравнений для системы с гамильтонианом (2) отличается от классического решения (6), если там интерпретировать классические величины как квантовые операторы поля $\hat{\phi}(x,t)$. Для линейных систем, как правило, решение классического уравнения движения дает возможность найти решение операторного уравнения [/6/].

Введем, следуя Янгу, Фелдману[/7/] и Челлену[/8/], оператор падающих волн $\hat{\phi}_{in}(u,v)$, удовлетворяющий свободному уравнению Даламбера ($g=0$)

$$\hat{\phi}_{in\,tt}-\hat{\phi}_{in\,xx}=0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\hat{\phi}_{in}}{\partial u\,\partial v}=0. \tag{8}$$

Из (8) следует фурье-представление для оператора $\hat{\phi}_{in}$

---

x) В предыдущей работе автора[/5/] было необоснованно предположено, что уравнение (3) сохраняет свой вид и в квантовой теории. Но легко заметить, что уже решение этого уравнения итерациями по константе g^2 существенно зависит от порядка расстановки операторов $\phi_x, \phi_t, \phi_{xx}$ в уравнении (3); вопрос о правильной расстановке операторов остается открытым.

$$\hat{\phi}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \left[a^{+}(k)\, e^{-ikx+i|k|t} + a^{-}(k)\, e^{ikx-i|k|t} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left[a^{+}(k)\, e^{-iku} + a^{-}(k)\, e^{iku} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left[a^{+}(-k)\, e^{ikv} + a^{-}(-k)\, e^{-ikv} \right], \tag{9}$$

где, как обычно, Бозе-операторы $a^{\pm}$ удовлетворяют перестановкам

$$[a^{+}(k),\ a^{+}(p)] = [a^{-}(k),\ a^{-}(p)] = 0$$

$$[a^{-}(k),\ a^{+}(p)] = \delta(k-p). \tag{10}$$

Обозначим по аналогии с классической задачей (4) оператор падающей волны в положительном направлении x через

$$\hat{\psi}_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left[a^{+}(k)\, e^{-iku} + a^{-}(k)\, e^{iku} \right] \tag{11}$$

и оператор волны в противоположном направлении через

$$\hat{\psi}_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left[a^{+}(-k)\, e^{ikv} + a^{-}(-k)\, e^{-ikv} \right]. \tag{12}$$

Из (9) имеем

$$\hat{\phi}_{in}(u, v) = \hat{\psi}_1(u) + \hat{\psi}_2(v).$$

Из перестановок (10) следуют коммутационные соотношения для $\hat{\psi}_1(u)$ и $\hat{\psi}_2(v)$. Заметим, во-первых, что поскольку оператор $\hat{\psi}_1(u)$ содержит $a^{\pm}(k)$ только с положительными значениями k, а оператор $\hat{\psi}_2(v)$ содержит $a^{\mp}(k)$ только с отрицательными значениями k, то

$$[\hat{\psi}_1(u), \ \hat{\psi}_2(v)] = 0 .$$

Далее

$$[\hat{\psi}_1(u), \hat{\psi}_1(u')] = \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin k(u-u') = \frac{i}{4}\epsilon(u-u')$$

$$[\hat{\psi}_2(v), \hat{\psi}_2(v')] = -\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin k(v-v') = -\frac{i}{4}\epsilon(v-v'), \qquad (13)$$

где

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Еще нам потребуется знание коммутаторов для производных $\hat{\psi}'_{1,2}$, которые получаются дифференцированием соотношений (13)

$$[\psi_1(u), \psi'_1(u')] = -\frac{i}{2}\delta(u-u')$$

$$[\psi_2(v), \psi'_2(v')] = \frac{i}{2}\delta(v-v'). \qquad (14)$$

Теперь предположим, что оператор рассеянных волн $\hat{\phi}_{out}$ имеет такой же вид, какой следует из решения классического уравнения (3), понимаемого теперь как уравнение Гейзенберга на операторы поля $\hat{\phi}$. Будем его обозначать $\hat{\phi}^{кл}_{out}$; согласно (6), имеем:

$$\hat{\phi}^{кл}_{out}(u, v) = \hat{\psi}_1(u + g^2\hat{P}_2) + \hat{\psi}_2(v - g^2\hat{P}_1). \qquad (15)$$

Смысл операторов $\hat{\psi}_1(u + g^2\hat{P}_2)$, $\hat{\psi}_2(v - g^2\hat{P}_1)$, в аргументе которых стоят другие операторы $\hat{P}_2$ и $\hat{P}_1$, становится ясным, если заметить, что оператор $\hat{P}_1$ коммутирует с $\hat{\psi}_2$, а $\hat{P}_2$ коммутирует с оператором $\hat{\psi}_1$. Действительно, из (11), (12) и (14) имеем соответственно:

$$\hat{P}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^2(u)\,du = \int_0^{\infty} k\, a^+(k)\, a^-(k)\, dk$$

$$\hat{P}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^2(v)\,dv = \int_0^{\infty} k\, a^+(-k)\, a^-(-k)\, dk \tag{16}$$

$$[\hat{P}_1, \hat{P}_1] = [\hat{P}_2, \hat{P}_2] = [\hat{P}_1, \hat{\psi}_2] = [\hat{P}_2, \hat{\psi}_1] = 0$$

$$[\hat{P}_1, \hat{\psi}_1(u)] = i\hat{\psi}_1'(u) \ ; \quad [\hat{P}_2, \hat{\psi}_2(v)] = -i\hat{\psi}_2'(v) .$$

