ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3648

Д.Стоянов, Хр.Я.Христов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2)

1967.

P2 - 3648

Д.Стоянов, Хр.Я.Христов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2)

В в е д е н и е

В последнее время в связи с работами Швингера[1,2] возник интерес к нелинейным представлениям групп Ли. Хотя понятие "нелинейные представления групп Ли" мало употреблялось, можно сказать, что теория их хорошо разработана, и любой используемый нами факт в настоящей работе можно найти в любой книге, в которой рассматривается вопрос о непрерывных группах преобразования. Некоторые из них мы перечисляем в конце работы[3,4,5]. Это, по существу, классические работы по группам Ли, так как построить их представления, если отказаться от линейности последних, все равно, что построить саму трансформационную группу в n -мерном пространстве с заданными структурными постоянными.

В настоящей работе рассматриваются и находятся все (непрерывно-дифференцируемые) представления группы $SU(2)$.

Найден простой вид для генераторных функций представлений этой группы, а также и сами нелинейные преобразования, являющиеся ее представлениями. В большинстве своем, это дробно-линейные преобразования, что не удивительно – связь группы $SU(2)$ с дробно-линейными преобразованиями комплексной плоскости давно известна[6,7,8]. Кроме того, получается представление, не являющееся дробно-линейным, и оказывающееся эквивалентным линейному двумерному спинорному представлению.

И, наконец, рассмотрены примеры представлений, которые мы приводим в канонический вид. Рассмотрено также нелинейное представление группы $SU(2)$, данное Швингером[9], и показано, что оно приводимо (имеет два независимых инварианта) и относится к нелинейным представлениям нормального типа.

Теперь выберем в пространстве R_n такую систему координат, где

$$A^0_k = -i x_k \tag{1.5}$$

В силу непрерывности и непрерывной дифференцируемости $M^0_k(t_j), (Q \equiv \{t_j\} \in D)$ всегда возможно найти преобразование

$$x_k = x_k(t_j) \qquad \det \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right\} \neq 0, \tag{1.6}$$

которое в новых координатах $A^0_k \equiv M^0_k$ имело бы вид (1.5). Как известно, $x_k(t_j)$ должны при этом удовлетворять следующим уравнениям

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_j} M^0_j = -i x_k . \tag{1.7}$$

Наше утверждение непосредственно следует из общей теории неоднородных линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см., например, /11/). Систему, в которой R_n имеет вид (1.5), будем называть канонической. Еще заметим, что в пространстве R_n канонические системы образуют бесконечное множество. В канонической системе функции A^1_k являются однородными функциями нулевого порядка. Действительно, из (1.4) для $\alpha = +1$ получаем

$$[A^0, A^1]_i \equiv i x_j \frac{\partial A^1_i}{\partial x_j} - i A^1_j \delta_{ij} = -i A^1_i \tag{1.8}$$

или

$$x_j \frac{\partial A^1_i}{\partial x_j} = 0 . \tag{1.9}$$

Таким образом,

$$A^1_i = A^1_i(z_p) , \tag{1.10}$$

где

$$z_p = \frac{x_p}{x_n} .$$

Делая дальнейшую конкретизацию канонической системы координат, мы потребуем, чтобы

$$A^1_i = 1 \text{ для всех } i = 1 \div n . \tag{1.11}$$

Переход из произвольной канонической системы в ту, в которой выполняется (1.11), совершается с помощью преобразования

$$y_i = y_i(x_k) \qquad \det\left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\} \neq 0 \tag{1.12}$$

Это преобразование прежде всего должно сохранять вид функций A^0_k (переход из одной канонической в другую каноническую систему). Поэтому $y_i(x_k)$ должны удовлетворять следующим уравнениям

$$i \frac{\partial y_i}{\partial x_\ell} x_\ell = i y_i ; \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_\ell} A^1_\ell(z_p) = 1 . \tag{1.13}$$

Из первого уравнения получаем:

$$y_i = x_i + x_n H_i(z_p) , \tag{1.14}$$

где $H_i(z_p)$ – однородная функция нулевого порядка. Из второго уравнения (1.13) получаем следующие уравнения для $H_i(z_p)$

$$[A^1_p(z_q) - z_p A^1_n(z_q)] \frac{\partial H_i(z_q)}{\partial z_p} + H_i(z_q) A^1_n(z_q) + A^1_i(z_q) - 1 = 0 \quad {}^{*)} \tag{1.15}$$

(см. замечание в конце работы).

В силу непрерывности и непрерывной дифференцируемости очевидно, что решение уравнений (1.15) существует.

В новом базисе

$$A^0_i = -i y_i ; \quad A^1_i = 1 \tag{1.16}$$

и A^{-1}_i является однородной функцией второго порядка. Действительно, из (1.4) для $a = -1$ имеем

$$[A^0, A^{-1}]_i = i\, y_j \frac{\partial A_i^{-1}}{\partial y_j} - i\, A_j^{-1} \delta_{ij} = A_i^{-1} \tag{1.17}$$

