Ann. of Phys., 1968, v. 49, N2, c. 173-201

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3606

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дао Вонг Дык, Као Ти, Нгуен Ван Хьеу

БЕСКОНЕЧНЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1967.

P2 - 3606

Дао Вонг Дык, Као Ти, Нгуен Ван Хьеу

БЕСКОНЕЧНЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в
Annals of Physics

I. Введение. Группа симметрии

В последнее время широко обсуждается[I-8] возможность применения унитарных (бесконечномерных) представлений некомпактных групп для классификации элементарных частиц. Это направление тесно связано с попыткой преодоления трудностей, возникающих в старых неунитарных схемах $SL(6,c)$[9-15] или $U(6,6)$[16-18]. В рамках этих схем, как известно, невозможно написать инвариантные (относительно соответствующих групп) волновые уравнения даже для свободных частиц, а также инвариантный лагранжиан свободных полей. Поэтому нет смысла требовать сторогой инвариантности матричных элементов процессов относительно этих групп. Такое требование привело бы к противоречию с условием унитарности S-матрицы.

Для построения последовательной теории релятивизированной симметрии $SU(6)$ нужно использовать такую группу симметрии G , которая содержала бы однородную группу Лоренца и группу $SU(6)$ как подгруппы, и при этом обычные четырехмерные импульсы частиц реализовали бы ее неприводимые представления.

Оказалось, что при довольно простых и правдоподобных предположениях[3,4,8] эта группа должна быть полупрямым произведением группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ и группы внутренней симметрии S , содержащей некоторую подгруппу $SL(2C)$, изоморфную группе Лоренца:

$$G = \mathcal{P} \rtimes S \quad , S \supset SL(2C). \tag{I.I}$$

Если не рассматривать генераторы p_μ группы трансляции, содержащейся в $\mathscr{P}$, то вместо (I.I) имеем

$$\widetilde{G} = \mathscr{L} \ltimes S, \tag{I.2}$$

где $\mathscr{L}$ - однородная группа Лоренца. Обозначим генераторы группы $\mathscr{L}$ через $J_{\mu\nu}$, генераторы группы S через F_y, а генераторы подгруппы $SL(2,C)$, содержащейся в S, через $\sigma_{\mu\nu}$ (ясно, что генераторы $\sigma_{\mu\nu}$ включаются в F_y). Легко видеть, что генераторы

$$J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu} \tag{I.3}$$

коммутируют с генераторами группы S и образуют алгебру $\mathscr{L}'$ некоторой группы $\mathscr{L}'$, изоморфной группе $\mathscr{L}$. Таким образом, группу $\widetilde{G}$ можно рассматривать как прямое произведение группы S и некоторой группы $\mathscr{L}'$ изоморфной группе $\mathscr{L}$ с генераторами (I.3):

$$\widetilde{G} = \mathscr{L}' \otimes S. \tag{I.4}$$

Если включить еще генераторы p_μ, то вместо (I.4) имеем:

$$G = \mathscr{P}' \otimes S, \tag{I.5}$$

где $\mathscr{P}'$ изоморфна группе Пуанкаре $\mathscr{P}$.

В настоящей работе мы изложим основные результаты, полученные нами по квантовой теории поля с бесконечными мультиплетами.

В параграфе П будет рассмотрена классификация частиц по бесконечномерным унитарным представлениям некомпактных групп. Эти представления реализуются в гильбертовом пространстве однородных функций. Там будет получен явный вид матрицы конечного

преобразования Лоренца $D_{jj_3;j'j'_3}$, которая играет важную роль в нашей теории.

В параграфе Ш мы изучим взаимодействие бесконечных мультиплетов и укажем на новое обстоятельство, возникающее в теории с бесконечными мультиплетами, а именно, нелокальность для взаимодействующих компонентных полей.

В параграфе IУ будет рассмотрено квантование полей с бесконечными мультиплетами. Будет показано, что существуют свободные локальные поля, описывающие бесконечные мультиплеты с нормальной связью между спином и статистикой.

В параграфе У будут сформулированы обобщенные правила Фейнмана для теории с бесконечными мультиплетами.

П. Классификация частиц по бесконечномерным представлениям

I. Канонический базис

При изучении классификации частиц достаточно рассмотреть только группу внутренней симметрии S. Так как S некомпактна, то ее неприводимые унитарные представления, по которым классифицируются частицы, бесконечномерны. Каждое такое представление расщепляется на прямую сумму бесконечного числа неприводимых конечномерных представлений максимальной компактной подгруппы S_c группы S. Например, $S_c = SU(6)$, если $S = SL(6,C)$, $S_c = U(6)\otimes U(6)$, если $S = U(6,6)$. Пусть α -совокупность всех параметров, характеризующих данное унитарное представление группы S, j - такая же совокупность для подгруппы S_c, а μ - совокупность всех индексов, нумерующих различные базисные векторы в каждом неприводимом представлении подгруппы S_c. Таким образом, каждый базисной вектор унитарного представления группы S характеризуется тремя индексами α, j, μ и обозначается через $|\alpha j \mu\rangle$. Такой базис будем называть каноническим. Каждое унитарное неприводимое представление группы $\mathscr{P}'$ характеризуется парой чисел - массой частицы m и некоторым целым или полуцелым s', которое означало бы спин частицы, если бы группа $\mathscr{P}'$ совпала с $\mathscr{P}$. Базисные векторы этого представления отличаются между собой 4-импульсом и обозначаются через $|s' p\rangle$.

Рассмотрим сначала частицы в покое с 4-импульсом $\hat{p} \equiv (\vec{p}=0, im)$. Тогда из (I.5) видно, что векторы состояния этих частиц могут быть представлены в виде

$$|s'\hat{p}, \alpha j \mu\rangle = |s'\hat{p}\rangle \otimes |\alpha j \mu\rangle . \qquad (2.I)$$

При преобразовании Лоренца, переводящем $\hat{p}$ в p, векторы состояния (2.I) переходят в

$$|s'\hat{p}, \alpha j \mu\rangle \longrightarrow U(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|s'\hat{p}, \alpha j \mu\rangle$$

$$U(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) = \exp\{i \mathcal{J}_{\mu\nu}\, \omega_{\mu\nu}(p\leftarrow\hat{p})\} ,$$

где $\omega_{\mu\nu}(p\leftarrow\hat{p})$—параметры преобразования $\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}$. Дальше, из (I.3) следует, что

$$U(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) = U'(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) \cdot U_\sigma(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})$$

$$U'(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) = \exp\{i \mathcal{J}'_{\mu\nu}\, \omega_{\mu\nu}(p\leftarrow\hat{p})\}$$

$$U_\sigma(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) = \exp\{i \sigma_{\mu\nu}\, \omega_{\mu\nu}(p\leftarrow\hat{p})\}$$

и поэтому мы имеем

$$U(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|s'\hat{p}, \alpha j \mu\rangle = U'(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|s'\hat{p}\rangle \otimes U_\sigma(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\alpha j \mu\rangle . \qquad (2.2)$$

Первый множитель в правой части (2.2) является базисным вектором $|s'p\rangle$ представления группы $\mathscr{P}'$, а второй множитель обозначим чрез

$$U_\sigma(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\alpha j \mu\rangle \equiv |\alpha j(p) \mu(p)\rangle .$$

Теперь вместо генераторов F_y группы S введем генераторы, зависящие от p,

$$F_y(p) \equiv U_\sigma(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) F_y\, U_\sigma^{-1}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}) .$$

Легко видеть, что генераторы $F_y(p)$ удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, что и генераторы F_y, и относительно базиса $|\alpha j(p)\mu(p)\rangle$ они имеют такие же матричные элементы, что и F_y относительно базиса $|\alpha j \mu\rangle$:

$$\langle \alpha j'(p) \mu'(p)|F_y(p)|\alpha j(p) \mu(p)\rangle = \langle \alpha j' \mu'|F_y|\alpha j \mu\rangle . \qquad (2.3)$$

Равенство (2.3), в свою очередь, означает, что $|\alpha j(p)\mu(p)\rangle$ является каноническим базисом унитарного представления группы с генераторами $F_y(p)$. В частности, совокупность параметров $j(p)$ характеризует неприводимое представление максимальной зависящей от p компактной подгруппы $S_c(p)$. Таким образом, при классификации частиц мы пользуемся базисами, соответствующими зависящим от p максимальным компактным подгруппам $S_c(p)$ группы S.

2. Унитарное представление группы $SL(2C)$

Рассмотрим более подробно случай $S = SL(2C)$. Представление этой группы удобно реализовать в Гильбертовом пространстве функций $f(z_1,z_2)$ двух комплексных переменных z_1 и z_2. Детально эта теория излагается в работе[19]. Здесь мы приводим только основные сведения, необходимые для последующих разделов. Каждое неприводимое унитарное представление характеризуется парой чисел $\alpha = (\nu\varrho)$, где ϱ — любое действительное число (мы рассматриваем основную серию), ν — целое или полуцелое число. Базисному вектору $|\nu\varrho, jj_3\rangle$ со спином j и его проекцией j_3 соответствует функция[19]

$$f^{\nu\varrho}_{jj_3}(z_1,z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{(2j+1)(j+j_3)!(j-j_3)!(j+\nu)!(j-\nu)!\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \tag{2.4}$$

$$\cdot\left(z_1\bar z^1 + z_2\bar z^2\right)^{\frac{i\varrho}{2}-1-j}\sum_d(-1)^d\frac{1}{d!(j-j_3-d)!(\nu+j_3+d)!(j-\nu-d)!}(z_1)^{\nu+j_3+d}(z_2)^{j-j_3-d}(\bar z^1)^d(\bar z^2)^{j-\nu-d}$$

в Гильбертовом пространстве $D_{(\nu+\frac{i\varrho}{2}-1,\,-\nu+\frac{i\varrho}{2}-1)}$ однородных функций степени однородности $\lambda = (\nu+\frac{i\varrho}{2}-1, -\nu+\frac{i\varrho}{2}-1)$. При этом скалярное произведение определяется выражением

$$\langle\nu\varrho, j'j_3'|\nu\varrho, jj_3\rangle = \frac{i}{2}\int f^{\nu\varrho}_{jj_3}(z,1)\overline{f^{\nu\varrho}_{jj_3}}(z,1)\,dz\,d\bar z \tag{2.5}$$

Матричный элемент конечных преобразований $D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(g)$, который определяется как

$$SL(2,C) \ni g \longrightarrow U_g$$
$$U_g|\nu\varrho, jj_3\rangle = \sum_{j'j_3'} D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(g)|\nu\varrho j'j_3'\rangle, \tag{2,6}$$