Поэтому операторы в (15) можно представлять в виде рядов Тейлора по $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$:

$$\hat{\psi}_1(u + g^2\hat{P}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^2\hat{P}_2)^n}{n!}\, \hat{\psi}_1^{(n)}(u)$$

$$\hat{\psi}_2(v - g^2\hat{P}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g^2\hat{P}_1)^n}{n!}\, \hat{\psi}_2^{(n)}(v) . \tag{17}$$

Далее, предполагаемый оператор $\hat{\phi}_{out}$, как это и должно быть в теории Янга-Фелдмана, удовлетворяет свободному уравнению (8) и имеет Фурье-представление

$$\hat{\phi}^{\text{кл}}_{out}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ A^+(k, g^2)\, e^{-iku} + A^-(k, g^2)\, e^{iku} \} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ e^{ikv} A^+(-k, g^2) + A^-(-k, g^2)\, e^{ikv} \}, \tag{18}$$

где операторы $A^{\pm}(\pm k, g^2)$ определены согласно (15), (12), и (11)

$$A^{\pm}(k, g^2) = a^{\pm}(k)\, e^{\mp i k g^2 P_2}$$

$$A^{\pm}(-k, g^2) = a^{\pm}(k)\, e^{\mp i k g^2 P_1} . \tag{19}$$

Можно показать, что $A^{\pm}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (10), что и $a^{\pm}$. Это будет далее следовать из факта существования унитарного преобразования $S^{+}_{кл}\, a^{\pm}\, S_{кл} = A^{\pm}$, т.е. оператора, связывающего $\hat{\phi}_{in}$ и $\hat{\phi}_{out}$.

Оператор $S_{кл}$, осуществляющий преобразование

$$S^{+}_{кл}\, \hat{\phi}_{in}(u,v)\, S_{кл} = \hat{\phi}^{кл}_{out}(u,v),$$

которое с учетом (12) и (15) распадается на два равенства

$$S^{+}_{кл}\, \hat{\psi}_1(u)\, S_{кл} = \hat{\psi}_1(u + g^2 \hat{P}_2)$$

$$S^{+}_{кл}\, \hat{\psi}_2(v)\, S_{кл} = \hat{\psi}_2(v - g^2 \hat{P}_1), \tag{20}$$

имеет вид:

$$S_{кл} = e^{i g^2 \hat{P}_1 \hat{P}_2} . \tag{21}$$

Покажем, что $S_{кл}$ удовлетворяет уравнениям (20). Прежде всего отметим, что поскольку операторы $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ коммутируют, (см. (16)), то интерпретация экспоненты с оператором $P_1 P_2$ в показателе не вызывает затруднений. Выражение (21) должно рассматриваться как сумма обыкновенных произведений оператора $\hat{P}_1\, \hat{P}_2$

$$e^{ig^2\hat{P}_1\hat{P}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig^2)^n}{n!} (\hat{P}_1 \hat{P}_2)^n .$$

Для доказательства равенств (20) с оператором $S_{кл}$ продифференцируем $S^+_{кл} \hat{\psi}_1(u) S_{кл}$ и $S^+_{кл} \hat{\psi}_2(v) S$ по g^2 и с учетом коммутационных соотношений (16) получим:

$$\frac{\partial}{\partial g^2} (S^+_{кл} \hat{\psi}_1(u) S_{кл}) = S^+_{кл}\, i \hat{P}_2 [\hat{\psi}_1(u), \hat{P}_1] S_{кл} =$$

$$= \hat{P}_2 S^+_{кл} \psi'_1(u) S_{кл} = \hat{P}_2 \frac{\partial}{\partial u} (S^+_{кл} \hat{\psi}_1(u) S_{кл}) ;$$

$$\frac{\partial}{\partial g^2} (S^+_{кл} \hat{\psi}_2(v) S_{кл}) = S^+_{кл}\, i \hat{P}_1 [\hat{\psi}_2(v), \hat{P}_2] S_{кл} =$$

$$= - \hat{P}_1 S^+_{кл} \psi'_2(v) S_{кл} = - \hat{P}_1 \frac{\partial}{\partial v} (S^+_{кл} \hat{\psi}_2(v) S_{кл}) . \tag{22}$$

Решая эти уравнения с начальными условиями $(S^+_{кл} \hat{\psi}_1(u) S)_{g^2=0} = \psi(u)$; $(S^+_{кл} \hat{\psi}_2(v) S_{кл})_{g^2=0} = \hat{\psi}(v)$, находим

$$S^+_{кл} \hat{\psi}_1(u) S_{кл} = \hat{\psi}_1(u + g^2 \hat{P}_2) ; \quad S^+_{кл} \hat{\psi}_2(v) S_{кл} = \hat{\psi}_2(v - g^2 \hat{P}_1) ,$$

что и требовалось доказать.