или

$$y_j \frac{\partial A_i^{-1}}{\partial y_j} = 2 A_j^{-1} . \tag{1.18}$$

И, наконец, из третьего уравнения (1.4) получаем

$$\sum_\ell \frac{\partial A_i^{-1}}{\partial y_\ell} = -\, 2 y_i . \tag{1.19}$$

Из последнего вытекает, что

$$A_i^{-1}(y_k) = -\, y_i^2 + K_i^2(y_\ell) , \tag{1.20}$$

где $K_i^2(y_\ell)$– однородная функция второго порядка, удовлетворяющая уравнениям:

$$\sum_\ell \frac{\partial K_i^2}{\partial y_\ell} = 0 . \tag{1.21}$$

Следовательно, решая (1.21), и подставляя в (1.20), получаем окончательно для $A_i^{-1}(y_k)$ следующее выражение:

$$A_i^{-1} = -\, y_i^2 + (y_{n-1} - y_n)^2\, P_i(v_\alpha) , \tag{1.22}$$

где $P_i(v_\alpha)$ - произвольные функции аргументов

$$v_\alpha = \frac{y_\alpha - y_n}{y_{n-1} - y_n} . \tag{1.23}$$

Теперь мы еще раз сделаем преобразование координатной системы

$$u_i = u_i(y_k) \tag{1.24}$$

с целью превратить все $P_i(v_\alpha)$ в нуль. Преобразование (1.24) прежде всего должно сохранять вид функции A^0_i и A^1_i (1.16), т.е.

$$y_k \frac{\partial u_i}{\partial y_k} = u_i \tag{1.25}$$

$$\sum_\ell \frac{\partial u_i}{\partial y_\ell} = 1 \tag{1.26}$$

Решая последние уравнения, находим

$$u_i = y_i + (y_{n-1} - y_n)\, G_i(v_\alpha), \tag{1.27}$$

где $G_i(v_\alpha)$ – произвольные функции аргументов (1.23). Уравнения для них можно получить из требования исчезновения $P_i(v_\alpha)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j} A^{-1}_j = -u^2_i . \tag{1.28}$$

Подставляя в последнее u_i из (1.27) и A^{-1}_j из (1.22), после простых, но длинных выкладок, которые мы даем в приложении А, получаем

$$G_{i,\beta}\Phi_\beta + G_i(2v_i + P_{n-1} - P_n - 1) + G^2_i + P_i = 0, \tag{1.29}$$

(без суммирования по i)

где $$G_{i,\beta} = \frac{\partial G_i}{\partial u_\beta};$$

$$\Phi_\beta = P_\beta - v_\beta P_{n-1} + (v_\beta - 1)P_n + v_\beta(1 - v_\beta) \tag{1.29^1}$$

(без суммирования по β)

и

$$v_i = \begin{cases} v_\alpha & \text{для } i = \alpha \\ 1 & \text{для } i = n-1 \\ 0 & \text{для } i = n \end{cases}$$

Подставляя $$G_i = -v_i + N_i(v_\alpha) \qquad (1.30)$$

в (1.29), получаем

$$N_{i,\beta}\Phi_\beta + N_i(P_{n-1} - P_n - 1) + N_i^2 + P_n = 0 \qquad (1.31)$$

Тогда

$$u_i = y_n + (y_{n-1} - y_n) N_i. \qquad (1.32)$$

Теперь снова, в силу непрерывности и непрерывной дифференцируемости Φ_β по v_β, в чем легко убедиться, следует существование решения уравнения (1.31). Якобиан преобразования (1.32) имеет вид:

$$\det\{\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\} = \det(N_{i,\beta}, N_i, 1) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \ldots & N_{1,n-2} & N_1 & 1 \\ N_{2,1} & N_{2,2} & \ldots & N_{2,n-2} & N_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{n,1} & N_{n,2} & \ldots & N_{n,n-2} & N_n & 1 \end{pmatrix} = \det \| N_{ik} \| \qquad (1.33)$$

Используя матрицу одного якобиана N_{ik}, уравнение (1.31) можно записать в виде:

$$N_{ik}\Phi_k = -N_i^2, \qquad (1.34)$$

где

$$\Phi_k = \begin{cases} \Phi_\beta & k = \beta \\ P_{n-1} - P_n - 1 & k = n-1 \\ 1 & k = n \end{cases} \tag{1.35}$$

Если хотя бы одно из $\Phi_\beta \neq 0$, то уравнение (1.31) имеет бесконечное число частных решений, из которых всегда можно выбрать такие, что

$$\det \| N_{ik} \| \neq 0. \tag{1.36}$$

Последнее следует из того факта, что неоднородное уравнение с матрицей N_{ik} имеет ненулевое решение.

Если же все $\Phi_\beta = 0$, тогда, согласно (1.31), имеются не больше двух разных N_i, и поэтому условие (1.36) не может быть выполнено, если размерность пространства R_n больше двух. Этот случай мы рассмотрим особо.

Таким образом, всю совокупность представлений группы $SU(2)$ можно разбить на две части:

1) представления, для которых имеется хотя бы одно

$$\Phi_\beta \neq 0 ;$$

2) представления, для которых все

$$\Phi_\beta = 0 .$$

Первые будем называть нормальными, вторые - вырожденными представлениями.

Для первых мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Все нормальные представления группы $SU(2)$ эквивалентны представлению с генераторными функциями:

$$A_k^{-1} = -x_k^2 ; \quad A_k^0 = -i\, x_k ; \quad A_k^1 = 1 \tag{1.36}$$

Координатную систему, в которой генераторные функции имеют нормальный вид (1.36), будем называть нормальной канонической системой.

§ 2. Инварианты нелинейных представлений группы $SU(2)$. Приводимость

Как известно, инвариантом представления является функция $I(x_k)$, которая удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial x_k} A_k^{-1} = 0 \, ; \quad \frac{\partial I}{\partial x_k} A_k^{0} = 0 \, ; \quad \frac{\partial I}{\partial x_k} A_k^{1} = 0 \qquad (2.1)$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что генераторные функции любого представления можно привести к виду

$$A_k^{-1} = -y_k^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 P_k(v_\alpha) \, ; \quad A_k^0 = -i\, y_k ; \quad A_k^1 = 1 \, . \qquad (2.2)$$

(См. (1.16); (1.22) и (1.23)). Тогда вместо (2.1) имеем

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} [-y_k^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 P_k(v_\alpha)] = 0 \, ; \quad \frac{\partial I}{\partial y_k} y_k = 0 \, ; \quad \sum_k \frac{\partial I}{\partial y_k} = 0. \qquad (2.3)$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$I = I(v_\alpha), \qquad (2.4)$$

которое представлено в первое из (2.3) и дает

$$\frac{\partial I}{\partial v_\beta} \Phi_\beta = 0 \, , \qquad (2.5)$$

где Φ_β дается формулой (1.29^1).