можно найти по (2.4) и (2.5). Для чистого вращения Лоренца в плоскости (x_3,x_4) мы имеем[19,20]

$$D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(\varepsilon) =$$

$$= \frac{\delta_{j_3j_3'}}{(j+j'+1)!}\left\{(2j+1)(2j'+1)(j+j_3)!(j-j_3)!(j+\nu)!(j-\nu)!(j'+j_3)!(j'-j_3)!(j'+\nu)!(j'-\nu)!\right\}^{1/2} \cdot \tag{2.7}$$

$$\cdot\sum_{dd'}(-1)^{d+d'}\frac{(d+d'+j_3+\nu)!\,(j+j'-d-d'-j_3-\nu)!}{d!\,d'!\,(j-j_3-d)!(j'-j_3-d')!(\nu+j_3+d)!(\nu+j_3+d')!(j-\nu-d)!(j'-\nu-d')!}\cdot$$

$$\cdot\ \varepsilon^{2(2d'+j_3+\nu+1+\frac{i\varrho}{2})}F\left(j'+1+\frac{i\varrho}{2}, d+d'+j_3+\nu+1; j'+j+2; 1-\varepsilon^4\right)$$

$\varepsilon = \begin{pmatrix}\varepsilon^{-1} & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$; $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция. Функции $D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(\varepsilon)$ обладают следующими простыми свойствами

$$D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(1) = \delta_{jj'}\delta_{j_3j_3'},$$
$$D^{\nu\varrho}_{j'j_3';jj_3}(\varepsilon) = \overline{D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}}(\varepsilon^{-1}), \quad \text{и} \tag{2.8}$$
$$D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(\varepsilon) = (-1)^{j+j'-2\nu}D^{\nu\varrho}_{j,-j_3;j',-j_3'}(\varepsilon^{-1}),$$
$$\sum_{jj_3} D^{\nu\varrho}_{jj_3;j'j_3'}(\varepsilon)\overline{D^{\nu\varrho}_{jj_3;j''j_3''}(\varepsilon)} = \delta_{j'j''}\delta_{j_3'j_3''}.$$

При изучении вершин и амплитуд рассеяния гораздо удобнее переходить от канонического базиса (2.4) к базису, который строится следующим образом:

$$f^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu}}(z_1, z_2) = \left(z_c \bar{z}^c\right)^{\frac{i\varrho}{2}-1-j} \phi^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu}}, \quad (a, b = 1, 2) \tag{2.9}$$

где

$$\phi^{b_1 b_2 \cdots b_t}_{a_1 a_2 \cdots a_{t+k}} = \tag{2.10}$$

$$= \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \frac{t!(t+k)!(2t+k-s)!}{s!(t-s)!(t+k-s)!(2t+k)!} \left(z_c \bar{z}^c\right)^s \mathcal{S}\, \delta^{b_1}_{a_1} \cdots \delta^{b_s}_{a_s} z_{a_{s+1}} \cdots z_{a_{t+k}} \bar{z}^{b_{s+1}} \cdots \bar{z}^{b_t},$$

$\mathcal{S}$ означает симметризацию по нижним и верхним индексам a и b в отдельности. Спиноры $\phi^{b_1 b_2 \cdots b_t}_{a_1 a_2 \cdots a_{t+k}}$ симметричны по верхним и нижним индексам и имеют нулевой шпур по любой паре из одного верхнего и одного нижнего индексов – они являются неприводимыми относительно группы $SU(2)$.

При преобразовании $g \in SL(2,C)$ спинор $f^{b_1 \cdots b_{j-\nu}}_{a_1 \cdots a_{j+\nu}}$ переходит в

$$U_g f^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu}} = \sum_{j'} D^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu};\, c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu};\, d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}}(g)\, f^{d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}}_{c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}, \tag{2.11}$$

где матричные элементы $D^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu};\, c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu};\, d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}}(g)$ являются обобщением $D^{\nu\varrho}_{jj_3;\, j'j'_3}(g)$ и равны[19]:

$$D^{b_1 b_2 \cdots b_{j-\nu};\, c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}_{a_1 a_2 \cdots a_{j+\nu};\, d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}}(g) = \tag{2.12}$$

$$= \sum_{k=\max(0,\, j'-j)}^{\infty} \sum_{s=0}^{\min(j-\nu,\, j+k-j')} (-1)^s \frac{(2j-s)!\,(2j'+1)!}{s!\,k!\,(2j)!\,(j'-\nu)!\,(j'+\nu)!\,(j-\nu-s)!\,(j+\nu-s)!\,(k+j-j'-s)!\,(k+j+j'-s+1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{i\varrho}{2}-j+s\right)}{\Gamma\left(\frac{i\varrho}{2}-j+s-k\right)} \alpha^{\frac{i\varrho}{2}-1-j+s}\, \delta^{d_{j'-\nu+1}}_{c_{j'+\nu+1}} \delta^{d_{j'-\nu+2}}_{c_{j'+\nu+2}} \cdots \delta^{d_{j+k-\nu-s}}_{c_{j+k+\nu-s}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{P(a,b,c,d)} \hat{\beta}^{c_1}_{d_1} \cdots \hat{\beta}^{c_k}_{d_k} \delta^{b_1}_{d_1} \cdots \delta^{b_s}_{d_s} g^{c_{k+1}}_{a_{s+1}} \cdots g^{c_{k+j+\nu-s}}_{a_{j+\nu}} g^{+\,b_{s+1}}_{d_{k+1}} \cdots g^{+\,b_{j-\nu}}_{d_{k+j-\nu-s}},$$

где $g g^+ = \alpha_0 \sigma_0 + \hat{\alpha} = \alpha_0 (1 + \hat{\beta})$; $\hat{\beta} = \frac{1}{\alpha_0}\hat{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\vec{\alpha}\vec{\sigma}$;

$\sigma_0 = 1$, $\vec{\sigma}$ — 4 матрицы Паули, $\sum_{P(a,b,c,d)}$ означает суммирование по всем перестановкам a, b, c, d в отдельности.

Всякую однородную функцию $\varphi(z_1, z_2)$ из пространства $D_{(\nu+\frac{i\varrho}{2}-1,\, -\nu+\frac{i\varrho}{2}-1)}$ можно разложить по спинорам $f^{b_1 b_2 \cdots}_{a_1 a_2 \cdots}$

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{j'} \varphi^{c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}_{d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}} f^{d_1 d_2 \cdots d_{j'-\nu}}_{c_1 c_2 \cdots c_{j'+\nu}}(z_1, z_2), \tag{2.13}$$

где $\varphi^{c_1c_2\dots}_{d_1d_2\dots}$ также симметричны по верхним и нижним индексам и имеют нулевой шпур. Их как и $f^{d_1d_2\dots}_{c_1c_2\dots}$ мы будем называть обобщенными спинорами. При преобразовании $g\in SL(2,C)$ функция $\varphi(z_1,z_2)$ переходит в $U_g\varphi(z_1,z_2)$, которую опять разложим по спинорам $f^{b_1b_2\dots}_{a_1a_2\dots}$. Имеем

$$U_g\varphi(z_1,z_2)=\sum_{j}U_g\,\varphi^{a_1a_2\dots a_{j+\nu}}_{b_1b_2\dots b_{j-\nu}}f^{b_1b_2\dots b_{j-\nu}}_{a_1a_2\dots a_{j+\nu}}(z_1,z_2)\,. \tag{2.14}$$

Из (2.II) (2.I2) и 2.I4) следует закон преобразования для спинора $\varphi^{a_1a_2\dots}_{b_1b_2\dots}$

$$U_g\varphi^{a_1a_2\dots a_{j+\nu}}_{b_1b_2\dots b_{j-\nu}}=\sum_{j'}D^{d_1d_2\dots d_{j'-\nu};\,a_1a_2\dots a_{j+\nu}}_{c_1c_2\dots c_{j'+\nu};\,b_1b_2\dots b_{j-\nu}}(g)\,\varphi^{c_1c_2\dots c_{j'+\nu}}_{d_1d_2\dots d_{j'-\nu}}\,. \tag{2.15}$$

3. Унитарность S- матрицы

Изучим теперь структуры S- матрицы в рассматриваемой теории симметрии. Для простоты рассмотрим подробно упругое рассеяние синглета на частицах из некоторого бесконечного мультиплета. Обозначим через q и q' импульсы синглета до и после рассеяния, а через $p,\alpha,j(p),j_3(p)$ и p',α' $j'(p'),j'_3(p')$ - импульсы и другие квантовые числа частицы из бесконечного мультиплета до и после рассеяния, соответственно. Элемент Т-матрицы имеет вид $(S=1+iT)$

$$\left\langle q';p',\alpha' j'(p')j'_3(p')\right|T\left|q;p,\alpha\, j(p)j_3(p)\right\rangle=$$

$$=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')\,\delta_{\alpha\alpha'}\,T^{\alpha}\left(q';p'j'(p')j'_3(p')\middle|q;pj(p)j_3(p)\right). \tag{2.16}$$

Переходя от базисов $\left|q;p\alpha j(p)j_3(p)\right\rangle$ к новым базисам $\left|q;p\alpha jj_3\right\rangle$ при помощи преобразования

$$\left|p\alpha j(p)j_3(p)\right\rangle=D^{\alpha}_{j(p)j_3(p);j'j'_3}\left(\lambda_{p\leftarrow\hat p}\right)\left|p\alpha j'j'_3\right\rangle,$$

можно показать, что амплитуда $T^{\alpha}\left(q';p'j'(p')j'_3(p')\middle|q;pj(p)j_3(p)\right)$ имеет следующую "спиновую" структуру

$$T^{\alpha}\left(q';\dots\middle|q;\dots\right)=\overline{D^{\alpha}_{j'(p')j'_3(p');j''j''_3}\left(\lambda_{p'\leftarrow\hat p'}\right)}\,D^{\alpha}_{j(p)j_3(p);j''j''_3}\left(\lambda_{p\leftarrow\hat p}\right)F^{\alpha}(s,t), \tag{2.17}$$

где $F^{\alpha}(s,t)$ — скалярная функция от s и t. Это означает, что "спиновая" структура амплитуды вполне определена и характеризуется функциями $D^{\alpha}_{j(p)j_3(p);j''j''_3}\left(\lambda_{p\leftarrow\hat p}\right)$. Из (2.I6) и (2.I7) следует, что антиэрмитовая часть амплитуды, которая обозначается через A^{α}, равна

$$A^{\alpha}\left(q';p'j'(p')j'_3(p')\middle|q;pj(p)j_3(p)\right)=\overline{D^{\alpha}_{j'(p')j'_3(p');j''j''_3}\left(\lambda_{p'\leftarrow\hat p'}\right)}\,D^{\alpha}_{j(p)j_3(p);j''j''_3}\left(\lambda_{p\leftarrow\hat p}\right)\operatorname{Im}F^{\alpha}(s,t)\,. \tag{2.18}$$

Рассмотрим теперь условия унитарности в двухчастичном приближении. Подставляя (2.I6) и (2.I7) в правую часть соотношения

$$i\left(T^{+}-T\right)=T^{+}T\;,$$

а затем пользуясь свойством

$$D^{\alpha}_{j(q)j_3(q);j''(p)j''_3(p)}(\lambda_{q\leftarrow p})\overline{D^{\alpha}_{j'(q)j'_3(q);j''(p)j''_3(p)}(\lambda_{q\leftarrow p})} = \delta_{jj'}\delta_{j_3j'_3}$$

$$|\alpha j(q)j_3(q)\rangle = D^{\alpha}_{j(q)j_3(q);j'(p)j'_3(p)}(\lambda_{q\leftarrow p})|\alpha j'(p)j'_3(p)\rangle \quad ,$$

получаем:

$$A^{\alpha}\left(q';p'j'(p')j'_3(p')\,\middle|\,q;pj(p)j_3(p)\right) =$$

$$= \overline{D^{\alpha}_{j'(p')j'_3(p');j''j''_3}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}'})}D^{\alpha}_{j(p)j_3(p);j''j''_3}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})\cdot \tag{2.I9}$$

$$\cdot\frac{1}{8\pi^2}\int\frac{d\vec{p}''}{2p''_0}\cdot\frac{d\vec{q}''}{2q''_0}\,\delta^{(4)}(p+q-p''-q'')\overline{F^{\alpha}(s,t')}F^{\alpha}(s,t).$$

Таким образом, после суммирования по бесконечному числу частиц из данного мультиплета мы получим такую же спиновую структуру, что и исходная. Условие унитарности в данном случае просто сводится к интегральному уравнению для $F^{\alpha}(s,t)$, аналогичному уравнению в случае рассеяния скалярных частиц.

