ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3661

Н.И.Усюкина

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕЗЕРА–ГИЛЬБЕРТА–СУДАРШАНА И МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОММУТАТОРОВ ТОКОВ ПРИ РАВНЫХ ВРЕМЕНАХ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 3661

Н.И.Усюкина

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕЗЕРА–ГИЛЬБЕРТА–СУДАРШАНА И МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОММУТАТОРОВ ТОКОВ ПРИ РАВНЫХ ВРЕМЕНАХ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В последнее время определенный интерес вызвало изучение швингеровских членов и попытки доказать их операторный характер. При рассмотрении матричных элементов коммутаторов токов естественно использовать спектральные представления - представление Челлена-Лемана для вакуумного матричного элемента и представление Йоста-Лемана-Дайсона для рассмотрения матричных элементов $\langle p|[j^{\mu}_{a}(\frac{x}{2})\, j^{\nu}_{\beta}(-\frac{x}{2})\ |0\rangle$, $\langle p\,|\,[\,j^{\mu}_{a}(\frac{x}{2})\,j^{\nu}_{\beta}(-\frac{x}{2})\,]\,|\,p'\rangle$.

В настоящей работе рассматривается матричный элемент

$$\langle p\,|\,[\,j^{\mu}_{a}(\frac{x}{2})\,j^{\nu}_{\beta}(-\frac{x}{2})\,]\,|\,0\rangle$$

в низшем порядке теории возмущений для перенормируемой модели кварков, спаренных с мезонами нулевого спина (скалярными и псевдоскалярными) и через сохраняющийся ток - с массивным фотоном /1/, затравочный лагранжиан взаимодействия которой имеет вид:

$$L_{int}(x) = g_s :\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi_s(x): + i\,g_p :\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\phi_p(x): + g_v :\bar{\psi}(x)\Lambda^{\mu}_{\alpha}\psi(x)\,a^{\alpha}_{\mu}(x): \quad (1)$$

где

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \begin{cases} \gamma^{\mu}\lambda_{\alpha} & (\alpha = 1,\dots,8) \\ \gamma^{5}\gamma^{\mu}\lambda_{\alpha} & (\alpha = 9,\dots,16) \end{cases}$$

Для простоты предположим в дальнейшем, что массы и константы связи описываются диагональными матрицами во внутреннем пространстве. Определим ток /2/:

$$j^{\mu}_{\alpha}(x) = i\,\frac{\delta S}{\delta a^{\alpha}_{\mu}(x)}\,S^{+} \tag{2}$$

$$S = T\exp i\int L_{int}(x)\,dx .$$

Тогда, если $\langle p_s|$ – соответствующим образом нормированный вектор состояния скалярного мезона, то:

$$\langle p_s|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle =$$

$$= \int dz\, e^{ipz}\left\{\langle 0|\,\frac{\delta j^{\mu}_{\alpha}(x)}{\delta\phi_s(z)}\,j^{\nu}_{\beta}(y)|0\rangle + \langle 0|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,\frac{\delta j^{\nu}_{\beta}(y)}{\delta\phi_s(z)}\,|0\rangle\right\}. \tag{3}$$

Как известно:/2/

$$\frac{\delta j^{\mu}_{\alpha}(x)}{\delta\phi_s(z)} = -i\,\theta(z^0-x^0)\,[\,j(z)\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,] + \bar{\Lambda}^{\mu}_{\alpha}(x,y)$$

и, следовательно, в интересующем нас порядке теории возмущений диаграммам рис.1 соответствует вклад:

$$\langle p_s|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle_1 =$$

$$= -g_v^2 g_s\int dz\, e^{ipz}\,Sp\{I_s S^{+}(z-x)\Lambda^{\mu}_{\alpha}S^{-}(x-y)\Lambda^{\nu}_{\beta}S^{c}(y-z) + I_s S^{r}(z-x)\Lambda^{\mu}_{\alpha}S^{-}(x-y)\Lambda^{\nu}_{\beta}S^{+}(y-z)\}, \tag{4}$$