Для нормальных представлений очевидно, что (2.5) имеет $n-3$ функционально независимые решения, которые обозначим через

$$I_\xi = I_\xi(v_\alpha) \, . \qquad (2.6)$$

В случае вырожденных представлений в силу того, что для них все $\Phi_\beta = 0$, и если удовлетворены первые два уравнения (2.3), то третье удовлетворяется тождественно. Таким образом, вырожденные представления имеют $n-2$ функционально независимые инварианты

$$I_\alpha = I_\alpha(v_\beta), \tag{2.7}$$

в частности,

$$I_\alpha \equiv v_\alpha . \tag{2.8}$$

Найдем все инварианты нормального представления в нормальном каноническом базисе. Функции (2.7) при этом должны ы удовлетворять еще следующему уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial x_k} x_k^2 = 0, \tag{2.9}$$

откуда, используя (2.7), получаем:

$$\sum_\alpha v_\alpha (v_\alpha - 1) \frac{\partial I}{\partial v_\alpha} = 0 . \tag{2.10}$$

Соответствующую (этому уравнению) систему обыкновенных дифференциальных уравнений напишем в виде:

$$\frac{d v_\alpha}{v_\alpha (v_\alpha - 1)} = \frac{d v_{n-2}}{v_{n-2}(v_{n-2} - 1)} . \tag{2.11}$$

Как уже отмечали, система (2.11) имеет n −3 функционально независимые первые интегралы:

$$w_\zeta \equiv \frac{v_{n-2}(v_\xi - 1)}{v_\xi (v_{n-2} - 1)} = C_\xi . \tag{2.12}$$

И, следовательно, произвольная функция от переменных W_ξ является инвариантом нормального представления:

$$I_\xi = I_\xi(w_\eta), \tag{2.13}$$

в частности,

$$I_\xi \equiv w_\xi . \tag{2.14}$$

Теперь введем новые переменные с помощью формул:

$$w_\xi = \frac{v_{n-2}(v_\xi - 1)}{v_\xi(v_{n-2} - 1)} \qquad v_\alpha = \frac{x_\alpha - x_n}{x_{n-1} - x_n}$$

$$w_{n-2} = x_{n-2} \tag{2.15}$$

$$w_{n-1} = x_{n-1}$$

$$w_n = x_n .$$

Легко убедиться, что в базисе, выбранном таким образом, генераторные функции данного представления имеют вид:

$$A^{-1}_\xi = A^0_\xi = A^1_\xi = 0 .$$

$$A^{-1}_\alpha = -w^2_\alpha ; \quad A^0_\alpha = -i\, w_\alpha ; \quad A^1_\alpha = 1 \qquad a = n-2,\ n-1,\ n .$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема II . Любое нормальное представление группы $SU(2)$ имеет $n-3$ инварианта, поэтому оно приводимо и распадается на $n-3$ скалярных (т.е. одномерных инвариантных) представлений и трехмерное неприводимое представление.

§3. Вырожденные представления

Как уже отметили, для них все Φ_β из (1.29^1) равны нулю и, согласно (1.31), уравнение для приведения операторов A в нормальную форму, имеет вид

$$N^2 + N(P_{n-1} - P_n - 1) + P_n = 0 , \tag{3.1}$$

которое, вообще говоря, имеет не больше двух решений. Поэтому можно выбрать не больше двух функционально-независимых решений для преобразования (1.32), причём будем различать два случая:

а). Уравнение (3.1) имеет два различных решения. Тогда можно перейти к координатам

$$u_\alpha = I_\alpha(v_\beta),$$

$$u_{n-1} = y_n + (y_{n-1} - y_n) N_1 \tag{3.2}$$

$$u_n = y_n + (y_{n-1} - y_n) N_2 ,$$

где v_β дается формулой (1.23); N_1 и N_2 – два корня уравнения (3.1), а $I_\alpha(v_\beta)$ – инварианты вырожденного представления (как отмечали в предыдущем параграфе, их $n-2$ функционально независимы). Тогда легко получить, что в новых координатах $u_i(y)$ из (3.2), генераторные функции будут иметь следующий вид:

$$A^{-1}_\alpha = A^0_\alpha = A^1_\alpha = 0 \tag{3.3}$$

$$A^{-1}_b = -u^2_b ; \; A^0_b = -iu_b ; \; A^1_b = 1 , \quad \text{где} \quad b = n-1, n$$

б). Уравнение (3.1) имеет двойной корень, т.е.

$$N_1 = N_2 .$$

Начнем с предположения, что мы уже сделали следующее преобразование:

$$u_\alpha = I_\alpha(v_\beta)$$

$$u_{n-1} = y_{n-1} \tag{3.4}$$

$$u_n = y_n ,$$

благодаря чему для генераторных функций получаем следующие выражения

$$A^{-1}_\alpha = A^0_\alpha = A^1_\alpha = 0 \tag{3.5}$$

$$A^{-1}_b = -u^2_\alpha + (u_{n-1} - u_n)^2 P_b(v_\alpha)$$

$$A_b^0 = -i\,u_\alpha \qquad b = n-1,\, n \tag{3.6}$$

$$A_b^1 = 1$$

Цель этого пункта – посмотреть, возможно ли, как и раньше, найти такую систему координат, где $P_b = 0$. Для этого нам нужно найти, как преобразуется $P_b(v_\alpha)$, если мы перейдем к новому базису:

$$w_\alpha = u_\alpha$$

$$w_b = u_n + (u_{n-1} - u_n) N_b \qquad b = n-1,\, n. \tag{3.7}$$

Во-первых, видно, что A_α^{-1}, A_α^0 и A_α^1 снова будут равняться нулю. Во-вторых, после преобразования (3.7) A_b^0 и A_b^1 не изменят свой вид, т.е.