Случай рассеяния частиц из двух бесконечных мультиплетов рассматривается аналогично. Мы видим, что в двухчастичном приближении не возникает противоречие с условием унитарности. Это связано с тем, что формула суммирования по промежуточным состояниям инвариантна относительно группы симметрии. Следовательно, в любом приближении после суммирования по промежуточным состояниям мы всегда получаем выражение, инвариантное относительно рассматриваемой группы.

Сделаем еще одно замечание. Амплитуда (2.I7) зависит явно от импульсов частиц $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$, которые принимают разные значения в разных системах отсчета. Однако, пользуясь свойством D - функций, можно показать, что эта амплитуда не зависит от выбора системы отсчета.

Ш. Вершины и амплитуды рассеяния

В этом разделе мы будем изучать структуру вершинных функций и амплитуд рассеяния в рамках теории симметрии с бесконечными мультиплетами. Для простоты изложения в качестве группы внутренней симметрии S мы рассмотрим группу $SL(2,C)$. Сделанные ниже выводы остаются в силе также в общем случае.

I. Базис для редукции $SL(2,C)\supset SU(2)_p$

Прежде чем приступить к изучению вершин и амплитуд рассеяния мы должны построить в явном виде канонический базис, соответствующий редукции $SL(2,C)\supset SU(2)_p$, так как частицы с заданными спинами в каждом мультиплете описываются неприводимым представлением малой группы $SU(2)_p$ – подгруппы группы $SL(2,C)$, которая оставляет инвариантным 4-импульс p. Таким образом, нужно построить каждое неприводимое представление группы $SL(2,C)$ в виде совокупности спиноров малой группы $SU(2)_p$. Для этого достаточно исходить из (2.9) и заменить[2I]

$$z_c\bar{z}^{\dot{c}} \quad \text{на} \quad z_c\left(-\frac{i\hat{p}}{m}\right)^{c}_{\dot{d}}\bar{z}^{\dot{d}}, \quad \text{а} \quad \delta^{b}_{a} \quad \text{на} \quad \left(-\frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\dot{b}}_{a}.$$

Имеем:

$$f^{\dot b_1\dot b_2\ldots\dot b_{j-\nu}}_{a_1a_2\ldots a_{j+\nu}}(p;z)=\sum_{s=0}^{j-\nu}(-1)^s\frac{(j-\nu)!(j+\nu)!(2j-s)!}{s!(j-\nu-s)!(j+\nu-s)!(2j)!}\left(z_c\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)^c_{\dot d}\bar z^{\dot d}\right)^s\cdot$$

$$\cdot\mathcal{S}\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)^{\dot b_1}_{a_1}\cdots\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)^{\dot b_s}_{a_s}z_{a_{s+1}}\cdots z_{a_{j+\nu}}\,\bar z^{\dot b_{s+1}}\cdots\bar z^{\dot b_{j-\nu}}, \qquad (3.1)$$

где $\hat p = p_\mu\sigma_\mu$; $(\sigma_4)^a_{\dot b}=(\sigma_4)^{\dot a}_{b}=\delta_{ab}$; $(\sigma_k)^a_{\dot b}=-(\sigma_k)^{\dot a}_{b}=-i(\sigma_k)_{ab}$;

$(\sigma_k)_{ab}$ — элементы матриц Паули σ_k . Эти спиноры $f^{\dot b_1\ldots\dot b_{j-\nu}}_{a_1\ldots a_{j+\nu}}(p;z)$ малой группы $SU(2)_p$ преобразуются по соответствующим спинорным представлениям однородной группы Лоренца и удовлетворяют условию:

$$\left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{a_l}_{\dot b_k} f^{\dot b_1\ldots\dot b_k\ldots\dot b_{j-\nu}}_{a_1\ldots a_l\ldots a_{j+\nu}}(p;z)=0, \qquad (3.2)$$

которое означает, что они описывают состояния с определенными спинами.

Пусть теперь χ — любой элемент из гильбертова пространства, осуществляющего данное унитарное представление группы $SL(2,C)$. Тогда χ может быть представлен в виде

$$\chi(p;z)=\sum_j \chi^{a_1a_2\ldots a_{j+\nu}}_{\dot b_1\dot b_2\ldots\dot b_{j-\nu}}(p)f^{\dot b_1\dot b_2\ldots\dot b_{j-\nu}}_{a_1a_2\ldots a_{j+\nu}}(p;z) \qquad (3.3)$$

Компоненты $\chi^{a_1a_2\ldots}_{\dot b_1\dot b_2\ldots}(p)$ всегда можно выбрать так, чтобы они были симметричными относительно индексов каждого типа и удовлетворяли условию

$$\left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{\dot b_k}_{a_l}\chi^{a_1\ldots a_l\ldots a_{j+\nu}}_{\dot b_1\ldots\dot b_k\ldots\dot b_{j-\nu}}(p)=0.$$

В дальнейшем вершины и матричные элементы процесса рассеяния будем выражать через эти компоненты $\chi^{a_1a_2\ldots}_{\dot b_1\dot b_2\ldots}$

2. Структура вершин и амплитуд рассеяния

Для простоты рассмотрим прежде всего трехлинейное взаимодействие некоторых бесконечных мультиплетов с синглетом, причем для бесконечного мультиплета положим $\rho=0$. В этом случае инвариантная вершина имеет вид

$$\Gamma(p',p)=g(p^2;p'^2;k^2)\varphi(k)\frac{i}{2}\int\chi^+(p';z)\chi(p;z)\,dz\,d\bar z \qquad (3.4)$$

где $g(p^2;p'^2;k^2)$ — произвольный формфактор, $\varphi(k)$ — волновая функция синглета, $k=p-p'$. Пользуясь формулой (3.3) для $\chi(p;z)$ и $\chi(p';z)$, получим

$$\Gamma(p',p)= \qquad (3.5)$$

$$=g(p^2;p'^2;k^2)\varphi(k)\sum_{jj'}\chi^{+\dot b_1\ldots\dot b_{j'-\nu}}_{\dot a_1\ldots\dot a_{j'+\nu}}(p')M^{\dot a_1\ldots\dot a_{j'+\nu};\dot d_1\ldots\dot d_{j-\nu}}_{b_1\ldots b_{j'-\nu};c_1\ldots c_{j+\nu}}(p',p)\chi^{c_1\ldots c_{j+\nu}}_{\dot d_1\ldots\dot d_{j-\nu}}(p),$$

где матрицы $M^{\dot a_1\ldots\dot a_{j'+\nu};\dot d_1\ldots\dot d_{j-\nu}}_{b_1\ldots b_{j'-\nu};c_1\ldots c_{j+\nu}}(p',p)$ являются кинематическими факторами и полностью определяются интегралом

$$M^{\dot a_1\ldots\dot a_{j'+\nu};\dot d_1\ldots\dot d_{j-\nu}}_{b_1\ldots b_{j'-\nu};c_1\ldots c_{j+\nu}}(p',p)=\frac{i}{2}\int f^{+\dot a_1\ldots\dot a_{j'+\nu}}_{b_1\ldots b_{j'-\nu}}(p';z)f^{\dot d_1\ldots\dot d_{j-\nu}}_{c_1\ldots c_{j+\nu}}(p;z)\,dz\,d\bar z. \qquad (3.6)$$

Чтобы выяснить свойства этих факторов, рассмотрим сначала частный случай, когда $\nu=0$. Тогда первый фактор, входящий в вершину с тремя лоренцевски скалярными частицами, равен:

$$\mathcal{M}(p';p) = \frac{i}{2}\int\left(z_a\left(-\frac{i\hat{p}'}{m}\right)^a_b \bar{z}^b\right)^{-1}\left(z_c\left(-\frac{i\hat{p}}{m}\right)^c_d \bar{z}^d\right)^{-1} dz\, d\bar{z} = \tag{3.7}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2-1}} \ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad \alpha = -\frac{(p'p)}{m^2}.$$

Это означает, что часть вершины, соответствующая взаимодействию скалярных частиц равна:

$$\langle 0|\Gamma|0\rangle = g(p^2,p'^2,k^2)\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2-1}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}\varphi(k)\chi^+(p')\chi(p). \tag{3.8}$$

Здесь следует отметить, что кинематический фактор $\mathcal{M}(p';p)$ пол - ностью определяется только в физической области соответствующих процессов. Так, например, для канала рассеяния $(t=-(p-p')^2<0)$ этот фактор равен

$$\mathcal{M}(p';p) = \Gamma(t) = \frac{\pi m^2}{[t(t-4m^2)]^{1/2}} \ln\frac{2m^2-t+[t(t-4m^2)]^{1/2}}{2m^2-t-[t(t-4m^2)]^{1/2}}, \tag{3.9}$$

а в аннигиляционном канале $(s=-(p+p')^2>4m^2)$ он равен

$$\mathcal{M}(-p';p) = \Gamma(s) = \frac{\pi m^2}{[s(s-4m^2)]^{1/2}}\ln\frac{2m^2-s+[s(s-4m^2)]^{1/2}}{2m^2-s-[s(s-4m^2)]^{1/2}}. \tag{3.10}$$

Отметим, что на основе формулы (3.8) нельзя вычислить кинематический фактор $\Gamma(t)$ при комплексных t. Иначе говоря, не существует теоретического обоснования для его аналитического продолжения.

Аналогично, из формулы (3.5) получим следующее выражение для матричного элемента перехода $j=1 \to j'=0$ в канале рассеяния:

$$\langle 0|\Gamma(p';p)|1\rangle = \tag{3.11}$$

$$= g(p^2,p'^2,k^2)\frac{4i\pi m^3}{t(t-4m^2)}\left[1-\frac{2m^2-t}{2\sqrt{t(t-4m^2)}}\ln\frac{2m^2-t+\sqrt{t(t-4m^2)}}{2m^2-t-\sqrt{t(t-4m^2)}}\right]\varphi(k)\chi^+(p')V_\mu(p)p'_\mu,$$

где $V_\mu(p)$ -релятивистская волновая функция мезона со спином I в начальном состоянии

$$V_\mu(p) = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)^{\dot{a}}_b\chi^b_{\dot{a}}(p).$$

Очевидно, что здесь автоматически получается $L-S$ связь.