Оператор $S_{кл}$ определяется уравнениями (20) однозначно с точностью до фазового множителя, так как системы $\hat{\phi}_{in}$ и $\hat{\phi}^{кл}_{out}$ операторов, являясь решениями уравнения Даламбера, образуют неприводимые наборы операторов /9/ в двухмерном пространстве x, t, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (10). Таким образом, из классических решений следует выражение для $S_{кл}$.

В импульсном пространстве для операторов также легко доказываются равенства:

$$A^{\pm}(\pm k, g^2) = S^+_{кл}\, a^{\pm}(\pm k) S_{кл} . \tag{23}$$

Надо только учесть, что для $k > 0$

$$[a^{\pm}(k), \hat{P}_1] = \mp k a^{\pm}(k); \qquad [a^{\pm}(-k), \hat{P}_2] = \mp k a^{\pm}(-k),$$

тогда из этих коммутаторов следуют равенства (19) для $A^{\pm}(\pm k, g^2)$. Из (23) как раз следует, что $A^{\pm}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и $a^{\pm}$. Далее легко заметить, что оператор числа падающих частиц

$$\hat{N}_{in} = \int_0^{\infty} dk a^+(k) a^-(k) + \int_0^{\infty} dk\, a^+(-k) a^-(-k)$$

коммутирует с $S_{кл}$ и поэтому $S_{кл}$ приводит только к процессам рассеяния без изменения числа частиц. Отсюда следует равенство операторов числа падающих и рассеянных частиц:

$$\hat{N}_{in} = \hat{N}^{кл}_{out} = \int_0^{\infty} dk\, A^+(k, g^2) A^-(k, g^2) + \int_0^{\infty} dk\, A^+(-k, g^2) A^-(-k, g^2) .$$

§ 3. S-матрица в представлении взаимодействия

Теперь обратимся к стандартной процедуре получения S-матрицы в представлении взаимодействия. Для этого выделим из гамильтониана нашей системы H-гамильтониан свободного поля, из которого следует уравнение Даламбера (8). Как уже отмечалось, при $g^2 = 0$ наш гамильтониан (2) переходит в

$$H_0 = \frac{1}{2}[\phi_x^2 + \pi^2] . \tag{24}$$

Таким образом мы разбиваем H на две части $H = (H - H_0) + H_0$, где $(H - H_0)$ обозначим через H_{int}, и представим его в виде разложения по степеням g^2. В представлении взаимодействия имеем, согласно (12),

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_x(x,t) &= \hat{\psi}_1'(u) + \hat{\psi}_2'(v) \\ \pi(x,t) &= \hat{\psi}_2'(v) - \hat{\psi}_1'(u) \\ H_0 &= \psi_1'^2(u) + \psi_2'^2(v) . \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение на S-матрицу ($\lim_{t\to\infty} S(t) = S$)

$$i\,\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \int dx\, H_{int}(x,t)\, S(t), \tag{26}$$

где

$$H_{int}(x,t) = e^{i\int dx H_0(x)\, t}\,\big(H(x) - H_0(x)\big)\, e^{-it\int dx H_0(x)} =$$

$$= g^{-2} :\left\{\sqrt{\left[1 + g^2\left(\psi_1'^2(u) + \psi_2'^2(v)\right)\right]^2 \left[1 + g^2\left(\psi_1'^2(u) - \psi_2'^2(v)\right)\right]^2} - 1\right\}: - H_0(x,t) \tag{27}$$

Это сложное операторное выражение для $H_{int}(x,t)$ нужно понимать как ряд по g^2 нормальных произведений операторов $\psi_1'^2(u)$, $\psi_2'^2(v)$ ($: :$ знак нормального произведения операторов).