$$A_b^0 = -i\,w_b\,; \quad A_b^1 = 1,$$

тогда как A_b^{-1} перейдет в

$$(A_b^{-1})' = -w_b^2 + (w_{n-1} - w_n)^2\, P_b'(s_\alpha)$$

$$s_\alpha = \frac{w_\alpha - w_n}{w_{n-1} - w_n}. \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) для $(A_b^{-1})'$ следует из коммутационных соотношений, которые определяют A_b^{-1} (при точно заданных A_b^0 и A_b^1) с точностью до произвольной функции типа $P_b(v_\alpha)$. Очевидно, что $P_b(v_\alpha)$ и $P_b^1(s_\alpha)$ связаны между собой. Эту связь можно получить, исходя из обычного уравнения преобразования генераторных функций

$$\frac{\partial w_a}{\partial y_b} A_b^{-1} = (A_b^{-1})' \qquad a, b \to n-1,\, n. \tag{3.9}$$

(Здесь принято во внимание, что $A_\alpha^{-1} = 0$, а w_α–инварианты представления и, следовательно, $(A_\alpha^{-1})' = 0$). Подставляя (3.6), (3.7) и (3.8) в (3.9), после несложных выкладок получаем:

$$P'_{n-1} = \frac{N_{n-1}^2 + N_{n-1}(P_{n-1} - P_n - 1) + P_n}{(N_{n-1} - N_n)^2}$$

$$P'_n = \frac{N_n^2 + N_n(P_{n-1} - P_n - 1) + P_n}{(N_{n-1} - N_n)^2} . \tag{3.10}$$

Попутно заметим, что из (3.10) также можно вывести результаты предыдущего пункта. Действительно, если хотим, чтобы $P'_{n-1} = P'_n = 0$, то видно, что следует решать уравнение (3.1), а N_{n-1} и N_n являются корнями этого уравнения. Но мы этого можем добиться, если, конечно, корни разные $N_{n-1} \neq N_n$.

В этом пункте $N_{n-1} = N_1 = N_n = N_2$ и, следовательно, выражения (3.10) – неопределенные. В силу этой неопределенности мы могли бы снова положить $P'_{n-1} = P'_n = 0$. Но добиться этого не удастся, т.к. преобразование (3.7) окажется особым. Поэтому мы применим следующий прием. Положим, что

$$P'_{n-1} = 0, \qquad P'_n = k, \qquad \text{где} \quad k = \mathrm{const}. \tag{3.11}$$

Тогда N_{n-1} является кратным корнем уравнения (3.1), а для N_n сейчас уже будет уравнение

$$N_n^2 + N_n(P_{n-1} - P_n - 1) + P_n = k(N_{n-1} - N_n)^2 \tag{3.12}$$

или еще

$$(1-k)N_n^2 + N_n(P_{n-1} - P_n - 1) + 2kN_{n-1}N_n + P_n - kN_{n-1}^2 = 0 \tag{3.13}$$

Имея ввиду, что дискриминант уравнения (3.1)

$$\mathfrak{D} = (P_{n-1} - P_n - 1)^2 - 4P_n = 0 , \tag{3.14}$$

то

$$N_{n-1} = -\frac{P_{n-1} - P_n - 1}{2} \tag{3.15}$$

и, следовательно,

$$N^2_{n-1} = P_n \ . \tag{3.16}$$

Имея ввиду все это для N_n, получаем следующее уравнение

$$(1-k)\,[\,N^2_n + (P_{n-1} - P_n - 1)\,N_n + P_n\,] = 0 . \tag{3.17}$$

Для того, чтобы N_n не совпадало с N_{n-1}, можно подобрать $k=1$, и тогда N_n останется произвольным. Это означает, что N_n уже можно выбрать так, чтобы преобразование (3.7) не было особое, (т.е. якобиан (3.7) был отличным от нуля). Но (3.11) показывает, что в случае кратных корней представление нельзя привести к нормальному виду типа (1.36). Из (3.8) и (3.11), когда $k = 1$, видно, что

$$A^{-1}_{\alpha} = A^0_{\alpha} = A^1_{\alpha} = 0 .$$

$$\begin{gathered} A^{-1}_{n-1} = -w^2_{n-1} \qquad A^0_{n-1} = -i\,w_{n-1} \quad A^1_{n-1} = 1 \\ A^{-1}_n = -w^2_n + (w_{n-1} - w_n)^2 \quad A^0_n = -i\,w_n \quad A^1_n = 1 \end{gathered} \tag{3.18}$$

Из (3.18) следует, что рассматриваемые представления тоже приводимы, и они распадаются на $n-2$-инвариантных представления и двухмерное неприводимое представление.

Первые из рассматриваемых вырожденных представлений будем называть обыкновенными, а вторые – кратными.

Таким образом, в этом параграфе мы доказали следующую теорему.

Теорема III. Любое вырожденное представление группы в n-мерном пространстве приводимо и распадается на $n-2$ инварианта и двухмерное представление. Причём существуют два типа двухмерных представлений – обыкновенное, генераторные функции которого задаются формулами (3.3), и кратное с генераторными функциями (3.18).

Заканчивая рассмотрение генераторных функций, мы можем сделать следующие выводы, основываясь на всем сказанном до сих пор.