Рассмотрим теперь случай, когда $\nu=\frac{1}{2}$. Мультиплетам такого рода должны принадлежать все известные барионы со спином I/2. Часть вершины, соответствующая взаимодействию спиноров со спином I/2, равна:

$$\left\langle \tfrac{1}{2}\right|\Gamma(p';p)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle = \tag{3.12}$$

$$= g(p^2,p'^2,k^2)\frac{\pi}{2(1+\alpha)(\alpha^2-1)^{1/2}}\left\{\left[\alpha+(\alpha^2-1)^{1/2}\right]^{1/2}-\left[\alpha-(\alpha^2-1)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}\varphi(k)\bar{\psi}(p')\psi(p),$$

где для удобства вместо двухкомпонетного спинора χ^c мы использовали дираковский спинор

$$\psi = (\psi^A) = \begin{pmatrix} \chi^a \\ \chi^{\dot a} \end{pmatrix} ; \quad \chi^{\dot a} = \left(-\frac{i\hat p}{m}\right)^{\dot a}_b \chi^b$$

$$\overline{\psi} = \psi^+ \gamma_4 \quad ; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

Для состояний с другими спинами можно получить выражение для вершин аналогичным путем.

Мы видим, что наряду с произвольными формфакторами $g(p^2, p'^2, k^2)$ зависящими от динамики процессов, вершины содержат кинематические факторы, полностью определяемые свойствами симметрии. Динамические формфакторы обладают обычными аналитическими свойствами и свойствами перекрестной симметрии. Что касается кинематических факторов, то они удовлетворяют обычному правилу замены Лоу (при переходе от канала рассеяния в канал аннигиляции достаточно заменить t на s), но не существует теоретического обоснования для их аналитических продолжений.

Рассмотрим, наконец, упругое рассеяние синглета на частице из мультиплета с $\nu = \frac{1}{2}$. Для процесса

$$0 + \tfrac{1}{2} \longrightarrow 0 + \tfrac{1}{2}$$

имеем следующий матричный элемент:

$$M(q, p; p', q') =$$
$$= A(s,t) \frac{m^3}{(4m^2 - t)[t(t-4m^2)]^{1/2}} \left\{ \left[2m^2 - t + \sqrt{t(t-4m^2)}\right]^{1/2} - \left[2m^2 - t - \sqrt{t(t-4m^2)}\right]^{1/2} \right\} \overline{\psi}(p')\psi(p),$$

где $A(s,t)$ - некоторая инвариантная амплитуда, определяющаяся

динамикой процесса и обладающая обычными аналитическими свойствами. Здесь интересно отметить, что физические амплитуды не аналитичны по t в эллипсе Лемана.

Рассмотрим теперь вершины взаимодействия трех бесконечных мультиплетов. Для этого построим инвариантную трехмерную комбинацию однородных функций, принадлежащих к трем разным неприводимым унитарным представлениям (ν, ρ), (ν', ρ'), (ν'', ρ''). Обозначим эти однородные функции через $f(z), f'(z'), f''(z'')$ и построим инвариантную трехмерную комбинацию в виде[22]

$$I(f, f', f'') = \int K(z, z', z'') f(z) f'(z') f''(z'') d\mu(z) d\mu(z') d\mu(z'') .$$

Напишем условие инвариантности функции $I(f, f', f'')$ относительно преобразований группы $SL(2,C)$

$$I(T_g f, T_g f', T_g f'') = I(f, f', f'')$$

или

$$\int K(z, z', z'') f(zg) f'(z'g) f''(z''g)\, d\mu(z) d\mu(z') d\mu(z'') =$$
$$= \int K(z, z', z'') f(z) f'(z') f''(z'')\, d\mu(z) d\mu(z') d\mu(z'') .$$

Это условие требует, чтобы ядро $K(z, z', z'')$ было инвариантным относительно преобразования

$$z \longrightarrow zg \quad , \quad z' \longrightarrow z'g \quad , \quad z'' \longrightarrow z''g \quad .$$

Таким образом, ядро $K(z, z', z'')$ зависит от следующих трех инвариантных комбинаций:

$$Z = z'_1 z''_2 - z'_2 z''_1 \ , \quad Z' = z_1 z''_2 - z_2 z''_1 \ , \quad Z'' = z_1 z'_2 - z_2 z'_1 \quad .$$

Кроме того можно показать, что ядро $K(z,z';z'')$ является однородной функцией со следующими степенями свободы

$-2\nu-i\rho-1,\ 2\nu-i\rho-1$	относительно	z	и	z^*
$-2\nu'-i\rho'-1,\ 2\nu'-i\rho'-1$	относительно	z'	и	z'^*
$-2\nu''-i\rho''-1,\ 2\nu''-i\rho''-1$	относительно	z''	и	z''^*

В результате ядро $K(z,z';z'')$ имеет вид

$$K(z,z';z'') = Z^{N_1} Z^{*N_2} Z'^{N_1'} Z'^{*N_2'} Z''^{N_1''} Z''^{*N_2''},$$

где N_i, N_i', N_i'' удовлетворяют следующим уравнениям:

$$-2\nu-i\rho-1 = N_1'+N_1'' , \quad 2\nu-i\rho-1 = N_2'+N_2'',$$
$$-2\nu'-i\rho'-1 = N_1+N_1'' , \quad 2\nu'-i\rho'-1 = N_2+N_2'',$$
$$-2\nu''-i\rho''-1 = N_1+N_1' , \quad 2\nu''-i\rho''-1 = N_2+N_2'.$$

Решением этих уравнений является

$$2N_1 = 2(\nu-\nu'-\nu'') + i(\rho-\rho'-\rho'') - 1 ,$$
$$2N_2 = 2(-\nu+\nu'+\nu'') + i(\rho-\rho'-\rho'') - 1 ,$$
$$2N_1' = 2(-\nu+\nu'-\nu'') + i(-\rho+\rho'-\rho'') - 1 ,$$
$$2N_2' = 2(\nu-\nu'+\nu'') + i(-\rho+\rho'-\rho'') - 1 ,$$
$$2N_1'' = 2(-\nu-\nu'+\nu'') + i(-\rho-\rho'+\rho'') - 1 ,$$
$$2N_2'' = 2(\nu+\nu'-\nu'') + i(-\rho-\rho'+\rho'') - 1 .$$

Так как произведение $Z^{N_1} Z^{*N_2}$ имеет смысл только тогда, когда N_1-N_2 = целое число, то легко увидеть, что величина $2(\nu-\nu'-\nu'')$ должна быть целым числом[23].

3. Нелокальность взаимодействия

Получим теперь связь между полученными выше результатами и возможностью построения лагранжиана локального взаимодействия. Для простоты рассмотрим трехлинейное взаимодействие между частицами из мультиплета с $\nu = 0$ и некоторым синглетом.

В p-представление лагранжиан взаимодействия, инвариантный относительно группы $SL(2,C)$, получается из формулы (2.5), если положить динамический формфактор равным константе. Переходя затем в x-представление, сразу получим лагранжиан взаимодействия, инвариантный относительно данной группы. Часть лагранжиана, соответствующая взаимодействию трех частиц со спином 0, равна:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g\varphi(x)\left\{\chi^+(x)\Gamma(\Box)\chi(x)\right\} , \qquad (3.13)$$

где

$$\Gamma(\Box) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Box^k$$

$$\Box = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\right)^2$$

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} \sum_{\substack{a=0,\, b=0 \\ c=\frac{k}{2},\, \frac{1}{2}(k+1)}}^{\infty} (-1)^{b+k} \binom{2c}{n} \frac{(2c-1)!!}{(2a+1)2^{k+c} m^{2k} b!\, c!\, (k-n)!} \cdot \frac{\Gamma(a+\frac{3}{2})\Gamma(-2b+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2}-b)\Gamma(-2b+1-k+n)} ,$$

причем $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}$ действует на $\chi(x)$, а $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}$ действует на $\chi^+(x)$. Аналогичные результаты можно получить также для других случаев.

Лагранжиан взаимодействия (3.I3) содержит бесконечное число производных, которые возникают именно из-за требования симметрии. Причина их возникновения заключается в следующем. Элементарные частицы, входящие в каждый бесконечный мультиплет группы $SL(2,C)$, классифицируются по неприводимым представлениям малой группы $SU(2)_p$. Для описания этих частиц в рамках квантовой теории поля мы должны ввести бесконечное число спиноров Баргмана-Вигнера:

$$\psi^{A_1A_2\dots A_m}_{B_1B_2\dots B_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left\{\psi^{(+)A_1A_2\dots A_m}_{B_1B_2\dots B_n}(p)e^{ipx}+\psi^{(-)A_1A_2\dots A_m}_{B_1B_2\dots B_n}(p)e^{-ipx}\right\}\delta(p^2+m^2)\theta(p^0)d^4p. \tag{3.I4}$$

Пусть X - некоторый элемент группы внутренней симметрии S, который не зависит от импульса p. Поскольку частицы с определенными спинами образуют канонический базис, соответствующий зависящей от p редукции $SL(2,C) \supset SU(2)_p$, то матричный элемент преобразования Фурье компонент полевых операторов $\psi^{(\pm)A_1A_2\dots}_{B_1B_2\dots}(p)$ при преобразовании X зависит от p [24]

$$X\psi^{(\pm)A_1\dots A_m}_{B_1\dots B_n}(p)X^{-1} = \sum_{k,l} X^{A_1\dots A_m;D_1\dots D_l}_{B_1\dots B_n;C_1\dots C_k}(\pm p)\psi^{(\pm)C_1\dots C_k}_{D_1\dots D_l}(p). \tag{3.I5}$$

Отсюда следует, что под действием преобразования X полевые операторы $\psi^{A_1A_2\dots}_{B_1B_2\dots}(x)$ подвергаются нелокальному преобразованию касающемуся производных всех порядков:

$$X\psi^{A_1\dots A_m}_{B_1\dots B_n}(x)X^{-1} = \sum_{k,l} X^{A_1\dots A_m;D_1\dots D_l}_{B_1\dots B_n;C_1\dots C_k}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^{C_1\dots C_k}_{D_1\dots D_l}(x)$$

Лагранжиан взаимодействия может быть инвариантным относительно преобразования такого рода только в том случае, когда он содержит бесконечное число производных. Иначе говоря, причина возникновения бесконечного числа производных в лагранжиане заключается в том, что некомпактная группа симметрии является группой нелокальных преобразований квантованных полей, описывающих бесконечные мультиплеты данной группы[25,2I].