Такое разложение имеет вид

$$H_{int}(u,v) = -2g^2 :\psi_1'^2(u)\,\psi_2'^2(v): +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} (-g^2)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} A_{m,n} : \psi_1'^{2(m+1)}(u)\,\psi_2'^{2(n+1-m)}(v) : \tag{28}$$

где
$$A_{m,n} = \frac{n!\,(n+1)!}{m!\,(m+1)!\,(n-m)!\,(n+1-m)!}.$$

Из уравнения (26) следует выражение для S-матрицы как T-экспоненты

$$S = T\left\{ e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx\, H_{int}(x,t)} \right\}. \tag{29}$$

Для того чтобы иметь возможность сравнить выражение $S_{кл}$, полученное нами в предыдущем параграфе на основе предположения о виде оператора

$\hat{\phi}_{out}$ и S-матрицу (29), необходимо в (29) перейти от T-произведения операторов $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ к обычному произведению, поскольку $S_{кл}$ есть сумма обыкновенных произведений операторов $\hat{P}_1$ $\hat{P}_2$. Эта процедура алгебраически эквивалентна теореме Вика для перехода от T к N-произведению, только вместо хронологических сверток операторов в теореме Вика в нашем случае надо пользоваться запаздывающими свертками. Это видно на примере двух операторов $\hat{\psi}_1'(u)$ и $\hat{\psi}_2'(v)$

$$
\begin{aligned}
T(\hat{\psi}_1'(u)\hat{\psi}_1'(u')) &= \hat{\psi}_1'(u)\hat{\psi}_1'(u') + D_1^{ret}(u'-u) \\
T(\psi_2'(v)\psi_2'(v')) &= \hat{\psi}_2'(v)\hat{\psi}_2'(v') + D_2^{ret}(v'-v),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_1^{ret}(u'-u) &= \theta(t'-t)[\hat{\psi}_1'(u'), \hat{\psi}_1'(u)] \\
D_1^{ret}(v'-v) &= \theta(t'-t)[\hat{\psi}_2'(v'), \hat{\psi}_2'(v)]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\theta(t'-t) = \begin{cases} 1 & t' > t \\ 0 & t' \le t \end{cases}
$$

Пользуясь методом Хори[10], произведем переход от T - произведения операторов $\hat{\psi}_1', \hat{\psi}_2'$ в (29) к обычному произведению с помощью оператора $e^{\Delta^{ret}}$.

$$
T\exp\{-i\int dt\int dx\, H_{int}(x,t)\} = e^{\Delta^{ret}}\exp\{-i\int dt\, dx\, H_{int}\}.
\tag{32}
$$

Символ Δ^{ret} в случае наших операторов $\hat{\psi}_1'(u)$ и $\hat{\psi}_2'(v)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\Delta^{ret} = \int dt_{1,2}\int dx_{1,2}\{ &D_1^{ret}(u_2-u_1)\frac{\delta^2}{\delta\psi_1'(u_1)\delta\psi_2'(u_2)} + \\
+ &D_2^{ret}(v_2-v_1)\frac{\delta^2}{\delta\psi_2'(v_1)\delta\psi_2'(v_2)}\}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к импульсному представлению операторов $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}'_2$ и функций $D^{ret}_{1,2}$

$$\hat{\psi}_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp\, e^{-ipu}\, \hat{\alpha}(p) \tag{34}$$

$$\hat{\psi}'_2(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp\, e^{-ipv}\, \hat{\beta}(p) .$$

Учитывая (11), (12), получим для операторов $\hat{\alpha}(p)$ и $\hat{\beta}(p)$ следующие выражения:

$$\alpha(p) = \sqrt{\frac{|p|}{2}}\; i \left[\theta(p)\, a^{+}(p) - \theta(-p)\, a^{-}(-p) \right]$$

$$\hat{\beta}(p) = \sqrt{\frac{|p|}{2}}\; i \left[\theta(-p)\, a^{+}(p) - \theta(p)\, a^{-}(-p) \right] \tag{35}$$

Функции $D^{ret}_{1,2}$ имеют фурье-представление

$$D^{ret}_1(u_2 - u_1) = \frac{\theta(t_2 - t_1)}{2\pi} \int dp\; p\, e^{ip(u_2 - u_1)}$$

$$D^{ret}_2(v_2 - v_1) = -\frac{\theta(t_2 - t_1)}{2\pi} \int dp\; p\, e^{ip(v_2 - v_1)} . \tag{36}$$

В формулу (32) теперь надо подставить Δ^{ret} и $\int dt\, dx\, H_{int}(x,t)$ в следующем виде.

$$\Delta^{ret} = \int dt_{1,2} \int dp_{1,2} \left\{ \Delta_1(t_1 p_1 ; t_2 p_2) \frac{\delta^2}{\delta \alpha_{t_1}(p_1)\, \delta \alpha_{t_2}(p_2)} + \right.$$

$$\left. + \Delta_2(t_1 p_1 ; t_2 p_2) \frac{\delta^2}{\delta \beta_{t_1}(p_1)\, \delta \beta_{t_2}(p_2)} \right\} . \tag{37}$$