Группа $SU(2)$ имеет конечное число неэквивалентных между собой нелинейных представлений: инвариантное, два двухмерных и трехмерное представления. Все остальные в n-мерном пространстве вполне приводимы и распадаются определенным образом на перечисленные выше представления.

§4. Общий вид нелинейного преобразования, являющегося представлением группы SU(2)

а). Нормальные представления

Как уже видели, генераторные функции нормальных представлений всегда могут быть заданы формулами:

$$A_k^{-1} = -x_k^{*} \; ; \quad A_k^{0} = -i x_k \; ; \quad A_k^{1} = 1 . \tag{4.1}$$

Мы еще видели, что обыкновенные вырожденные представления тоже имеют вид (4.1). Разница заключается лишь в том, что для нормальных $k=1,2,3$, а для последних $k=1,2$. Поэтому мы, не фиксируя пределы изменения индекса k, рассмотрим оба представления вместе, помня сказанное выше.

Любой элемент группы $SU(2)$ может быть параметризован разными способами. Выберем два из них

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = g(\phi, \theta, \psi) \in SU(2), \tag{4.2}$$

где α_1, α_2 и α_3 в трехмерном векторном представлении группы $SU(2)$ являются углами поворота вокруг первой, второй и третьей оси соответственно, а ϕ, θ, ψ – углы Эйлера поворота в том же представлении.

Пусть $\Phi_i(a_\mu x_k)$ и $F(\phi, \theta, \psi, x_k)$ два одинаковых представления (нелинейных) $SU(2)$, разным образом параметризованные. Тогда запишем следующее тождество:

$$\Phi_i(a_\mu, F_i(\phi, \theta, \psi, x_k) = F_i(\phi(a_\mu), \theta(a_\mu), \psi(a_\mu), x_k), \tag{4.3}$$

где функции $\phi(a_\mu)$, $\theta(a_\mu)$ и $\psi(a_\mu)$ не зависят от представления, а лишь от закона произведения в группе. Поэтому их можно найти, перемножая два элемента (4.2). Дифференцируя тождество (4.3) по a_μ и потом полагая $a_\mu=0$, получим

$$M^1_\ell(F_j) = \cos\psi \frac{\partial F_\ell}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \sin\psi \frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} + \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \frac{\partial F_\ell}{\partial\phi}$$

$$M^2_\ell(F_j) = \sin\psi \frac{\partial F_\ell}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta \cos\psi \frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} - \frac{\cos\psi}{\sin\theta} \frac{\partial F_\ell}{\partial\phi} \tag{4.4}$$

$$M^0_\ell(F_j) = \frac{\partial F_\ell}{\partial\psi}.$$

Если перейдем к функциям A^{-1}, A^0 и A^1, учитывая (4.1), получим следующие дифференциальные уравнения для $F_\ell(g, x)$

$$e^{-i\psi}\left(i \frac{\partial F_\ell}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_\ell}{\partial\phi}\right) = -F^2_\ell$$

$$e^{i\psi}\left(i \frac{\partial F_\ell}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_\ell}{\partial\phi}\right) = 1 \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} = -i F_\ell$$

с начальным условием

$$F_\ell\,(0,0,0,x_k) = x_\ell\,. \tag{4.6}$$

После подстановки

$$F_\ell = e^{-i\psi} U_\ell\,(\theta,\phi,x_k) \tag{4.7}$$

имеем:

$$i\frac{\partial U_\ell}{\partial\theta} - i\,\mathrm{ctg}\,\theta\; U_\ell - \frac{1}{\sin\theta}\;\frac{\partial U_\ell}{\partial\phi} = -U_\ell^2$$

$$i\frac{\partial U_\ell}{\partial\theta} + i\;\mathrm{ctg}\,\theta\; U_\ell + \frac{1}{\sin\theta}\;\frac{\partial U_\ell}{\partial\phi} = 1 \tag{4.8}$$

(последнее уравнение из (4.5) удовлетворяется тождественно). Система (4.8) с начальным условием (4.6) решается легко (см.приложение B) и в результате получаем:

$$F_\ell(\phi,\theta,\psi,x_k) = e^{-i\psi}\;\frac{(1+e^{i\theta})x + e^{i\phi}(1-e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})x + e^{i\phi}(1+e^{i\theta})}\;, \tag{4.9}$$

где ℓ принимает значения 1,2,3 для нормального и 1,2 для обыкновенного вырожденного представления.

б).Вырожденное кратное представление.

Как уже отмечали, рассматриваемые в этом пункте представления не могут быть приведены в нормальную каноническую форму типа (3.3). Самый простой вид их генераторной функции дается формулой (3.18). Поэтому, сделав аналогичные рассуждения, что и в предыдущем пункте для $F_1\,(\phi,\theta,\psi,x)$,получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} = -i\,F_\ell$$

$$i\frac{\partial F_\ell}{\partial\theta} - \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial F_\ell}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_\ell}{\partial\phi} = e^{-i\psi}$$

$$e^{-i\psi}\left(i\frac{\partial F_1}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial F_1}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_1}{\partial\phi}\right) = -F_1^2 \tag{4.10}$$

$$e^{-i\psi}\left(i\frac{\partial F_2}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial F_2}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_2}{\partial\phi}\right) = -F_2^2 + (F_1 - F_2)^2,$$