а кросс-диаграммам рис.2 -вклад:

$$\langle p_s|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle_2 =$$

$$= -g_v^2 g_s\int dz\, e^{ipz}\,Sp\{I_s S^{r}(z-y)\Lambda^{\nu}_{\beta}S^{+}(y-x)\Lambda^{\mu}_{\alpha}S^{-}(x-z) + I_s S^{-}(z-y)\Lambda^{\nu}_{\beta}S^{+}(y-x)\Lambda^{\mu}_{\alpha}S^{a}(x-z)\}. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что в случае $\alpha,\beta = (1,\dots,8)$; $\alpha,\beta = (9,\dots,16)$ вклады прямой и кросс-диаграмм входят с одинаковым знаком и в матричный элемент $\langle p_s|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle$, и в матричный элемент $\langle p_p|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle$, в то время как полные матричные элементы для $\alpha=(1,\dots,8)$, $\beta=(9,\dots,16)$ равны нулю.

Таким образом:

$$\langle p_s|\,j^{\mu}_{\alpha}(x)\,j^{\nu}_{\beta}(y)\,|0\rangle = \frac{2g_v^2 g_s}{(2\pi)^4(2\pi)^8}\int dz\, e^{ipz}\int dq\,dp_2\,dp_1\, e^{iq(x-y)+ip_2(z-y)-ip_1(z-x)}\cdot$$

$$\cdot Sp\,I(-\hat{p}_1+m)\Lambda^{\mu}_{\alpha}(+\hat{q}+m)\Lambda^{\nu}_{\beta}(-\hat{p}_2+m)\,\theta(-q^0)\delta(q^2-m^2)\left\{\frac{\theta(-p_2^0)\delta(p_2^2-m^2)}{m^2-p_1^2-i\epsilon p_1^0} + \frac{\theta(-p_1^0)\delta(p_1^2-m^2)}{m^2-p_2^2+i\epsilon p_2^0}\right\} = \tag{6}$$

$$= \frac{2g_v^2 g_s e^{ipz}}{(2\pi)^8}\int dp_2\,dq\, e^{i(q+p_2)(x-y)}\,Sp\,I(-\hat{p}_1+m)\Lambda^{\mu}_{\alpha}(+\hat{q}+m)\Lambda^{\nu}_{\beta}(-\hat{p}_2+m)\cdot$$

$$\cdot\,\theta(-q^0)\delta(q^2-m^2)\left\{\theta(-p_2^0)\delta(p_2^2-m^2)\,P\frac{1}{m^2-p_1^2} + \theta(-p_1^0)\delta(p_1^2-m^2)\,P\frac{1}{m^2-p_2^2}\right\},$$

так как по предположению $p^2 = \mu^2 < 4m^2$.

В приложении А доказывается справедливость следующей формулы:

$$\theta(\pm p_1^0)\delta(p_1^2-m^2)P\frac{1}{p_2^2-m^2}+\theta(\pm p_2^0)\delta(p_2^2-m\ \ )P\frac{1}{p_1^2-m^2}= \tag{7}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}dz\frac{\partial}{\partial M^2}\theta(\mp(q^0-u^0))\delta((q-u)^2-M^2),$$

где

$$u=k+p\frac{1+z}{2},\quad k=q+p_2,\quad M^2(z)=m^2-(1-z^2)\frac{\mu^2}{4} \tag{7a}$$

(см.рис.1). В таком случае :

$$<p_s|j_\alpha^\mu(x)j_\beta^\nu(y)|0>=\frac{-g_v^2g_s\,e^{ipx}}{(2\pi)^6}\int dk\ e^{ik(x-y)}\ .$$

$$\cdot\int_{-1}^{+1}dz\int dq\ Sp\,I(-\hat{p}_1+m)\Lambda_\alpha^\mu(+\hat{q}+m)\Lambda_\beta^\nu(-\hat{p}_2+m)\,\theta(-q^0)\,\theta(-(u^0-q^0))\,\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2) \tag{8}$$

$$Sp(g_s+ig_p\gamma_5)(-\hat{p}_1+m)\Lambda_\alpha^\mu(+\hat{q}+m)\Lambda_\beta^\nu(-\hat{p}_2+m)= \tag{9}$$