IУ. Квантование свободных полей с бесконечными мультиплетами

В работах[24,26,27,28] были сделаны различные попытки ввести квантованные поля, описывающие бесконечные мультиплеты. Для описания каждого бесконечного мультиплета авторы работы[26] предлагали пользоваться полевым оператором, образующим унитарное неприводимое представление некоторой вспомогательной изоморфной S группы. Этот полевой оператор носит индексы, пробегающие бесконечное множество значений, причем каждой компоненте этой бесконечно-компонентной величины соответствует одна частица. Для такого полевого оператора можно написать лишь одно волновое уравнение - уравнение Клейна-Гордона, независимо от того, имеют ли соответствующие частицы целые или полуцелые спины. Тогда все частицы должны подчиняться статистике Бозе-Эйнштейна независимо от их спинов. Это бесконечно-компонентное поле называется большим или общим полем, а его компоненты - компонентными полями.

Другой метод был предложен в работах[24,27]. Согласно этому методу для описания каждого бесконечного мультиплета необходимо ввести бесконечное число спинорных полей, преобразующихся по неуниатрным конечномерным представлениям вспомогательной группы и удовлетворяющих уравнению Баргмана-Вигнера (компонентные физические поля). В рамках этой схемы между спином и статистикой имеется нормальная связь. Кроме того, в работе[24] было показано (на основе соображений общего характера), что амплитуды перекрестных процессов связаны между собой правилом замены Лоу. Иначе говоря, правило замены Лоу и свойства симметрии совместны. Было показано, что уравнение Баргмана-Вигнера инвариантно относительно преобразований группы G [24].

Естественно возникает вопрос, можно ли в рамках второго из вышеупомянутых методов ввести общее поле? Будет ли тогда такое поле локальным одновременно с компонентными полями. Кроме того, будет ли энергия поля, полученная из лагранжиана, положительно определена и инвариантна относительно группы внутренней симметрии. Здесь мы дадим положительные ответы на все эти вопросы[29]. Кроме того, мы покажем, что из коммутационного соотношения большого поля путем пректирования можно получить коммутационные соотношения для компонентных физических полей. Ради простоты мы всегда будем рассматривать группу симметрии $SL(2,C)$. Отметим, что общее поле было рассмотрено также в работе[27]. Однако для частиц с полуцелым спином большое поле, введенное в этой работе, не может быть локальным одновременно с компонентными полями без нарушения симметрии.

В нашей теории большое поле не удовлетворяет уравнению типа Гельфанда-Яглома[30], которое релятивистски инвариантно но нарушает симметрию $G=PS$ и в бесконечном мультиплете все элементарные частицы вырождены по массе. В дальнейшем мы пользуемся только самосопряженными представлениями $\tau\sim(\nu,0)$.

I. Новый базис для редукции $SL(2,C)\supset SU(2)_p$

Базисы для редукций $SL(2,C)\supset SU(2)$, $SL(2,C)\supset SU(2)_p$ были уже построены в параграфах П и Ш (см. (2.9), (2.10) и (3.1)). Базис для первой редукции образуется из обобщенных спиноров $SU(2)$ $f^{\tilde{b}_1\ldots\tilde{b}_{j-\nu}}_{\tilde{a}_1\ldots\tilde{a}_{j+\nu}}(z)$ (для ясности мы снабжаем обобщенные спиноры группы $SU(2)$ знаками $\sim$, которые означают, что соответствующие индексы относятся к системе, где частицы покоятся), а базис для второй редукции образуется из спиноров вида $f^{\dot{b}_1\ldots\dot{b}_{j-\nu}}_{a_1\ldots a_{j+\nu}}(p;z)$, преобразующихся по соответствующим спинорным представлениям группы Лоренца.

С помощью импульсов $\left(-\frac{i\hat{p}}{m}\right)^{c}_{\dot{b}}$ можно превратить пунктирные индексы спинора $f^{\dot{b}_1\ldots\dot{b}_{j-\nu}}_{a_1\ldots a_{j+\nu}}(p;z)$ в непунктирные индексы. Кроме того все верхние индексы можно опустить путем умножения на антисимметричный спинор ε_{ab}. Легко показать, что в результате мы получаем симметричные спиноры ; для краткости обозначаем полученные симметричные спиноры через

$$f_{\tilde{a}_{2j}}(z) \equiv f_{\tilde{a}_1\ldots\tilde{a}_{2j}}(z)$$
$$f_{a_{2j}}(p;z) \equiv f_{a_1\ldots a_{2j}}(p;z) .$$

Пользуясь теперь методом, развитым Вайнбергом в работе [31] (см. также работы Фелдмана и Мэтюса [26]), мы введем наряду со спинором $f_{\dot a_{2j}}$ еще $2^{2j}-1$ спиноров со всевозможным числом нижних пунктирных индексов путем умножения $f_{a_{2j}}(p;z)$ на нужное число импульсов $\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)_{\dot a_i}^{a_i'}$:

$$f_{\dot a_1 a_2 \dots a_{2j}}(p;z) = \left(-\frac{i\hat p}{m}\right)_{\dot a_1}^{a_1'} f_{a_1' a_2 \dots a_{2j}}(p;z) ,$$

. . .

$$f_{\dot a_1 \dot a_2 \dots \dot a_{2j}}(p;z) = \left(-\frac{i\hat p}{m}\right)_{\dot a_1}^{a_1'}\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)_{\dot a_2}^{a_2'}\dots\left(-\frac{i\hat p}{m}\right)_{\dot a_{2j}}^{a_{2j}'} f_{a_1' a_2' \dots a_{2j}'}(p;z).$$

Все эти спиноры являются компонентами волновой функции Баргамана-Вигнера $f_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2j}}(p;z)$, где α_i принимает теперь уже четыре значения I,2,İ,2̇.

Вместо базиса $f_{\tilde a_{2j}}(z)$ можно пользоваться базисом $f_{jj_3}(z)$, являющимся линейной комбинацией $f_{\tilde a_{2j}}(z)$ при фиксированном значении j. Между базисоми $f_{jj_3}(z)$ и $f_{\alpha_{2j}}(p;z)$ существует простая связь:

$$f_{\alpha_{2j}}(p;z) = \sum_{kk_3} D_{\alpha_{2j}}(p;kk_3) f_{kk_3}(z). \qquad (4.1)$$

Матрица $D_{\alpha_{2j}}(p;kk_3)$ является с точностью до некоторых преобразований матрицей конечного преобразования Лоренца, переводящего частицы из состояния покоя в состояние с 4-импульсом p (см. параграф II).

Чтобы теория обладала "перекрестной симметрией" (под термином "перекрестная симметрия" следует понимать возможность применения правила замены Лоу) кроме базиса $f_{\alpha_{2j}}(p;z)$ мы введем еще базис $f_{\alpha_{2j}}(-p;z)$, получаемый из $f_{\alpha_{2j}}(p;z)$ путем замены $p \to -p$.

Из условия ортогональности векторов базиса $f_{jj_3}(z)$ нетрудно получить

$$D_{\alpha_{2j}}(\pm p;kk_3) = \int f_{\alpha_{2j}}(\pm p;z) f^+_{kk_3}(z)\, d\mu(z) , \qquad (4.2)$$

где $d\mu(z)$-инвариантная мера на группе.

Покажем теперь следующую важную формулу:

$$\sum_j D_{\alpha_{2j}}(\pm p;kk_3)\bar D^{\alpha_{2j}}(\pm p;ii_3) = \delta_{ik}\delta_{i_3k_3} , \qquad (4.3)$$

где

$$\bar D^{\alpha_{2j}}(\pm p;ii_3) = \left[D_{\beta_1\dots\beta_{2j}}(\pm p;ii_3)\right]^+ (\gamma_4)_{\beta_1}^{\alpha_1}\dots(\gamma_4)_{\beta_{2j}}^{\alpha_{2j}} ; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_4 \\ \sigma_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда перед p стоит знак +. Пользуясь (4.2), мы имеем:

$$\sum_j D_{\alpha_{2j}}(p;kk_3)\bar D^{\alpha_{2j}}(p;ii_3) = \iint \sum_j f_{\alpha_{2j}}(p;z)\bar f^{\alpha_{2j}}(p;w) f^+_{kk_3}(z) f_{ii_3}(w)\, d\mu(z)\, d\mu(w). \qquad (4.4)$$

Так как спиноры $f_{\alpha_{2j}}(p;z)$ образуют ортонормированную систему векторов в гильбертовом пространстве, то имеет место следующее ковариантное соотношение

$$\sum_j f_{\alpha_{2j}}(p;z)\bar f^{\alpha_{2j}}(p;w) = \delta_\mu(z-w), \qquad (4.5)$$

где обобщенная функция $\delta_\mu(z-w)$ определяется с помощью следующей формулы

$$\int \delta_\mu(z-w) f(w)\, d\mu(w) = f(z) .$$

Подставив (4.5) в (4.4), сразу получим (4.3).

В) Перейдем к случаю, когда перед p стоит знак минус. Введем преобразование:

$$T: \qquad z_a \longrightarrow \varepsilon_{ab} z^{*b}, \quad z^{*a} \longrightarrow z_b \varepsilon^{ba} \quad ; \quad \varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

которое меняет знак временной компоненты и оставляет неизменным знак пространственных компонент вектора $x_\mu = z_r (\sigma_\mu)^r_{\dot s} z^{*\dot s}$.

С помощью легко проверяемого соотношения

$$f_{a_1 \dots a_{2j}}(-p; z) = \varepsilon_{a_1 a_1'} \cdots \varepsilon_{a_{2j} a_{2j}'} \left[(-)^{2j} f_{a_1' \dots a_{2j}'}(p_0, -\vec{p}; Tz) \right]^+$$

мы получим

$$\sum_j D_{\alpha_{2j}}(-p; kk_3) \overline{D}^{\alpha_{2j}}(-p; ii_3) =$$

$$= \iint \sum_j f_{\alpha_{2j}}(p_0, -\vec{p}; w) \overline{f}^{\alpha_{2j}}(p_0, -\vec{p}; z) f^+_{ii_3}(w) f_{kk_3}(z)\, d\mu(Tz)\, d\mu(Tw) .$$

Так как мера $d\mu(z)$ инвариантна также относительно Т-преобразования, то, повторив доказательство предыдущего случая, можно полностью доказать формулу (4.3). Следующие соотношения также будут полезны в дальнейшем:

$$D_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\alpha_i}_{\beta_i} = D_{\alpha_1 \dots \beta_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) , \qquad (4.6)$$

$$D_{\alpha_{2i}}(\pm p; kk_3) \overline{D}^{\beta_{2j}}(\pm p; kk_3) = \delta_{ij} \left(1 \mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\beta_1}_{\alpha_1} \cdots \left(1 \mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\beta_{2j}}_{\alpha_{2j}} , \qquad (4.7)$$

где $(\hat{p})^\beta_\alpha = (\gamma_\mu p_\mu)^\beta_\alpha \; ; \; (\gamma_\mu)^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)^{\dot a}_{b} \\ (\sigma_\mu)^{b}_{\dot a} & 0 \end{pmatrix}$.