и, конечно, с начальным условием

$$F_1(0,\ 0,\ 0,\ x_k) = x_1. \tag{4.11}$$

Первое из (4.10) дает возможность сделать следующую подстановку

$$F_1 = e^{-i\psi} f_1(\theta,\ \phi,\ x). \tag{4.12}$$

После чего для f_1 получаем уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial\theta} = \frac{1-f_1^2}{2i}\ ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial\phi} = \frac{1+f_1^2}{2}\sin\theta - i f_1\cos\theta$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\theta} = \frac{1+f_1^2-2f_1f_2}{2i}\ ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial\phi} = \frac{1-f_1^2+2f_1f_2}{2}\sin\theta - i f_2\cos\theta \tag{4.13}$$

$$f_1(0,\ 0,\ x) = x_1.$$

Первая строка уравнений (4.13) совпадает с уравнениями для U_1 в случае нормальных представлений (см.приложение **B**). Поэтому решение для $F_1(\phi,\theta,\psi,x)$ совпадает с (4.9) для $\ell=1$. Подставляя f_1 во вторую строчку (4.13), можно решить и последние два уравнения (см. приложение C). В результате получим:

$$F_1 = e^{-i\psi}\frac{(1+e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1-e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1+e^{i\theta})} \tag{4.14}$$

$$F_2 = e^{-i\psi} \frac{4x_2 e^{i\phi} + (1 - e^{2i\theta})(x_1 - e^{i\phi})^2}{[(1 - e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1 + e^{i\theta})]^2} \tag{4.15}$$

§5. Примеры нелинейных представлений группы $SU(2)$

В этом параграфе мы рассмотрим по одному примеру всех перечисленных выше представлений группы $SU(2)$.

а). Сначала рассмотрим движение репера в трехмерном пространстве, в котором задана координатная система, и положение репера определяется углами Эйлера. Вообще это движение описывается группой вращения, но в силу гомоморфизма между $SU(2)$ и $O(3)$ матрицы, описывающие преобразование репера (матрицы Эйлера) будем рассматривать, как представление группы $SU(2)$. Легко вычислить и генераторные функции этого линейного представления:

$$A_1^{-1} = -\frac{e^{-i\psi}}{\sin\theta} \qquad A_1^0 = 0 \qquad A_1^1 = \frac{e^{i\psi}}{\sin\theta}$$

$$A_2^{-1} = i\,e^{-i\psi} \qquad A_2^0 = 0 \qquad A_2^1 = i\,e^{i\psi} \tag{5.1}$$

$$A_3^{-1} = \mathrm{ctg}\,\theta\; e^{-i\psi} \qquad A_3^0 = 1 \qquad A_3^1 = -\mathrm{ctg}\,\theta\; e^{i\psi}$$

Легко проверить, что это представление нормальное и неприводимое. Действительно, первое доказывается с помощью преобразования

$$y_k = e^{-i\psi} \frac{1 + e^{i\theta} - C_k e^{i\phi}(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta} - C_k e^{i\phi}(1 + e^{i\theta})}, \tag{5.2}$$

где C_k выбираются разными, чтобы

$$\det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0 \qquad \{x_k\} = \{\psi, \theta, \phi\}\,. \tag{5.3}$$

Легко показать, что рассматриваемое представление неприводимо. Действительно, любой инвариант представления должен удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial x_3} = 0 \qquad (x_1, x_2, x_3) = (\phi, \theta, \psi)$$

$$i\frac{\partial I}{\partial x_2} + \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial I}{\partial x_3} - \frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial I}{\partial x_1} = 0 \tag{5.4}$$

$$i\frac{\partial I}{\partial x_2} - \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial I}{\partial x_3} + \frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial I}{\partial x_1} = 0,$$

но эта система имеет единственное решение

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = \frac{\partial I}{\partial x_2} = \frac{\partial I}{\partial x_3} = 0$$

б). Линейное трехмерное векторное представление группы вращений (в силу гомоморфизма это и есть представление группы $SU(2)$). Генераторные функции при этом имеют вид (в полярной системе координат $x_1 = \theta$, $x_2 = \phi$)

$$A_1^{-1} = -i e^{ix_2} \qquad A_1^{0} = 0 \qquad A_1^{1} = -i e^{-ix_2}$$

$$A_2^{-1} = \operatorname{ctg} x_1\, e^{ix_2} \qquad A_2^{0} = -1 \qquad A_2^{1} = -\operatorname{ctg} x_1\, e^{-ix_2} \tag{5.5}$$

$$A_3^{-1} = A_3^{0} = A_3^{1} = 0$$

Отсюда видно, что трехмерное векторное представление вырождено. С помощью преобразования

$$y_a = (-1)^a i \frac{1-(-1)^a \cos x_1}{\sin x_1} e^{i x_2} \qquad a = 1,2 . \tag{5.6}$$

Генераторные функции приводятся в нормальный вид и, следовательно, трехмерное векторное представление группы $SU(2)$ является приводимым обыкновенным вырожденным представлением.

в). Наконец, рассмотрим двухмерное спинорное представление группы $SU(2)$. Генераторные функции следующие:

$$\begin{aligned} &A_1^{-1} = -x_2 \qquad && A_1^0 = \frac{i}{2} x_1 \qquad && A_1^1 = 0 \\ &A_2^{-1} = 0 && A_2^0 = -\frac{i}{2} x_2 && A_2^1 = -x_1 . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Оказывается, что это представление кратное вырожденное, и с помощью преобразования

$$u_1 = -\frac{x_2}{x_1} \; ; \quad u_2 = \frac{1}{x_1^2} - \frac{x_2}{x_1} \tag{5.8}$$

генераторные функции (5.7) сводятся к виду

$$\begin{aligned} &A_1^{-1} = -u_1^2 \qquad && A_1^0 = -i u_1 \qquad && A_1^1 = 1 \\ &A_2^{-1} = -u_2^2 + (u_1 - u_2)^2 && A_2^0 = -i u_2 && A_2^1 = 1 . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Доказательство, что это представление неприводимо, проводится тривиальным образом.