$$=3\delta_{\alpha\beta}\{\pm 4g_sm(q-u)^2g^{\mu\nu}+8g_sm(q-u)^\alpha q^\beta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\pm$$

$$\pm(q-u)^\alpha[4g_smzp^\alpha g^{\mu\nu}+4g_sm(g^{\alpha\mu}p^\nu-p^\mu g^{\alpha\nu})+4g_pm\,\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\,p^\beta]+$$

$$+q^\alpha[4g_smz(g^{\mu\alpha}p^\nu+p^\mu g^{\alpha\nu}-g^{\mu\nu}p^\alpha)+4g_pm\,\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\,p^\beta]\pm 4g_sm^3g^{\mu\nu}\mp(1-z^2)g_sm\mu^2g^{\mu\nu}\}.$$

Здесь верхний знак соответствует $\alpha,\beta=(1,\dots,8)$, а нижний – $\alpha,\beta=(9,\dots,16)$.

Интегралы по q вычисляются в приложении В. В результате этих вычислений приходим к частному случаю представления Йоста-Лемана-Дайсона- представлению Дезера-Гильберта-Сударшана [3] для матричного элемента:

$$<p_s+p_p|j_\alpha^\mu(\frac{x}{2})j_\beta^\nu(-\frac{x}{2})|0>= \tag{10}$$

$$=\frac{-3g_v^2\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^6}\int_{-1}^{+1}dz\,e^{-iz\frac{px}{2}}\int_{(m+M(z))^2}^{\infty}d\zeta\int d^4u\,e^{iux}\,\theta(u^0)\delta(u^2-\zeta)\rho^{\mu\nu}(u,\zeta,z).$$

Для коммутатора соответствующее выражение принимает вид:

$$<p_s+p_p|[j_\alpha^\mu(\frac{x}{2})j_\beta^\nu(-\frac{x}{2})\ \ |0>= \tag{11}$$

$$=\frac{3g_v^2\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^6}\int_{-1}^{+1}dz\,e^{-iz\frac{px}{2}}\int_{(m+M(z))^2}^{\infty}d\zeta\int d^4u\,e^{iux}\,\epsilon(u^0)\delta(u^2-\zeta)\rho^{\mu\nu}(u,\zeta,z).$$

Имея в виду переход к равным временам, сохраним в $\rho^{\mu\nu}(u,\zeta,z)$ только члены, дающие ненулевой вклад в матричный элемент коммутатора при равных временах. Тогда

$$\bar{\rho}_{\mu\nu}(u,\zeta,z)=8g_sm\pi u^\mu u^\nu\frac{1}{\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}}\{\frac{(M^2-m^2)^3}{\zeta^3}-$$

$$-\frac{(M^2-m^2)(2M^2+m^2)}{\zeta^2}+\frac{M^2}{\zeta}\}\mp 2\pi\{g_smzpu\,g^{\mu\nu}+g_sm(u^\mu p^\nu-p^\mu u^\nu)+$$

$$
+ g_p m \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} p^{\beta} u^{\alpha} \} \frac{(M^2-m^2)^2-\zeta(M^2+m^2)}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}} -
\tag{12}
$$

$$
-2\pi \{ g_s m z (u^{\mu}p^{\nu}+p^{\mu}u^{\nu}-g^{\mu\nu}pu) + g_p m \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} p^{\beta} u^{\alpha} \} \frac{(M^2-m^2)^2-2M^2\zeta+\zeta^2}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}},
$$

где $\Delta(m^2, M^2, \zeta) = M^4+m^4+\zeta^2-2M^2m^2-2M^2\zeta-2m^2\zeta.$

Следовательно,

$$
\delta(x^0) < p_s + p_p | [j^0_{\alpha}(\frac{x}{2}) j^0_{\beta}(-\frac{x}{2})] | 0 > =
$$

$$
= \delta(x^0) \frac{3g_v^2 \delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^6 i} \int_{-1}^{+1} dz\, z \sin z \frac{px}{2} \int_{(m+M(z))^2}^{\infty} d\zeta \int d^4u\, e^{iux} \epsilon(u^0)\delta(u^2-\zeta) \cdot
\tag{13}
$$