где

$$\Delta_{1,2}(t_1 p_1 ; t_2 p_2) = -\frac{\theta(t_1 - t_2)}{2} p_{1,2}\,\delta(p_1 + p_2)$$

$$\int dt \int dx\, H_{int}(x,t) = -\frac{g^2}{\pi}\int dt \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{g^2}{2\pi}\right)^n \sum_{m=0}^{n} A_{m,n}\,. \tag{38}$$

$$\cdot \int dp_1 \ldots dp_{2(m+1)}\, dq_1 \ldots dq_{2(n+1-m)}\, e^{2it\sum_{j=1}^{2(m+1)} p_j}\,\delta\Big(\sum_1^{2(m+1)} p_i + \sum_1^{2(n+1-m)} q_j\Big) : \hat{\alpha}_t(p_1)\ldots\hat{\alpha}_t(p_{2(m+1)})\,\cdot$$

$$\cdot\,\hat{\beta}_t(q_1)\ldots\hat{\beta}_t(q_{2(n+1-m)}):$$

В выражениях (37) и (38) у операторов $\hat{\alpha}_t$, $\hat{\beta}_t$ поставлен индекс t, это связано с тем, что хотя эти операторы явным образом и не зависят от времени, тем не менее t является "упорядочивающим" параметром в Т-произведении операторов в (32) см./11/. Для полного гамильтониана $H_{int}(t)$ в (38) выполнить операцию (32) перехода от Т к обыкновенному произведению не удается без разложения в ряд по параметру g^2.

Нашей задачей будет показать, что если ограничиться первым членом в (38), пропорциональным g^2, то с точностью до g^2 в показателе экспоненты операция (32) выполнима без разложения в ряд и получающееся выражение точно совпадает с $S_{кл}$, найденной в § 2.

Рассмотрим выражение:

$$S_1 = T\exp\Big\{\frac{ig^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dp_{1,2}\, dq_{1,2}\, e^{2it(p_1+p_2)}\,\delta(p_1+p_2+q_1+q_2)$$

$$:\hat{\alpha}_t(p_1)\,\hat{\alpha}_t(p_2)\,\hat{\beta}_t(q_1)\,\beta_t(q_2):\Big\} = e^{\Delta^{ret}}\, e^{\int dt\, H_1(t)}, \tag{39}$$

$H_1(t)$ - первый член в разложении (38). Будем совершать все операции, связанные с выполнением вариационного дифференцирования с точностью до g^2 в показателе экспоненты. В результате получаем (см. приложение):

$$S = \exp\{ ig^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{1,2} dq_{1,2} \delta(p_1 + p_2)\delta(q_1 + q_2) : \hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_2)\, \hat{\beta}(q_1)\hat{\beta}(q_2) : \} . \tag{40}$$

Подставляя сюда выражения операторов $\hat{\alpha}(p)$, $\hat{\beta}(q)$ через $a^{\pm}$ из (35), убеждаемся, что S_1 совпадает с $S_{кл}$. Действительно, в показателе экспоненты (40) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, dq : \hat{\alpha}(p)\, \hat{\alpha}(-p) : : \hat{\beta}(q)\, \hat{\beta}(-q) : = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, dq \frac{|p|\,|q|}{4} \cdot$$

$$\{ : [\theta(p) a^+(p) - \theta(-p) a^-(-p)][\theta(-p) a^+(-p) - \theta(p) a^-(p)] : \cdot \tag{41}$$

$$\cdot : [\theta(-q) a^+(q) - \theta(q) a^-(-q)][\theta(q) a^+(-q) - \theta(-q) a^-(q)] : \} =$$

$$= \int_0^{\infty} dp\, p\, a^+(p)\, a^-(p) \int_0^{\infty} dq\, q\, a^+(-q)\, a^-(-q) = \hat{P}_1 \hat{P}_2 \, .$$

Таким образом, наше утверждение доказано $S_1 = e^{ig^2 \hat{P}_1 \hat{P}_2}$. Следовательно, наше приближение при нахождении S-матрицы приводит к $S_{кл}$, которая, как отмечалось выше, дает только упругие процессы рассеяния.

Точная S-матрица, определяемая полным гамильтонианом $H_{int}(t)$, содержит члены, приводящие к неупругим процессам. Это следует из вида S-матрицы в нормальной форме, полученной по теории возмущений до g^4 порядка включительно:

$$S = 1 + ig^2 \hat{P}_1 \hat{P}_2 + \frac{ig^4}{2} : \{ \hat{P}_1^2 \hat{P}_2^2 + \hat{P}_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq\, |q|\, \hat{\beta}(q)\, \hat{\beta}(-q) +$$

$$+ \hat{P}_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, |p|\, \hat{\alpha}(p)\hat{\alpha}(-p) + \int_{-\infty}^{\infty} dp\, |p|\, \hat{\alpha}(p)\, \hat{\alpha}(-p) \int dq\, |q|\, \hat{\beta}(q)\hat{\beta}(-q) +$$

$$+ (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) \frac{3\left(\int_0^\infty dp\, p\right)^2}{i\pi^2\epsilon} + \frac{\left(\int_0^\infty dp\, p\right)^3}{2i\pi^3\epsilon^2} +$$

$$+ \int dp_1 \ldots dp_4 [\hat{a}(p_1)\hat{a}(p_2)\hat{a}(p_3)\hat{a}(p_4) + \hat{\beta}(p_1)\hat{\beta}(p_2)\hat{\beta}(p_3)\hat{\beta}(p_4)]\delta(\sum_1^4 p_j) \frac{\int_0^\infty dp\, p}{i\pi\epsilon} .$$