г). В качестве последнего примера возьмем нелинейное представление $SU(2)$ Швингера /9/. Это представление пятимерное (два изотопических состояния нуклона и три состояния π -мезона). Генераторные функции имеют вид

$$M^{\mu}_{k} = \frac{1}{4} \tau^{\mu}_{k\ell} y_{\ell} + \frac{1}{4} g \epsilon_{\rho\nu\mu} x_{\nu} \tau^{\rho}_{k\ell} y_{\ell}$$

$$M^{\mu}_{2+a} = \frac{1}{4g} \delta^{\mu}_{a} - \frac{1}{2} \epsilon_{a\mu\nu} x_{\nu} + \frac{1}{4} g (2 x_{a} x_{\mu} - x_{\rho} x_{\rho} \delta^{\mu}_{a}) \tag{5.10}$$

$$g = \frac{f_0}{m_{\pi}} = \text{const} ,$$

где y_{ℓ} -нуклонная функция (латинские индексы принимают значения 1 и 2) и x_{a} -π- мезонная функция (греческие индексы принимают значения 1,2 и 3). Легко убедиться, что

$$\det \| M^{\mu}_{2+a} \| \neq 0 , \tag{5.11}$$

и, следовательно, матрица

$$\| M^{\mu}_{a} \| \qquad a = 1,2,4,3,5 \tag{5.12}$$

имеет ранг 3. Тогда, согласно теореме /2,1/, из книги Эйзенхарта /5/ система

$$\sum_{a} \frac{\partial I}{\partial x_{a}} M^{\mu}_{a} = 0 \tag{5.13}$$

имеет два независимых решения. Но это означает, что представление (5.10) имеет два независимых инварианта. Тогда из результатов настоящей работы следует, что (5.10) - приводимое представление нормального типа. Эффективное приведение последнего к нормальному виду можно сделать с помощью результатов работы Chang и Gursey /12/.

x/ Замечания к уравнению (1.15). Если вместо $H_{1}(z_{p})$ введем новую функцию $R_{1}(z_{p})$, где

$$H_i(z_p) = -z_i + R_i(z_p) \qquad z_n = 1,$$

то вместо (1.14) будем иметь

$$y_i = x_n R_i(z_p) \tag{1.14'}$$

и для R_i получим уравнение

$$[A^1_p(z_q) - z_p A^1_n(z_q)] \frac{\partial R_i(z_q)}{\partial z_p} + R_i(z_q) A^1_n(z_q) - 1 = 0 .$$

Поэтому, если

$$A^1_p - z_p A^1_n \equiv 0 ,$$

то преобразования (1.14) окажутся вырожденными, так как все R_i равны между собой

$$R_i = \frac{1}{A^1_n} .$$

В этом случае можно показать, что представление группы $SU(2)$ вполне вырождено, т.е. оно распадается на n одномерных представлений: $n-1$ скаляров и одномерное представление. Этот случай мы в работе вообще не рассматриваем, поскольку он более или менее тривиален, но для полной классификации нелинейных представлений группы $SU(2)$ его надо иметь в виду.

Авторы выражают свою глубокую благодарность В.И.Огиевецкому и И.Т.Тодорову за полезные обсуждения.

x x x

Приложение А

Для получения формулы (1.29) следует исходить из уравнения

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j}[-y_j^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 P_j(v_\alpha)] = -u_i^2 , \tag{A.1}$$

куда подставим

$$u_i = y_i + (y_{n-1} - y_n) G_i(v_\alpha) . \tag{A.2}$$

Так как $y_\alpha (\alpha = 1 \div n-2)$, y_{n-1}, y_n не участвует симметрично в наших формулах, придется формулу (1.29) получать по частям. Здесь мы ее получим для случая, когда i изменяется от 1 до $n-2$, т.е. когда в $(A, 1)$ $i = \alpha$. Все-таки здесь мы выпишем следующую таблицу производных функций (A.2):

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + G_{\alpha,\beta}; \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_{n-1}} = G_\alpha - G_{\alpha,\gamma} v_\gamma; \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_n} = -G_\alpha + \sum_\gamma G_{\alpha,\gamma}(v_\gamma - 1)$$

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_\beta} = G_{n-1,\beta}; \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_{n-1}} = 1 + G_{n-1} - G_{n-1,\gamma} v_\gamma; \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_n} = G_{n-1} + \sum_\gamma G_{n-1,\gamma}(v_\gamma - 1)$$

(A.3)

$$\frac{\partial u_n}{\partial y_\beta} = G_{n,\beta}; \quad \frac{\partial u_n}{\partial y_{n-1}} = G_n - G_{n,\gamma} v_\gamma; \quad \frac{\partial u_n}{\partial y_n} = 1 - G_n + \sum_\gamma G_{n,\gamma}(v_\gamma - 1),$$

где

$$G_{i,\beta} = \frac{\partial G_i}{\partial v_\beta}.$$

Подставляя $\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_j}$ (A.1), в случае $i = \alpha$, после несложных преобразований получаем:

$$\sum_p G_{\alpha,\beta}\{A_1 + (y_{n-1} - y_n)^2 P_\beta - (y_{n-1} - y_n)^2 P_{n-1} v_\beta + (y_{n-1} - y_n)^2 (v_\beta - 1) P_n\} +$$

$$+ \{A_2 + (y_{n-1} - y_n)^2 P_{n-1} - (y_{n-1} - y_n)^2 P_n\} G_\alpha + \tag{A.4}$$

$$+ G_\alpha^2 (y_{n-1} - y_n)^2 + P_\alpha (y_{n-1} - y_n)^2 = 0,$$

где выражения A_1 и A_2 могут быть преобразованы следующим образом:

$$A_1 \equiv -y_\beta^2 + y_{n-1}^2 v_\beta - y_n^2 (v_\beta - 1) = v_\beta'(1 - v_\beta)(y_{n-1} - y_n)^2$$

(A.5)

$$A_2 \equiv -y_{n-1}^2 + y_n^2 + 2y_\alpha (y_{n-1} - y_n) = (2v_\alpha - 1)(y_{n-1} - y_n)^2$$

После, подставив (A.5) в (A.4), получаем искомую формулу. Случаи, когда $i = n-1$, n вычисляются аналогичным образом, и объединение трех полученных формул уже не трудно.