$$
\cdot \{ \mp 2\pi g\, m p^0 u^0 \frac{(M^2-m^2)^2-\zeta(M^2+m^2)}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}} - 2\pi g_s m p^0 u^0 \frac{(M^2-m^2)^2-2M^2\zeta}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}} \} -
$$

$$
- \frac{3g_v^2 g_s m p_0 \delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^5} \delta(x^0) \int_{-1}^{+1} dz\, z \sin z \frac{px}{2} \int_{(m+M(z))^2}^{\infty} d\zeta \int d^4u\, e^{iux} \epsilon(u^0)\delta(u^2-\zeta) u^0 \cdot
$$

$$
\cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}}
$$

Вклад от первого слагаемого при равных временах равен нулю, что же касается второго слагаемого, то так как

$$
\int_{(m+M(z))^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\Delta(\zeta, M^2, m^2)}}
$$

расходится, следует рассмотреть вклад от второго слагаемого при равных временах более детально [4]. Рассмотрим для этого интеграл:

$$
\int_{(m+M(z))^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-2(M^2+m^2)\zeta+(M^2-m^2)^2}} \int d^4q\, e^{iqx} \epsilon(q^0) q^0 \delta(q^2-\zeta) \sin \ell x =
\tag{14}
$$

$$
= \frac{1}{2i} \int d\vec{u} \int du^0\, e^{iux} \{ \epsilon(u^0-\ell^0)(u^0-\ell^0)\rho((u-\ell)^2) - \epsilon(u^0+\ell^0)(u^0+\ell^0)\rho((u+\ell)^2) \}.
$$

Сделаем замену переменной $(u \pm \ell)^2 - (M+m)^2 = \xi_{\pm}$, тогда

$$
\int du^0 \{ \epsilon(u^0-\ell^0)(u^0-\ell^0)\rho((u-\ell)^2) - \epsilon(u^0+\ell^0)(u^0+\ell^0)\rho((u+\ell)^2) \} =
$$

$$
= - \lim_{B\to\infty} \{ \int_0^{C_+} \frac{d\xi_+}{\sqrt{\xi_+}\sqrt{\xi_+ + 4Mm}} - \int_0^{C_-} \frac{d\xi_-}{\sqrt{\xi_-}\sqrt{\xi_- + 4Mm}} \} =
$$

$$
= - \lim_{B\to\infty} \int_{C_-}^{C_+} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\sqrt{\xi+4Mm}} = 0,
$$

где $C_{\pm} = B - (M+m)^2 - (\vec{u} \pm \vec{\ell})^2.$

Таким образом,

$$
\delta(x^0) < p_s + p_p | [j^0_{\alpha}(\frac{x}{2}) j^0_{\beta}(-\frac{x}{2})] | 0 > = 0.
\tag{15}
$$

Рассмотрим теперь собственно швингеровские члены, то есть коммутатор (i =1,2,3):

$$\delta(x^0)\langle p_s+p_p|[j^0_\alpha(\frac{x}{2})\,j^1_\beta(-\frac{x}{2})]|0\rangle =$$

$$=\delta(x^0)\int_{-1}^{+1} dz\,\cos z\,\frac{px}{2}\int_{(m+M(z))^2}^{\infty} d\zeta\,\{\partial_1\partial_0 D(x)\rho_1(\zeta,z)+p_1\partial_0 D(x)\rho_2(\zeta,z)\}= \tag{16}$$

$$=\partial_1\delta(x)C_1+p_1\delta(x)C_2,$$

где

$$C_1=\frac{-3ig_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}dz\int_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{1}{\sqrt{\Delta(M^2(z),m^2,\zeta)}}\{\frac{(M^2-m^2)^3}{\zeta^3}-$$

$$-\frac{(M^2-m^2)(2M^2+m^2)}{\zeta^2}+\frac{M^2}{\zeta}\} \tag{17}$$

$$C_2=\frac{\mp 3g_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{+1}dz\int_{(m+M(z))^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{1}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2(z),m^2,\zeta)}}\{\zeta(M^2+m^2)-(M^2-m^2)^2\}. \tag{18}$$