Докажем справедливость соотношения (4.6). Для i-ого индекса по определению имеем:

$$D_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) = \left(D_{\alpha_1 \dots a_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3), \left(\mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\dot s_i}_{\dot a_i} D_{\alpha_1 \dots \dot s_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) \right).$$

Теперь легко проверить, что

$$\left(D_{\alpha_1 \dots a_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3), D_{\alpha_1 \dots \dot a_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta^{a_i}_{b_i} & \left(\mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{a_i}_{\dot b_i} \\ \left(\mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\dot a_i}_{b_i} & \delta^{\dot a_i}_{\dot b_i} \end{pmatrix} =$$

$$= D_{\alpha_1 \dots \beta_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p; kk_3) .$$

Перейдем к доказательству соотношения (4.7). Пользуясь (3.I) (4.I) и ортогональностью векторов $f_{kk_3}(z)$, можно получить следующую формулу:

$$D_{\dot a_1 \dots \dot a_{2i}}(\pm p; kk_3) D^{+\, b_1 \dots b_{2j}}(\pm p; kk_3) = \delta_{ij} \left(\mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{b_1}_{\dot a_1} \cdots \left(\mp \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{b_{2i}}_{\dot a_{2i}} .$$

Соотношение (4.7) доказывается теперь с помощью предыдущей формулы путем введения греческих индексов, принимающих четыре значения $1, 2, \dot 1, \dot 2$, по процедуре, использованной при получении $f_{\alpha_{2j}}(\pm p; z)$.

2. Локальность большого поля и компонентных полей

Пусть теперь ψ - некоторый элемент гильбертова пространства, реализующий самосопряженное представление $\tau \sim (\nu, 0)$. Будем рассматривать ψ как общее поле, содержащее бесконечный мультиплет; $\psi = \psi_+ + \psi_-$ можно разложить по базисам $f_{\alpha_2 j}(\pm p; z)$ следующим образом:

$$\psi(p;z) = \sum_{jkk_3} \psi^{\alpha_2 j}(p) D_{\alpha_2 j}(p;kk_3) f_{kk_3}(z) + \psi^{\alpha_2 j}(-p) D_{\alpha_2 j}(-p;kk_3) f_{kk_3}(z). \quad (4.8)$$

Спиноры $\psi^{\alpha_2 j}(p), \psi^{\alpha_2 j}(-p)$, удовлетворяющие уравнениям Баргмана-Вигнера

$$\left(1 \pm \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\beta_i}_{\alpha_i} \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_{2j}}(\pm p) = 0,$$

можно, в свою очередь, разложить по спиновым состояниям (по j_3 производится суммирование)

$$\psi^{\alpha_2 j}(p) = u^{\alpha_2 j}(p;j_3) a(\vec{p};jj_3),$$
$$\psi^{\alpha_2 j}(-p) = v^{\alpha_2 j}(-p;j_3) b^+(\vec{p};jj_3),$$

где a, b^+ — операторы аннигиляции частицы и рождения античастицы, соответственно.

Напишем теперь общее поле (4.8) в x-представлении:

$$\psi(x;z) = \int \sum_{jkk_3} \Big\{ u^{\alpha_2 j}(p;j_3) a(\vec{p};jj_3) D_{\alpha_2 j}(p;kk_3) f_{kk_3}(z) e^{-ipx} +$$
$$+ v^{\alpha_2 j}(-p;j_3) b^+(\vec{p};jj_3) D_{\alpha_2 j}(-p;kk_3) f_{kk_3}(z) e^{ipx} \Big\} d\mu(\vec{p}), \quad (4.9)$$

где $d\mu(\vec{p})$ — обычная инвариантная мера на массовой поверхности.

Эрмитово сопряженное выражение для общего поля имеет вид:

$$\psi^+(y;w) = \int \sum_{jkk_3} \Big\{ \overline{u}_{\alpha_2 j}(p;j_3) a^+(\vec{p};jj_3) \overline{D}^{\alpha_2 j}(p;kk_3) f^+_{kk_3}(w) e^{ipy} +$$
$$+ \overline{v}_{\alpha_2 j}(-p;j_3) b(\vec{p};jj_3) \overline{D}^{\alpha_2 j}(-p;kk_3) f^+_{kk_3}(w) e^{-ipy} \Big\} d\mu(\vec{p}). \quad (4.10)$$

Предположив, что операторы a, b удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$[a(\vec{p};jj_3), a^+(\vec{p}';j'j_3')]_\pm = \delta_{jj'} \delta_{j_3 j_3'} \delta(\vec{p}-\vec{p}'),$$
$$[b(\vec{p};jj_3), b^+(\vec{p}';j'j_3')]_\pm = \delta_{jj'} \delta_{j_3 j_3'} \delta(\vec{p}-\vec{p}'), \quad (4.11)$$

и пользуясь (4.6) (4.3) и следующими соотношениями, являющимися обобщенными формулами суммирования по спиновому индексу:

$$u^{\alpha_2 j}(p;j_3) \overline{u}_{\beta_2 j}(p;j_3) = \frac{1}{2^{2j}} \left(1 - \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \left(1 - \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\alpha_{2j}}_{\beta_{2j}}, \quad (4.12)$$

$$v^{\alpha_2 j}(p;j_3) \overline{v}_{\beta_2 j}(p;j_3) = (-)^{2j} \frac{1}{2^{2j}} \left(1 + \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \left(1 + \frac{i\hat{p}}{m}\right)^{\alpha_{2j}}_{\beta_{2j}}, \quad (4.13)$$

получим:

$$[\psi(x;z), \psi^+(y;w)]_\pm = \sum_{kk_3} f_{kk_3}(z) f^+_{kk_3}(w) \Big\{ \int \big[e^{-ip(x-y)} \pm (-)^{2\nu} e^{ip(x-y)} \big] d\mu(\vec{p}) \Big\}. \quad (4.14)$$

Таким образом, условие причинности требует, чтобы общее поле квантовалось по Бозе, если оно является бозонным бесконечным мультиплетом и по Ферми, если оно - фермионный бесконечный мультиплет. Выражение (4.I4) можно написать в более компактном виде, если пользоваться (4.5)

$$\left[\psi(x;z),\psi^{+}(y;w)\right]_{\pm} = \delta_{\mu}(z-w)\,i\Delta(x-y)\ . \qquad (4.I5)$$

Это коммутационное соотношение инвариантно относительно группы симметрии G .

Очевидно, для компонентных полей с определенными спинами имеется обычная связь между статистикой и спином.

Покажем теперь, что из коммутационного соотношения (4.I5) для большого поля путем проектирования можно получить коммутационные соотношения для компонентных физических полей.

Компоненты $\psi^{\alpha_2 j}(p)$, $\psi^{\alpha_2 j}(-p)$ в выражении (4.8) можно написать в следующем виде:

$$\psi^{\alpha_2 j}(\pm p) = \overline{D}^{\alpha_2 j}(\pm p;ii_3)\psi_{ii_3}\ , \qquad (4.I6)$$

где ψ_{ii_3} —— волновая функция частицы, находящейся в покое. Тогда между функциями

$$\psi^{\alpha_2 j}(x) = \int\left[\psi^{\alpha_2 j}(p)e^{-ipx}+\psi^{\alpha_2 j}(-p)e^{ipx}\right]d\mu(\vec{p})$$

и $$\psi_{ii_3}(x) = \int\left[\psi_{ii_3}e^{-ipx}+\psi_{ii_3}e^{ipx}\right]d\mu(\vec{p})\ ,$$

существует простая связь:

$$\psi^{\alpha_2 j}(x) = \overline{D}^{\alpha_2 j}\left(i\frac{\partial}{\partial x};ii_3\right)\psi_{ii_3}(x)\ . \qquad (4.I7)$$

Подставив (4.I6) в (4.9) и пользуясь формулой (4.3), мы получим

$$\psi(x;z) = \int\sum_{ii_3}\left[\psi_{ii_3}f_{ii_3}(z)e^{-ipx}+\psi_{ii_3}f_{ii_3}(z)e^{ipx}\right]d\mu(z) \qquad (4.I8)$$
$$= \sum_{ii_3}\psi_{ii_3}(x)f_{ii_3}(z)\ .$$

Назовем компоненты $\psi^{\alpha_2 j}(x)$ и $\psi_{ii_3}(x)$ соответственно физическим и нефизическими компонентами большого поля. Подставив (4.I8) в (4.I5) и пользуясь условием полноты векторов $f_{ii_3}(z)$, можно получить для нефизических компонент следующее коммутационное соотношение

$$\left[\psi_{ii_3}(x),\psi^{+}_{i'i'_3}(y)\right]_{\pm} = \delta_{ii'}\delta_{i_3i'_3}\,i\Delta(x-y)\ . \qquad (4.I9)$$

С помощью (4.I7) (4.I9) и (4.7) можно вывести коммутационное соотношение для физических компонент. Оно имеет вид:

$$\left[\psi^{\alpha_2 j}(x),\overline{\psi}_{\beta_2 i}(y)\right]_{\pm} = \delta_{ij}\left(\hat{\partial}+m\right)^{\alpha_1}_{\beta_1}\cdots\left(\hat{\partial}+m\right)^{\alpha_2 j}_{\beta_2 j}\,i\Delta(x-y), \qquad (4.20)$$

где $\hat{\partial} = i\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$.

Коммутационное соотношение (4.20) инвариантно относительно группы $SL(2,C)$.

Таким образом, мы видим, что можно построить теорию, в которой большое поле и его компоненты являются локальными при правильной связи между статистикой и спином. Положение меняется, если речь идет о взаимодействующих между собой полях. Если предположим, что большое взаимодействующее поле локально, т.е. имеет место следующее соотношение

$$[\psi(x;z),\psi^{+}(y;w)]_{\pm}=0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2>0 ,$$

которое совместимо с требованиями симметрии, тогда для компонентных взаимодействующих полей локальность нарушается

$$[\psi^{\alpha_{2j}}(x),\overline{\psi}_{\beta_{2j}}(y)]_{\pm}\neq 0 . \quad \text{при} \quad (x-y)^2>0 .$$

3. <u>Лагранжев формализм и "перекрестная симметрия"</u>

Лагранжиан для всего бесконечного мультиплета имеет вид:

$$\mathcal{L}=\sum_j\Big\{-\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\alpha_1\ldots\rho_i\ldots\alpha_{2j}}(\gamma_\mu)^{\rho_i}_{\sigma_i}\frac{\partial\psi^{\alpha_1\ldots\sigma_i\ldots\alpha_{2j}}}{\partial x_\mu}+ \tag{4.21}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\psi}_{\alpha_1\ldots\rho_i\ldots\alpha_{2j}}}{\partial x_\mu}(\gamma_\mu)^{\rho_i}_{\sigma_i}\psi^{\alpha_1\ldots\sigma_i\ldots\alpha_{2j}}-m\overline{\psi}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}\psi^{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}\Big\}.$$

При варьировании компонентные поля с разными спинами считаются независимыми. Обычным путем из (4.21) получаем для тензора энергии-импульса бесконечного мультиплета следующее выражение

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}=\sum_j\Big\{\overline{\psi}_{\alpha_1\ldots\rho_i\ldots\alpha_{2j}}(\gamma_\nu)^{\rho_i}_{\sigma_i}\frac{\partial\psi^{\alpha_1\ldots\sigma_i\ldots\alpha_{2j}}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\overline{\psi}_{\alpha_1\ldots\rho_i\ldots\alpha_{2j}}}{\partial x_\mu}(\gamma_\nu)^{\rho_i}_{\sigma_i}\psi^{\alpha_1\ldots\sigma_i\ldots\alpha_{2j}}\Big\}.$$

После квантования энергия бесконечного мультиплета задается формулой:

$$\mathcal{E}=\int:\mathcal{T}_{00}:d\vec{x}=\int d\vec{p}\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\sum_j\left[a^{+}(\vec{p};jj_3)a(\vec{p};jj_3)+b^{+}(\vec{p};jj_3)b(\vec{p};jj_3)\right]$$
$$=\int d\vec{p}\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\int:\psi^{+}_{+}(p;z)\psi_{+}(p;z)+\psi^{+}_{-}(p;z)\psi_{-}(p;z):d\mu(z).$$

Таким образом, энергия $\mathcal{E}$ общего поля положительно-определена и инвариантна относительно группы внутренней симметрии.