Последний член приводит к возможности неупругих процессов уже в этом порядке теории возмущений. Параметр ϵ возникает от множителя $e^{-\epsilon|t|}$, который вводится в $H_{int}(t)$, согласно адиабатической гипотезе, и появляется в вакуумных матричных элементах S -матрицы. В нашем случае вакуум определен по отношению к частицам сорта a или β (с положительным или отрицательным импульсом p). Бесконечные интегралы $\int_0^\infty dp\, p$ возникают из-за причинных сверток операторов при переходе от T- к N -произведению.

Теперь становится ясным, что точный оператор рассеянных волн $\hat{\phi}_{out}$ не равен $\hat{\phi}^{кл}_{out}$, так как они получаются из $\hat{\phi}_{in}$ с помощью разных S -матриц, и только в сделанном выше приближении, в котором отсутствуют неупругие процессы, эти операторы совпадают.

В заключение автор выражает благодарность Д.И. Блохинцеву и Н.А. Черникову за постоянный интерес к работе и интересные обсуждения.

Приложение

Для вычисления выражения (39) прибегнем к следующему, легко проверяемому[12] представлению через функциональные интегралы выражения S_1

$$S_1 = T\exp\{ \frac{ig^2}{\pi} \int dt \int dp_{1,2} dq_{1,2}\, e^{2it(p_1+p_2)} : \hat{a}_t(p_1)\hat{a}_t(p_2)\hat{\beta}_t(q_1)\hat{\beta}_t(q_2) : \delta(\sum_1^2 p_i + \sum_1^2 q_i),$$

$$= C\int \delta\nu_1\, \delta\nu_2\, e^{-i\int dt\, dm[\nu_1^2(m,t) - \nu_2^2(m\, t)]}\, e^{\Delta^{ret}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{ig}{\sqrt{\pi}}\int dt\int dp_{1,2}\left[:\hat{\alpha}_t(p_1)\hat{\alpha}_t(p_2):\mu_1(p_1+p_2,t)\,e^{it(p_1+p_2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+:\hat{\beta}_t(p_1)\hat{\beta}_t(p_2):\mu_2(p_1+p_2,t)\,e^{-it(p_1+p_2)}\right]\right\},$$

где

$$\mu_1(p_1+p_2,t)=\nu_1(p_1+p_2,t)+\nu_2(p_1+p_2,t)$$

$$\mu_2(p_1+p_2,t)=\nu_1(-p_1-p_2,t)-\nu_2(-p_1-p_2,t).$$

C – нормировочная константа, определяемая условием

$$C\int\delta\nu_1\,\delta\nu_2\;e^{-i\int dt\,dm[\nu_1^2(m,t)-\nu_2^2(m,t)}=1.$$

В результате этого преобразования в показателе экспоненты получается выражение, квадратичное по операторам $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

Теперь действие оператора $e^{\Delta^{ret}}$ на такой функционал от α, β можно вычислить, пользуясь результатами работы/12/. Если обозначить коэффициентные функции, стоящие с операторами $\hat{\alpha}_t(p_1)\hat{\alpha}_t(p_2)$ $\hat{\beta}_t(p_1)\hat{\beta}_t(p_2)$ через

$$R_1(t_1p_1;\;t_2p_2)=\delta(t_1-t_2)\mu_1(p_1+p_2,t_1)\,e^{it_1(p_1+p_2)}$$

$$R_2(t_1p_1;\;t_2p_2)=\delta(t_1-t_2)\mu_2(p_1+p_2,t_1)\,e^{-it_1(p_1+p_2)} \tag{2a}$$

то в результате действия оператора $e^{\Delta^{ret}}$ получаем:

$$S_1=C\int\delta\nu_1\,\delta\nu_2\;e^{-i\int dm\,dt[\nu_1^2(mt)-\nu_2^2(mt)]}\times$$

$$\left\{\det\left[1+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\Delta_1R_1\right]\det\left[1+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\Delta_2R_2\right]\right\}^{-1/2}\times \tag{3a}$$

$$\exp\{-\frac{ig}{\sqrt{\pi}}\int dt_{1,2,3}\int dp_{1,2,3}[R_1(t_1p_1;t_2p_2)M_1(t_2p_2;t_3p_3):\hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_3):+$$

$$+R_2(t_1p_1;t_2p_2)M_2(t_2p_2;t_3p_3):\hat{\beta}(p_1)\hat{\beta}(p_3):]\}.$$

Индекс t у операторов $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ опущен, так как мы перешли от Т-произведения к обычному произведению в (3а). Величины $\det[1+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\Delta_{1,2}R_{1,2}]$ являются детерминантами Фредгольма интегральных операторов

$$\Delta_{1,2}R_{1,2}=\int dt_2\,dp_2\,\Delta_{1,2}(t_1p_1;t_2p_2)R_{1,2}(t_2,p_2;t_3p_3),$$