Интегралы (17), (18) можно вычислить. Например, в случае $\beta=\frac{p^2}{4m^2}\ll 1$:

$$C_1=\frac{-3i\,g_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{\pi^2} \tag{19}$$

$$C_2=\frac{\mp 3g_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^2}, \tag{20}$$

а в случае $1-\beta\ll 1$ (см.приложение С):

$$C_1=\frac{-3i\,g_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{\pi^2}\,(\frac{5}{6}\pi^2-\frac{5}{4}) \tag{21}$$

$$C_2=\frac{\mp 3g_v^2g_s m\,\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^2}\,(5+\frac{\pi^2}{3}). \tag{22}$$

Что касается коммутаторов $\langle p_s+p_p|[j^i_\alpha(\frac{x}{2})\,j^j_\beta(-\frac{x}{2})]|0\rangle$, $(i,j=1,2,3)$, $i\neq j$,

то при равных временах эти коммутаторы содержат существенные бесконечности.

Способом, аналогичным предложенному выше, можно проверить утверждение[5], что в предполагаемое в алгебре токов равенство $(i,j=1,2,3)$:

$$\delta(x^0-y^0)[j^i_\alpha(x)\,j^j_\beta(y)]=i\,\delta(x-y)\,\delta_{ij}\,\epsilon_{\alpha\beta\delta}\,j^\delta_0(x)+ \tag{23}$$

$$+\ \text{члены, симметричные по }\alpha,\beta$$

следует добавить члены, антисимметричные по α,β и отличные от нуля при $i\neq j$. Рассмотрим для этого матричный элемент:

$$\langle a^{\delta}_{\lambda}(\vec p)|[j^i_\alpha(x)\,j^j_\beta(y)]|0\rangle, \tag{24}$$

где α,β,δ – изотопические индексы, а $a^{\delta(-)}_{\lambda}(\vec p)$ – соответствующим образом нормированный оператор уничтожения изовекторного поперечного фотона $(\lambda=1,2;\ i\neq j)$.

Матричный элемент, соответствующий прямой фейнмановской диаграмме, имеет вид:

$$< a^{\delta -}_{\lambda}(\vec{p}) \mid j^{i}_{\alpha}(x)\, j^{j}_{\beta}(y) \mid 0 > =$$

$$= \frac{-i g_v^3 \epsilon_{\delta\alpha\beta} \epsilon^{\lambda}_{\mu}\, e^{ipx}}{2(2\pi)^6} \int dk\, e^{ik(x-y)} \int_{-1}^{+1} dz \int dq\, Sp\, \gamma^{\mu}(\hat{p}_1+m)\gamma^{i}(+\hat{q}+m)\gamma^{j}(-\hat{p}_2+m)\cdot \tag{25}$$

$$\cdot\, \theta(-q^0)\, \theta(-(u^0-q^0))\, \delta(q^2-m^2) \frac{\partial}{\partial M^2} \delta((q-u)^2-M^2).$$

Легко убедиться, что кросс-член дает такой же вклад. В системе координат, где $\epsilon^{\lambda}_{0} = 0$:

$$\delta(x^0) < a^{\delta -}_{\lambda}(\vec{p}) \mid j^{i}_{\alpha}\left(\frac{x}{2}\right) j^{j}_{\beta}\left(-\frac{x}{2}\right)] \mid 0 > =$$

$$= \frac{-g_v^3 m^2}{(2\pi)^2} \epsilon_{\delta\alpha\beta}\, \delta(x^0) \int_{-1}^{+1} dz\, e^{-iz\frac{px}{2}} \int_{4m^2}^{\infty} d\zeta\, p^0 \partial_0 \{ \epsilon^{\lambda}_{i} \partial_j - \epsilon^{\lambda}_{j} \partial_i \} D(x,\zeta) \frac{1}{\zeta^2 \sqrt{1-\frac{4m^2}{\zeta}}} =$$

$$= \frac{-g_v^3}{(2\pi)^2} \epsilon_{\delta\alpha\beta}\, p^0 \{ \epsilon^{\lambda}_{i} \partial_j \delta(x) - \epsilon^{\lambda}_{j} \partial_i \delta(x) \},$$

что соответствует утверждению /5/.