Рассмотрим теперь взаимодействие бесконечного мультиплета с некоторым синглетным полем. Операторная функция имеет вид:

$$g(s,t,u)\int\psi^{+}(p';z)\psi(p;z)d\mu(z) , \tag{4.22}$$

где $g(s,t,u)$-некоторый форм-фактор. В выражении (4.22) были опущены полевые операторы синглетного поля. Подставив (4.9) (4.10) в (4.22), получим для канала рассеяния и канала аннигиляции следующие матричные элементы

$$\sum_{jkk_3}\overline{u}_{\alpha_{2j}}(p')\overline{D}^{\alpha_{2j}}(p';kk_3)D_{\beta_{2j}}(p;kk_3)u^{\beta_{2j}}(p) , \tag{4.23}$$

$$\sum_{jkk_3}\overline{v}_{\alpha_{2j}}(-p')\overline{D}^{\alpha_{2j}}(-p';kk_3)D_{\beta_{2j}}(p;kk_3)u^{\beta_{2j}}(p) . \tag{4.24}$$

Выражения (4.23) (4.24) показывают в самом общем виде, что в рассматриваемом случае имеет место правило замены Лоу. Однако пока не существует теоретических аргументов для аналитического продолжения (4.23) в (4.24).

Для иллюстрации рассмотрим процесс аннигиляции $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\to l+0$. Вычислим явное выражение для матричного элемента. Пользуясь (4.24) (4.2), мы получим:

$$\overline{v}_\alpha(-p')u^\beta(p)\int \overline{f}^\alpha(-p;z)f_\beta(p;z)\,d\mu(z) =$$

$$= \overline{v}_\alpha(-p')u^\alpha(p)\frac{\pi}{2(1-\alpha)\sqrt{\alpha^2-1}}\left[\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}-\sqrt{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}\right], \qquad (4.25)$$

где $\alpha = -\frac{p'p}{m^2}$.

Выражение (4.25) действительно можно непосредственно получить из матричного элемента процесса рассеяния (3.12) правилом замены Лоу.

У. Обобщенные правила Фейнмана для бесконечных мультиплетов

I. Вершинная функция

Рассмотрим теперь вершину взаимодействия бесконечного фермионного мультиплета $\psi(x;z)$ с бесконечным бозонным мультиплетом $\phi(x;z)$. Для фермионного мультиплета воспользуемся неприводимым унитарным представлением $(\nu_f,0)$ $\left(\nu_f=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\dots\right)$, а для бозонного мультиплета – неприводимым унитарным представлением $(\nu_b,0)$ $(\nu_b=0,1,2,\dots)$. Тогда инвариантная вершинная функция имеет вид:

$$\int \psi^+(x;z)\psi(x;z')\phi(x;z'')K(z,z';z'')\,d\mu(z)d\mu(z')d\mu(z''), \qquad (5.1)$$

где $K(z,z';z'') = z^{-\nu_b-1}z^{*\nu_b-1}z'^{-\nu_b-1}z'^{*\nu_b-1}z''^{\nu_b-2\nu_f-1}z''^{*-\nu_b+2\nu_f-1}$

Условие целочисленности для $2\nu_b-4\nu_f$ в нашем случае удовлетворяется.

Пользуясь формулой (4.18), мы получим для инвариантной вершинной функции (5.1) выражение

$$\psi^+_{ii_3}(x)\psi_{jj_3}(x)\phi_{kk_3}(x)\begin{pmatrix} i & j & k \\ i_3 & j_3 & k_3\end{pmatrix},$$

где $\psi^+_{ii_3},\psi_{jj_3},\phi_{kk_3}$ — нефизические **компоненты**, а обобщенные $3j$-символы записываются с помощью следующего интеграла

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ i_3 & j_3 & k_3\end{pmatrix} = \int f^+_{ii_3}(z)f_{jj_3}(z')f_{kk_3}(z'')K(z,z';z'')\,d\mu(z)d\mu(z')d\mu(z''). \quad (5.2)$$

Обобщенные коэффициенты Клебша-Гордона для унитарных **представлений** однородной группы Лоренца были недавно получены в работе [32]. Подставив (4.9) (4.10) в (5.1), можно получить инвариантную вершинную функцию, выраженную через физические компоненты. Например, для вершины взаимодействия положительно частотных компонент мы имеем

$$\iiint d\mu(\vec p)d\mu(\vec q)d\mu(\vec r)\,e^{i(p-q-r)x}\,\overline{\psi}_{\alpha_{2l}}(p)\psi^{\beta_{2m}}(q)\phi^{\gamma_{2n}}(r)\cdot$$

$$\cdot D^{\alpha_{2l}}(p;ii_3)D_{\beta_{2m}}(p;jj_3)D_{\gamma_{2n}}(r;kk_3)\begin{pmatrix} i & j & k \\ i_3 & j_3 & k_3\end{pmatrix}.$$

2. Рассеяние двух бесконечных мультиплетов

Большое поле, введенное нами в параграфе IУ, оказывается очень полезным при формулировке правил Фейнмана для теории с бесконечными мультиплетами. Работая с большим полем, легко образовать различные инвариантные величины. С помощью большого поля можно сразу сформулировать правила Фейнмана. Но сначала мы хотим остановиться на одном принципиальном вопросе, а именно, на вопросе о возможности построения формализма ренормируемой теории поля с бесконечными мультиплетами, лишенной бессмысленных бесконечных вершин.

В работах [33] Нишижима развил формализм ренормированных полей, нигде в процессе вычислений не прибегая к бесконечным величинам. С помощью этого формализма можно получить в теории возмущений результаты обычной квантовой теории поля. Изложим вкратце теорию Нишижимы. Исходя из условия унитарности и асимптотических условий можно написать для функций:

$$\tau(x_1 \dots x_n) = (-i)^n K_{x_1} \dots K_{x_n} \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle$$

следующую систему уравнений:

$$\tau(x_1 \dots x_n) + \tau^*(x_1 \dots x_n) +$$
$$+ \sum_{comb}{}' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int du\, dv\, \tau(x_1' \dots x_k' u_1 \dots u_l) \Delta^{(+)}(u_1 - v_1) \dots \Delta^{(+)}(u_l - v_l) \tau^*(x_{k+1}' \dots x_n' v_1 \dots v_l) = 0, \quad (5.3)$$

где $\sum_{comb}'$ означает суммирование по всевозможным комбинациям при разделении переменных $x_1, \dots, x_n$ на две группы $x_1', \dots, x_k'$ и $x_{k+1}', \dots, x_n'$ с $k \neq 0, k \neq n$.

Ограничиваясь только связанными диаграммами, можно ввести преобразование Фурье для τ:

$$\tau(x_1 \dots x_n) = -\frac{i}{(2\pi)^{4(n-1)}} \int dp_1 \dots dp_n\, \delta(p_1 + \dots + p_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G(p_\alpha p_\beta)$$

где G — функция от скалярных произведений импульсов p_i. Пользуясь общим видом интегрального представления функции G, Нишижима пришел к следующему "параметрическому дисперсионному соотношению" (с вычитанием и без вычитания):

$$\mathrm{Re}\, G(p_\alpha p_\beta \cdot \xi) = \frac{P}{\pi} \left[\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^{0} \right] \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \mathrm{Im}\, G(p_\alpha p_\beta \cdot \xi'), \quad (5.4)$$

где ξ — общий параметр, который нужно умножить на все скалярные произведения импульсов p_i.

Уравнение (5.3) и соотношение (5.4) позволяют определить функции $\tau(x_1 \dots x_n)$. Нишижима получил для пропагатора скалярного поля ψ' и функции Грина для процесса рассеяния скалярного поля ψ' на скалярном поле ϕ во втором порядке теории возмущения следующие выражения:

$$\langle 0 | T(\psi(x) \psi^+(y)) | 0 \rangle = \Delta_F(x-y; m) + \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} d\varsigma^2 \Delta_F(x-y; \varsigma) \sigma(\varsigma^2), \quad (5.5)$$

где m, μ — массы соответствующие полям ψ' и ϕ,

$$\sigma(\varsigma^2) = g^2 \frac{1}{(m^2 - \varsigma^2)^2} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m+\mu}{\varsigma}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{m-\mu}{\varsigma}\right)^2\right]}, \quad (5.6)$$

$$(-i)^4 K_{x_1}^m K_{x_2}^\mu K_{x_3}^m K_{x_4}^\mu \langle 0 | T(\psi(x_1) \phi(x_2) \psi^+(x_3) \phi(x_4)) | 0 \rangle =$$
$$= -g^2 \Delta_F(x_1 - x_3; m) \left[\delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) + \delta(x_1 - x_4) \delta(x_3 - x_2) \right].$$

Это известные результаты обычной квантованной теории поля.

Рассматривая теперь большое поле как реальное поле, удовлетворяющее параметрическому дисперсионному соотношению (5.4), мы можем применить весь формализм Нишиджимы к теории поля с бесконечными мультиплетами. Пользуясь теперь (4.I5) и учитывая свойства симметрии, мы получим для бесконечных мультиплетов $\psi(x;z)$ и $\phi(x;z)$ следующие выражения:

$$\langle 0 | T(\psi(x;z)\psi^{+}(y;w)) | 0 \rangle = \delta_\mu(z-w)\Delta_F(x-y;m) + $$
$$+ \int \Big[\int_{(m+\mu)^2}^{\infty} d\rho^2 \Delta_F(x-y;\rho)\sigma(\rho^2) \Big] K(z',z,z'') K(w,z',z'') d\mu(z') d\mu(z'') \tag{5.7}$$

$$(-i)^4 K_{x_1}^{m} K_{x_2}^{\mu} K_{x_3}^{m} K_{x_4}^{\mu} \langle 0 | T(\psi(x_1;z_1)\phi(x_2;z_2)\psi^{+}(x_3;z_3)\phi(x_4;z_4)) | 0 \rangle =$$

$$= -g^2 \Delta_F(x_1-x_3;m)\big[\delta(x_1-x_2)\delta(x_3-x_4) + \delta(x_1-x_4)\delta(x_3-x_2)\big] \int \delta_\mu(z_1'-z_3') K(z_1',z_1,z_2) K(z_3,z_3',z_4) d\mu(z_1') d\mu(z_2') . \tag{5.8}$$

В импульсном представлении функция Грина (5.8) имеет вид

$$G(p_i;z_i) = g^2 \Big[\frac{1}{(p_1+p_2)^2+m^2-i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1+p_4)^2+m^2-i\varepsilon} \Big] \int \delta_\mu(z_1'-z_3') K(z_1',z_1,z_2) K(z_3,z_3',z_4) d\mu(z_1') d\mu(z_2') . \tag{5.9}$$

Можно теперь написать инвариантную операторную функцию, соответствующую процессу рассеяния во втором порядке:

$$\int G(p_1p_2p_3p_4;z_1z_2z_3z_4) : \psi(p_1;z_1)\phi(p_2;z_2)\psi^{+}(p_3;z_3)\phi(p_4;z_4) : d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3)d\mu(z_4) . \tag{5.10}$$

Выражение (5.I0) дает бесконечную сумму членов, каждый член описывает процесс рассеяния состояний с определенными спинами.