где $\Delta_{1,2}$ определены в (37). Покажем, что эти детерминанты равны единицы. Для этого воспользуемся записью детерминантов Фредгольма через следы итерированных ядер

$$\det[1+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\Delta R]=\exp\{-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{g}{\sqrt{\pi}})^n\frac{\sigma_n}{n}\},\tag{4a}$$

где

$$\sigma_n=\int dt_1\ldots dt_n\int dp_1\ldots dp_n\,\Delta(t_1p_1;t_2p_2)R(t_2p_2;t_3p_3)\Delta(t_3p_3;t_4p_4)R(t_4p_4;t_5p_5)\ldots$$
$$\ldots\Delta(t_{n-1}p_{n-1};t_np_n)R(t_np_n;t_1p_1).$$

– след итерированного ядра ΔR n- порядка. Из определения $\Delta_{1,2}$ (37) следует, что все $\sigma_n=0$, действительно,

$$\sigma_1=\int dt_{1,2}\,dp_{1,2}\,\Delta_{1,2}(t_1p_1;t_2p_2)R_{1,2}(t_2p_2;t_1p_1)=$$

$$=\mp\int dt_1\,dp_1\,\theta(0)\frac{p_1}{2}\mu_{1,2}(0,t_1)=0,\tag{5a}$$

так как, согласно определению, (см. (31)) $\theta(0)=0$ и интеграл по p_1 также равен 0. Далее,

$$\sigma_2=\int dt_{1,2,3}\,dp_{1,2,3}\,\Delta_{1,2}(t_1p_1;t_2p_2)R_{1,2}(t_2p_2;t_3p_3).$$

$$\Delta_{1,2}(t_3p_3;t_4p_4)R_{1,2}(t_4p_4;t_1p_1)=\int dt_{1,3}dp_{1,3}\,\theta(t_1-t_3)\theta(t_3-t_1)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{4}p_1p_3\mu_{1,2}(-p_1+p_3,t_3)\mu_{1,2}(p_1-p_3,t_1)e^{ip_3(t_3-t_1)+ip_1(t_1-t_3)}=0, \tag{6a}$$

так как $\theta(t_1-t_3)\theta(t_3-t_1)=0$. Аналогичным образом убеждаемся, что остальные следы σ_n равны нулю.

Функции $M_{1,2}$ в показателе экспоненты (3а) определяются уравнениями $M_1=[1+\Delta_1R_1]^{-1}$ или в интегральной форме

$$\int[\delta(t_1-t_2)\delta(p_1-p_2)-\frac{g}{\sqrt{\pi}}\theta(t_1-t_2)\frac{p_1}{2}\mu_1(p_2-p_1,t_2)e^{i(p_2-p_1)t_2}]M_1(t_2p_2;t_3p_3)dt_2dp_2=$$

$$=\delta(t_1-t_3)\delta(p_1-p_3)$$

$$\int dt_2dp_2[\delta(t_1-t_2)\delta(p_1-p_2)+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\theta(t_1-t_2)\frac{p_1}{2}e^{-i(p_1-p_2)t_2}\mu_2(p_2-p_1,t_2)]M_2(t_2p_2;t_3p_3)=$$

$$=\delta(t_1-t_3)\delta(p_1-p_3). \tag{7a}$$

Поскольку мы удерживаем в показателе экспоненты члены, содержащие g не выше, чем во второй степени, то можем находить $M_{1,2}$ из уравнений (7а) с точностью до g , так как в (3а) все выражение умножается на g . Решая (7а) методом итераций, находим

$$M_1(t_1p_1;t_2p_2)=\delta(t_1-t_2)\,\delta(p_1-p_2)+\frac{g}{\sqrt{\pi}}\theta(t_1-t_2)\frac{p_1}{2}\mu_1(p_2-p_1,t_2)e^{i(p_2-p_1)t_2} \tag{8a}$$

$$M_2(t_1p_1;t_2p_2)=\delta(t_1-t_2)\delta(p_1-p_2)-\frac{g}{\sqrt{\pi}}\theta(t_1-t_2)\frac{p_1}{2}\mu_2(p_2-p_1,t_2)e^{-i(p_2-p_1)t_2}.$$