Автор благодарит В.П.Павлова, М.К.Поливанова, А.Д.Суханова, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорова за обсуждение.

Приложение А

Докажем справедливость формулы (7). Используя формулу

$$\frac{1}{m^2 - p_1^2 + i\epsilon p_1^0} = P \frac{1}{m^2 - p_1^2} - i\pi\epsilon(p_1^0)\,\delta(p_1^2 - m^2),$$

легко видеть, что

$$\epsilon(p_1^0)\,\delta(p_1^2-m^2)\, P \frac{1}{p_2^2 - m^2} + \epsilon(p_2^0)\,\delta(p_2^2 - m^2)\, P \frac{1}{p_1^2 - m^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im} \left\{ \frac{1}{m^2 - p_1^2 + i\epsilon p_1^0} \quad \frac{1}{m^2 - p_2^2 + i\epsilon p_2^0} \right\} = \tag{A.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{Im} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\{(q-u)^2 - M^2(z) + i\epsilon(q^0-u^0)\}^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{\partial}{\partial M^2} \epsilon(q^0 - u^0)\, \delta(q-u)^2 - M^2),$$

где

$$u = k + p\,\frac{1+z}{2}, \quad k = q + p_2,\ p = p_1 - p_2,\ M^2(z) = m^2 - (1-z^2)\frac{p^2}{4}$$

(см.рис.1).

Аналогично, используя формулу:

$$\frac{1}{m^2 - p_1^2 - i\epsilon} = P \frac{1}{m^2 - p_1^2} + i\pi\,\delta(p_1^2 - m^2),$$

получаем:

$$\delta(p_1^2 - m^2)\, P \frac{1}{p_2^2 - m^2} + \delta(p_2^2 - m^2)\, P \frac{1}{p_1^2 - m^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{\partial}{\partial M^2} \delta((q-u)^2 - M^2(z)). \tag{A.2}$$

Из (А.1), (А.2) следует (7).

Приложение B

Вычислим интеграл: $\int d^4q\,\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2)$.

Сделаем для этого обычную замену:

$$q^0 = q\,\mathrm{ch}\,\xi$$

$$|\vec{q}| = q\,\mathrm{sh}\,\xi$$

и выберем систему координат, в которой $\vec{u} = 0$, тогда при $u^2 \geq (m+M)^2$ интеграл (1.B) равен

$$2\pi m^2\frac{\partial}{\partial M^2}\int d\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-1}\;\delta(m^2+u^2-M^2-2m\sqrt{u^2}\,\mathrm{ch}\,\xi) =$$

$$= \frac{\pi}{2u^2}\frac{\partial}{\partial M^2}\sqrt{\Delta(m^2,M^2(z),u^2)}\,,$$

где

$$\Delta(m^2,M^2,u^2) = M^4+m^4+u^4-2m^2M^2-2m^2u^2-2M^2u^2\,.$$

Таким образом:

$$\int d^4q\,\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{M^2-m^2-\zeta}{\zeta\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}\,\delta(u^2-\zeta)\,. \qquad (1.B)$$

Аналогичным способом можно доказать следующие формулы:

$$\int d^4q\,q^\alpha\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}u^\alpha\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{(M^2-m^2)^2-2M^2\zeta+\zeta^2}{\zeta^2\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}\,\delta(u^2-\zeta) \qquad (2.B)$$

$$\int d^4q\,(q-u)^\alpha\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}u^\alpha\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{(M^2-m^2)^2-\zeta(M^2+m^2)}{\zeta^2\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}\,\delta(u^2-\zeta) \qquad (3.B)$$

$$\int d^4q\,(q-u)^\alpha q^\beta\delta(q^2-m^2)\frac{\partial}{\partial M^2}\delta((q-u)^2-M^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{8}g^{\alpha\beta}\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}(M^2-m^2-\zeta)}{\zeta^2}\,\delta(u^2-\zeta)+ \qquad (4.B)$$

$$+\frac{\pi}{2}u^\alpha u^\beta\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}d\zeta\,\frac{1}{\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}\left\{\frac{(M^2-m^2)^3}{\zeta^3}-\frac{(M^2-m^2)(2m^2+m^2)}{\zeta^2}+\frac{M^2}{\zeta}\right\}\delta(u^2-\zeta).$$