Приложение В.

Для того, чтобы решить систему уравнений (4.8), прежде всего ее надо решить по отношению частных производных:

$$\frac{\partial U_\ell}{\partial \theta} = \frac{1-U_\ell^2}{2i}\ ; \quad \frac{\partial U_\ell}{\partial \phi} = \frac{1}{2}(1+U_\ell^2)\sin\theta - i\cos\theta\, U_\ell\,. \tag{B.1}$$

Совместимость системы не подлежит сомнению. Первое из уравнений (В.6) решается в виде

$$U_\ell = \frac{1 + C_\ell(\phi, x)\, e^{i\theta}}{1 - C_\ell(\phi, x)\, e^{i\theta}}\ , \tag{B.2}$$

где $C_\ell(\phi, x)$ – произвольные функции угла ϕ, подлежащие определению из второго уравнения (В.1). Подставляя (В.2) в (В.1), после несложных выкладок получаем

$$\frac{\partial C_\ell}{\partial \phi} = \frac{1-C_\ell^2}{2i}\,, \tag{B.3}$$

и, следовательно,

$$C_\ell(\phi, x) = \frac{1 + C_\ell(x)\, e^{i\phi}}{1 - C_\ell(x)\, e^{i\phi}}\ . \tag{B.4}$$

$C_\ell(x)$ – постоянные интегрирования (В.3), которые определяются однозначно из начального условия, а оно дает

$$C_\ell(x) = -\frac{1}{x_\ell}\,. \tag{B.5}$$

Подставляя (В.5) в (В.4); (В.4) в (В.2), и имея в виду подстановку (4.7), получаем формулу (4.9).

Приложение С

Как уже отмечалось, первые два уравнения системы (4.13) совпадают с уравнениями (В.1), поэтому сразу можно написать

$$f_1 = \frac{(1+e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1-e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1+e^{i\theta})} = \frac{k+u}{k-u}\,, \tag{C.1}$$

где ввели новые переменные

$$k = \frac{x_1 + e^{i\phi}}{x_1 - e^{i\phi}}\ ; \quad u = e^{i\theta}\ . \tag{C.2}$$

Из (C.1) и (4.12) следует (4.14). Легко проверить, что

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = i u \frac{\partial f_2}{\partial u}\ ; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = \frac{i}{2}(k^2 - 1)\frac{\partial f_2}{\partial k}\ . \tag{C.3}$$

И тогда вместо второй пары уравнений (4.13) имеем:

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{k^2 + u^2}{u(k-u)^2} + \frac{k+u}{(k-u)u} f_2 \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k} = -2\frac{ku-1}{k-u} \cdot \frac{f_2}{k^2-1} + \frac{k(u^2-1)}{(k-u)^2(k^2-1)}\ . \tag{C.5}$$

Уравнение (C.4) легко решается и

$$f_2 = \frac{u}{(k-u)^2}\left[C(k,x) + \frac{k^2}{u} - u \right], \tag{C.6}$$

где $C(k,x)$ - произвольная интегральная функция от аргументов. Из уравнения (C.5) для этой функции получаем уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{2k}{k^2-1} C\ , \tag{C.7}$$

откуда

$$C(k,x) = B(x)(k^2-1)\ . \tag{C.8}$$

$B(x)$ - интеграционная постоянная, которая определяется из начального условия, а именно

$$B(x) = \frac{x_2}{x_1} - 1\ . \tag{C.9}$$

Поэтому окончательно для f_2 имеем (после того как вернулись к старым переменным)

$$f_2 = \frac{4x_2 e^{i\phi} + (1 - e^{2i\theta})(x_1 - e^{i\phi})^2}{[(1 - e^{i\theta})x_1 + e^{i\phi}(1 + e^{i\theta})]^2} \tag{C.10}$$

Имея в виду подстановку (4.12), получим формулу (4.15).

Л и т е р а т у р а

1. J.Schwinger, Phys. Rev. Letters 18, 923 (1967); Phys.Rev. 152,1219 (1966); Ann. Phys. (N.Y.) 2, 407 (1957).
2. S.Weinberg, Preprint, Laboratory for nuclear science Massachusetts Institute of technology Cambridge, Massachusetts (1967).
3. S.Lie und F.Engel Theorie der Transformationsgruppen 1,2 und 3 Leipzig, Reprinted in 1930.
4. E. Cartin "Sur la structure des groupes de transformations finis et continus", Thèse Mony, Paris.
5. Л.П.Эйзенхарт. "Непрерывные группы преобразований" ИЛ, Москва 1947.
6. Д.П.Желобенко. "Лекции по теории групп Ли".
7. М.А.Наймарк. "Представления группы Лоренца".
8. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос и З.Я.Шапиро. "Представления группы вращений и группы Лоренца", Физматгиз, 1958.
9. Schwinger, Phys. Letters 24B, 473 (1967).
10. Любарский. "Теория групп и ее применение в физике". Физматгиз, 1958.
11. В.В.Степанов. "Курс дифференциальных уравнений". Физматгиз, 1958.
12. P.Chang and F.Gursey, Preprint, New Haven Connecticut (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1967 года.