Подставляя эти значения M_1 и M_2 в (3а), получаем

$$S_1 = \int \delta\nu_1 \delta\nu_2 \, e^{-i\int dt\,dm[\nu_1^2(mt) - \nu_2^2(mt)]} \exp\{ -\frac{ig}{\sqrt{\pi}} \int dt \int dp_{1,2} [\mu_1(p_1+p_2,t)\cdot$$

$$e^{it(p_1+p_2)} :\hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_2): + \mu_2(p_1+p_2,t)\, e^{-it(p_1+p_2)} :\hat{\beta}(p_1)\hat{\beta}(p_2):] - \qquad (9а)$$

$$-\frac{ig^2}{2\pi}\int dt_{1,2} \int dp_{1,2,3}\, p_2 [e^{it_1(p_1+p_2)+it_2(p_3-p_2)} \mu_1(p_1+p_2,t_1)\mu_1(p_3-p_2,t_2): \hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_3): +$$

$$+ e^{it_1(p_1+p_2)-it_2(p_3-p_2)} \mu_2(p_1+p_2,t_1)\mu_2(p_3-p_2,t): \hat{\beta}(p_1)\hat{\beta}(p_3):]\} .$$

Нам остается выполнить функциональное интегрирование по ν_1, ν_2. Это можно сделать точно, поскольку подинтегральное выражение есть гауссовский функционал от функций $\nu_{1,2}(m,t)$. Для этого, во-первых, путем замены переменных интегрирования избавимся от линейных членов по ν_1 и ν_2 в показателе

$$\nu_1(m,t) \to \nu_1(m,t) + \bar{\nu}_1(m,t); \qquad \nu_2(m,t) \to \nu_2(m,t) + \bar{\nu}_2(m,t),$$

где

$$\bar{\nu}_{1,2}(m,t) = \frac{g}{2\sqrt{\pi}} \int dp_{1,2}\, \delta(p_1+p_2-m)\, e^{i(p_1+p_2)t} :[\hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_2) \pm \hat{\beta}(p_1)\hat{\beta}(p_2)]:$$

В результате такой замены исчезают члены, линейные по ν_1 и ν_2 и выделяется член в показателе экспоненты, не зависящий от $\nu_{1,2}$; остаются еще члены, квадратичные по $\nu_{1,2}$, интегрирование которых приводит к детерминантам Фредгольма/12/

$$S_1 = \exp\{ i\frac{g^2}{\pi} \int dt \int dp_{1,2}\, dq_{1,2}\, e^{2i(p_1+p_2)t} \delta(p_1+p_2+q_1+q_2): \hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_2)\hat{\beta}(q_1)\hat{\beta}(q_2)\}$$

$$\cdot \{ \det[\delta(t_1-t_2)\delta(p_1-p_2) + \frac{g^2}{\pi} \int dk_{1,2}\, \delta(k_1+k_2-p_1-p_2) \frac{p_1-p_2}{4} e^{ip_1t_1+ip_2t_2} \theta(t_1-t_2) .$$

$$\cdot\,(\hat{\alpha}(k_1)\hat{\alpha}(k_2) + \hat{\beta}(-k_1)\hat{\beta}(-k_2))\,]\,\det[\,\delta(t_1-t_2)\delta(p_1-p_2) - \tag{10a}$$

$$- \frac{g^2}{\pi}\int dk_{1,2}\,\delta(k_1+k_2-p_1-p_2)\frac{p_1-p_2}{4}e^{ip_1t_1+ip_2t_2}\theta(t_1-t_2)(\hat{\alpha}(k_1)\hat{\alpha}(k_2)+\hat{\beta}(-k_1)\hat{\beta}(-k_2))]].$$

Детерминанты в (10а) равны единице, так как, если воспользоваться представлением (4а), то все следы σ_n равны нулю по той же причине как и в (5а), (6а) (напомним, что функция $\theta(0) = 0$, согласно определению (31)). Таким образом, ограничившись g^2 приближением в показателе экспоненты, мы получаем, выполняя в (10а) интегрирование по t, следующий результат:

$$S = \exp\{ig^2\int dp_{1,2}\,dq_{1,2}\,\delta(p_1+p_2)\delta(q_1+q_2):\hat{\alpha}(p_1)\hat{\alpha}(p_2)\hat{\beta}(q_1)\hat{\beta}(q_2)\}.$$

Литература

1. M.Born, L.Infeld, Proc. Roy. Soc. A144, 425 (1934).
2. W.Heisenberg, Zeitschrift f.Phys. 133, 565 (1952).
3. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников. ЖЭТФ, 50, вып. 5, 1298 (1966).
4. Б.М.Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, 51, вып. (2) 8, 657 (1966).
5. Б.М. Барбашов. Препринт ОИЯИ Р2-3330, Дубна 1967 .
6. В. Тирринг. "Элементарная квантовая теория поля", И.И,Л. Москва (1963).
7. C.N.Yang, and D.Feldman, Phys. Rev., 79, 972 (1950).
8. G.Kallen, Ark.f.Phys. 2, 187, 371 (1950).
9. A.S.Wightman and S.Schweber , Phys. Rev., 98, 812 (1955).
10. S.Hori, Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1952) .
11. R.P.Feynman, Phys. Rev., 84, 103 (1951).
12. Ф.А. Березин. "Метод вторичного квантования". Изд. "Наука" Москва (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 января 1968 г.