Приложение C

Простой заменой интеграл $\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}\frac{d\zeta}{\zeta^n\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}$

сводится к следующему:

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty}\frac{d\zeta}{\zeta^n\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}} = 2\int\limits_0^1\frac{dx(1-x^2)^{n-1}}{\{(M+m)^2-(M-m)^2x^2\}^n}\,, \qquad (1.C)$$

а этот интеграл, в свою очередь, сводится к присоединенным функциям Лежандра. Таким образом, имеем ($\frac{M}{m} = \iota$, $t = \sqrt{1-(1-z)^2\beta}$, $\beta = \frac{p^2}{4m^2} < 1$).

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\Delta}} = \frac{2}{m^2(1-t^2)}\, Q_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^2\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{m^4(1-t^2)^2}\left\{ 2Q_1\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{1-t}{1+t}\, Q_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right\} \tag{2.C}$$

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^3\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{m^6(1-t^2)^3}\left\{ 2Q_2\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{3}{2}\,\frac{(1-t)}{(1-t)}\, Q_1\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}\, Q_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right\}.$$

В результате

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} d\zeta\, \frac{\zeta(M^2+m^2)-(M^2-m^2)^2}{\zeta^2\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}} = 2 + \frac{\ln t}{1-t} - \frac{1}{2}\ln t \tag{3.C}$$

$$\int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\Delta(m^2,M^2,\zeta)}}\left\{ \frac{(M^2-m^2)^3}{\zeta^3} - \frac{(M^2-m^2)(2M^2+m^2)}{\zeta^2} + \frac{M^2}{\zeta}\right\}$$

$$= 3\left\{\frac{\ln t}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1}\right\} + \frac{5}{2}\left\{\frac{\ln t}{t-1} - 1\right\} + 2 + \frac{1}{8}\ln t\,. \tag{4.C}$$

Вычисление интегралов по z довольно громоздко. В частном случае $1-\beta \ll 1$ имеем:

$$\int\limits_{-1}^{+1} dz \int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} d\zeta\, \frac{\zeta(M^2+m^2)-(M^2-m^2)^2}{\zeta^2\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}} = 5 + \frac{\pi^2}{3} \tag{5.C}$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} dz \int\limits_{(m+M)^2}^{\infty} d\zeta\, \frac{1}{\sqrt{\Delta(M^2,m^2,\zeta)}}\left\{\frac{(M^2-m^2)^3}{\zeta^3} - \frac{(M^2-m^2)(2M^2+m^2)}{\zeta^2} + \frac{M^2}{\zeta}\right\} = \frac{5}{6}\pi^2 - \frac{5}{4}\,. \tag{6.C}$$

Литература

1. K.Johnson, F.E.Low, Suppl. Progz. Theor. Phys. 37-38, 74 (1966).
2. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов. "Вопросы теории дисперсионных соотношений".
3. S.Deser, W.Gilbert, E.C.G. Sudarshan. Phys.Rev. 115, 731 (1959). N.Nakanishi. Progr.Theor.Phys. 25, 296 (1961).
4. B. Schroer, P.Stichel. Preprint Pittsburg 1967.
5. F. Buccella, G.Veneziano, R.Gatto, S.Okubo. Phys.Rev. 149,1268 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 января 1968 года.

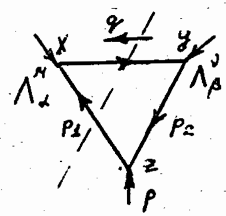

Рис. 1.

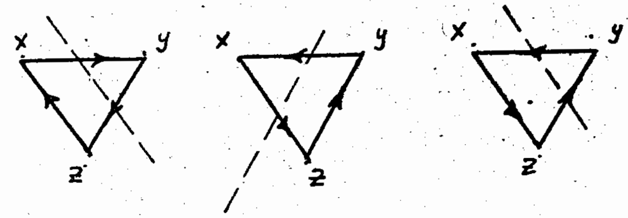

Рис. 2.