Рассмотрим, например, процесс рассеяния $\frac{1}{2}+0 \longrightarrow \frac{1}{2}+0$ во втором порядке теории возмущений. Считая частицу $\frac{1}{2}$ принадлежащей полю $\psi(x;z)$, а частицу 0 – полю $\phi(x;z)$, мы имеем следующий матричный элемент:

$$u^{\alpha}(p_1)\bar{u}_{\beta}(p_3)\varphi(p_2)\varphi(p_4) g^2 \Big[\frac{1}{(p_1+p_2)^2+m^2-i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1+p_4)^2+m^2-i\varepsilon} \Big] \cdot \tag{5.11}$$

$$\cdot \int \delta_\mu(z_1'-z_3') K(z_1',z_1,z_2) K(z_3,z_3',z_4) f_\alpha(p_1;z_1) \bar{f}^{\beta}(p_3;z_3) f(p_2;z_2) f(p_4;z_4) d\mu(z_1') d\mu(z_3') d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) d\mu(z_4).$$

Интеграл в предыдущем выражении является кинематическим фактором (явный вид для частного случая рассеяния бесконечного мультиплета на синглете был получен в параграфе Ш), обусловленным свойствами симметрии. Как было сказано, кинематические факторы удовлетворяют правилу замены Лоу, однако не существует аргументов для их аналитического продолжения.

Динамический фактор

$$\frac{1}{(p_1+p_2)^2+m^2-i\varepsilon} + (p_2 \to p_4)$$

обладает обычными аналитическими свойствами.

Отметим здесь одно важное обстоятельство теории с бесконечными мультиплетами. Пользуясь (5.2), (4.6), после несложных выкладок можно написать матричный элемент (5.II) с точностью до так называемых контактных термов в следующем виде:

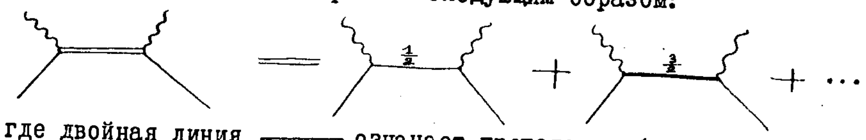
$$\overline{u}_\beta(p_3)\varphi(p_4)\begin{pmatrix} j & l & s \\ j_3 & l_3 & s_3\end{pmatrix}\overline{D}^\beta(p_3;jj_3)D(p_4;ll_3)\sum_{h=1/2}^{\infty}\left[D_{\mu_{2h}}(p_{12};ss_3)\Pi^{\mu_{2h}}_{\nu_{2h}}(p_{12})\overline{D}^{\nu_{2h}}(p_{12};rr_3)\right]\cdot$$

$$\cdot D(p_2;kk_3)D_\alpha(p_1;ii_3)\begin{pmatrix} r & k & i \\ r_3 & k_3 & i_3\end{pmatrix}\varphi(p_2)u^\alpha(p_1) + (p_2\leftrightarrow p_4) \quad , \qquad (5.12)$$

где $p_{12} = p_1 + p_2$; $\Pi^{\mu_{2h}}_{\nu_{2h}}$ — пропагатор состояния со спином h

$$\Pi^{\mu_{2h}}_{\nu_{2h}}(p) = \frac{(-i\hat{p}+m)^{\mu_1}_{\nu_1}\dots(-i\hat{p}+m)^{\mu_{2h}}_{\nu_{2h}}}{p^2+m^2-i\varepsilon} \quad .$$

Таким образом, матричный элемент (5.II) можно рассматривать как сумму бесконечного числа матричных элементов, соответствующих всем диаграммам второго порядка процесса рассеяния $\frac{1}{2}+0 \to \frac{1}{2}+0$, виртуальные состояния которых обладают всевозможными спинами. Эту сумму символически изображаем следующим образом:



где двойная линия ══ означает пропагатор большого поля.

При получении (5.I2) мы не обращали внимание на контактные члены. В конфигурационном пространстве эти контактные члены возникают в результате действия оператора $D_{\mu_{2h}}(i\partial;ss_3)\Pi^{\mu_{2h}}_{\nu_{2h}}(i\hat{\partial})\overline{D}^{\nu_{2h}}(i\partial;rr_3)$ на функции θ , фигурирующие в пропагаторе большого поля ψ :

$$\theta(x-y)\langle 0|\psi(x;z_1')\psi^+(y;z_3')|0\rangle + \theta(y-x)\langle 0|\psi^+(y;z_3')\psi(x;z_1')|0\rangle \quad .$$

Для наглядной физической интерпретации мы не включили эти контактные члены в сумму (5.I2), однако они играют существенную роль в нашей теории: без них сумма (5.I2) не сходится к матричному элементу (5.II).

Все изложенные результаты можно также получить с помощью следующих обобщенных правил Фейнмана:

I. **внешней** линии сопоставить $\psi(x;z)$ или $\phi(x;z)$;

2. **внутренней** линии, идущей от точки x_i в точку x_j сопоставить пропагатор большого поля

$$\delta_\mu(z_i-z_j)\,\Delta_F(x_i-x_j;m) \quad ,$$

где z_i, z_j - переменные симметрии, соответствующие двум концам пропагатора ;

3. **каждой** вершине взаимодействия трех линий (внутренние и внешние), соответствующих переменным симметрии z_1, z_2, z_3, сопоставить ядро $K(z_1,z_2,z_3)$ и проинтегрировать по z_1, z_2, z_3 ;

4. Чтобы получить матричный элемент для процесса взаимодействия состояний с определенными спинами, нужно спроектировать внешние линии на интересующие нас состояния.

Отметим, что мы получили для пропагатора большого поля функцию $\Delta_F(x_i-x_j)$ в отличие от автора работы[34], который, следуя подходу Фелдмана-Мэтюса[26], получил ее для пропагатор всех компонентных полей независимо от их спинов.

С помощью сформулированных выше обобщенных правил Фейнмана легко показать, что в квантовой теории поля с бесконечными мультиплетами только две следующих диаграммы приводят к расходимостям, независимо от значения спина интересующих нас состояний во внешних линиях.

Этот результат, который был также получен в работах[27,35], открывает новую возможность для построения реномируемой теории взаимодействия частиц с высшими спинами.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессорам Н.Н.Боголюбову, А.Н.Тавхелидзе. И.Т.Тодорову за интерес к работе и ценные обсуждения.

Литература

[1]. A.O.Barut, P.Budini, C.Fronsdal, preprint Trieste (1965).

[2]. Y.Dothan, M.Gell-Mann, Y.Ne'eman, Phys.Lett 17, 148 (1965).

[3]. L.Michel, Phys.Rev. 137, B405 (1965).

[4]. P.Budini, C.Fronsdal, Phys.Rev.Lett. 14, 968 (1965).

[5]. R.Delbrougo, A.Salam, J.Strathdee, Proc.Roy.Soc. 289A, 177 (1965).

[6]. W.Ruhl, Preprints CERN (1965-1966).

[7]. И.Тодоров. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц, Наукова Думка, Киев, I967.

[8]. Нгуен Ван Хьеу, Физика высоких энергий и теория элементарных частиц, Наукова Думка, Киев, I967.

[9]. B.Sakita, Phys.Rev. 136, B1756 (1964).

[10]. T.Fulton, T.Wess, Phys.Lett. 14, 57 (1965).

[11]. H.Bacry, T.Nuyts, preprint CERN (1964).

[12]. W.Ruhl, Nuovo Cimento 37, 301 (1965).

[13]. Yu.V.Novozhilov, I.A.Terentjev, Phys.Lett. 15, 86 (1965).

[14]. V.G.Kadyshevsky, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, Phys.Lett. 15, 180 (1965).

[15]. Нгуен Ван Хьеу, ЯФ 2, 5I7 (I965).

[16]. A.Salam, R.Delbrougo, J.Strathdee, Proc.Roy.Soc. 284 A, 146 (1965).

[17]. B.Sakita, K.C.Wali, Phys.Rev. Lett. 14, 404 (1965).

[18]. M.A.B.Beg, A.Pais, Phys.Rev. 137, B1514 (1965).

[19]. Dao Vong Duc, Nguyen van Hieu, Ann.Inst.Henri Poincaré 1, 17 (1967).

[20]. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу, ДАН I73, I28I (I967).

[21]. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу, ЯФ 6, I86 (I967).

[22]. Nguyen van Hieu, Proceedings of the VI Cracow School of Theoretica Physics (1966).

[23]. M.A.Naimark, Transactions of the Moscow Math.Soc. 8, 121 (1958).

[24]. Nguyen Van Hieu, Acta Phys. Acad.Soit.Hungaricae 22, 187 (1967).

[25]. B.Zumino, High Energy Physics and Elementary Particles, IAEA Viena (1966).

[26]. G.Feldman, P.T.Matthews, Phys.Rev. 151, 1176 (1966).

[27]. C.Fronsdal, Infinite Multiplets and Local Fields (1966).

[28]. D.T.Stoyanov, I.T.Todorov, Preprint IC/67/58, Trieste (1967).

[29]. Cao Chi, Nguyen van Hieu, Preprint JINR E2-3430, Dubna (1967).

[30]. И.М.Гельфанд, Я.М.Яглом, ЖЭТФ I8, 703 (I948).

И.М.Гельфанд, Я.М.Яглом, ЖЭТФ I8, I096 (I948).

[31]. S.Weinberg, Phys.Rev. 133, B1318 (1964).

[32]. R.L.Anderson, R.Raczka, M.A.Rashid, P.Winternitz, Preprints IC/67/50, IC/67/64, Trieste (1967).

[33]. K.Nishijima, Phys.Rev. 119, 485 (1960).

M.Muraskin, K.Nishijima, Phys.Rev. 122,331 (1961).

[34]. K.Koller, preprint ICTP /65/25, Imp.Coll., London (I967).

[35]. Cao Chi, preprint P2-3200, JINR Dubna (1967).