

C-904

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P2 - 3597

В.К.Сусленко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

К ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА



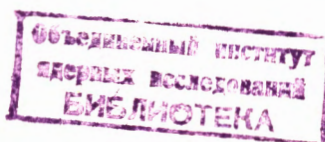
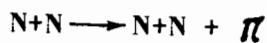
1967.

5543/2 н/о.

P2 - 3597

В.К.Сусленко ^{x)}

К ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА



x) Радиевый институт им. В.Г.Хлопина, Ленинград.

A b s t r a c t

In this paper the one-pion-production process in NN collisions is considered and the convenient reference system determined by the laboratory vector $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}_1^L$ was proposed. Using this reference system and taking into account the energy and momentum conservation laws (15) and (16), the method of calculation of the differential cross sections for pions (expression (43)) was developed.

Equation (29) represents the solution of the conservation laws, the absence of the ϕ - dependence in it being the consequence of the motion symmetry of nucleons q_1 and q_2 relative to the vector \vec{R} , and by this reason the range $0 < \phi < 2\pi$ for the integration variable ϕ is permitted. For another integration variable, $\cos \beta$, the expressions (25) and (42) represent the limiting values A and B, which were obtained by taking into account equations (23), (29), (36) - (41). From equations (44) and (45) it is easy to prove that the upper limit $B = +1$ is impossible. The equations (46)-(55) contain the proof of the existence of the limit B and that of the unique possibility of the (+) solution in expression (23).

The main feature of the proposed method of the differential cross section calculation consists in expressing the five fundamental invariants through the values determined at the lab. system, namely, masses, T , T_{π}^L , θ^L and q_{j0}^L , $\cos \beta_j$, ϕ_j ($j = 1, 2$), and in obtaining the limits of the π integration variables $\cos \beta_j$ and ϕ_j .

In the case of pion distributions only invariants t^2 and \bar{t}^2 include the functional dependence on $\cos \beta_j$ and ϕ_j and the formulae (76) - (79) give their explicit expressions.

This approach appears as a general one for every process of type (1), the derivation of the square of matrix element $|M_{fi}|^2$ in terms of the fundamental invariants being the matter of any model. Using the matrix element of the peripheral model, the machine computer calculations of the energy distributions of pions (eq. (80)) for the process $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ were carried out and the good qualitative agreement with the experimental data at $T = 556$ and 660 MeV, $\theta^L = 24^\circ$

was obtained. In these calculations the formfactor $G(t_1^2) = \frac{8\mu_{\pi}}{t_1^2 + 9\mu^2}$ was used. This agreement proves the applicability of the peripheral model conceptions at the energy region 0.5-0.7 BeV.

The analogous calculations with the rules proposed by Ferrari and Selleri [4] (D-system) (88) and Nurushev and Solovjanov [8] (L-system) (101) were also carried out, and the ambiguities of their approaches were shown.

Для полного описания системы n частиц необходимо ввести $3n - 10$ независимых инвариантов. Процесс одномезонного образования в нуклон-нуклонных соударениях



характеризуется пятью независимыми инвариантами. Кинематическое решение проблемы, основанное на строгом учете законов сохранения энергии и импульса, позволяет определить допустимые размеры фазового пространства, функциональную зависимость инвариантов и, тем самым, матричного элемента от переменных интегрирования и их границы изменения. Задачей конкретной модели является установление вида зависимости матричного элемента от всех характерных инвариантов рассматриваемого процесса. Для процесса (1) рассматривались для энергий от порога до 600 Мэв "резонансная" модель^{/1/} и для энергий выше 800 Мэв изобарическая^{/2/} и периферическая (ПМ)^{/3-7/} модели. Резонансная модель, предложенная Мандельштамом, является феноменологической моделью, в которой учитывается роль $(3/2, 3/2)$ резонанса физического πN рассеяния и проводится детальный учет эффектов взаимодействия πN и NN в конечных состояниях; матричные элементы полагаются константами. Изобарическая модель является синтезом статистических представлений и роли $(3/2, 3/2)$ резонанса и претендует на качественное описание процесса (1) при энергиях несколько Гэв.

Значительный прогресс в теоретическом рассмотрении процесса (1) достигнут в рамках периферической модели, предложенной Феррари и Селлари. Основная идея этой модели заключается в предположении доминирующей роли одно-

мезонного обмена и $(3/2, 3/2)$ резонанса πN рассеяния вне массовой поверхности, причем вид матричного элемента устанавливается на основе фейнмановских полюсных диаграмм. Предположения периферической модели проверялись сравнением с экспериментальными данными для энергетических распределений нуклонов в процессе



при энергиях $T=970, 2000$ и 2850 Мэв и было получено хорошее согласие^{/4/}. К сожалению, в вычислениях работы^{/4/} допущен произвол, возникший вследствие пренебрежения ограничениями, обусловленными законами сохранения энергии и импульса.

В данной работе предлагается удобная и наглядная система отсчета, с помощью которой проводится последовательный учет законов сохранения энергии и импульса; вычисляются энергетические спектры π^+ - мезонов, образующихся в процессе (2), с целью выяснения возможности распространения представлений периферической модели для области энергий $T=500 - 700$ Мэв.

1. Релятивистски инвариантная кинематика и выражение для дифференциального поперечного сечения процесса $N + N \rightarrow N + N + \pi$

Все предположения ПМ, ее аппарат и кинематическая схема подробно изложены в работах^{/3,4/}. Здесь кратко излагаются лишь существенные детали, необходимые для ясности дальнейшего анализа.

В рамках ПМ процессу (1) сопоставляются четыре полюсные фейнмановские диаграммы (рис.1). Для процесса (1) вводится фундаментальный набор пяти независимых релятивистски инвариантных величин

$$\begin{aligned} W^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ \omega^2 &= (q + q_1)^2 \\ u^2 &= (q + q_2)^2 \\ \Lambda^2 &= -(q_2 - p_2)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$t^2 = - (q_1 - p_1)^2 ,$$

где p_1, p_2, q, q_1 и q_2 - 4 - векторы, соответствующие частицам на рис.1. W - полная энергия в системе центра масс p_1 и p_2 ; $\omega(u)$ - полная энергия частиц $q, q_1 (q, q_2)$ в их с.ц.м., в которой $\vec{q} + \vec{q}_1 = 0 (\vec{q} + \vec{q}_2 = 0)$; Δ^2 и t^2 - квадраты четырехмерных переданных импульсов.

Можно образовать также вспомогательные инварианты

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= - (q_2 - p_1)^2 \\ \bar{t}^2 &= - (q_1 - p_2)^2 \\ \bar{r}^2 &= - (q - p_1)^2 \\ \bar{r}^2 &= - (q - p_2)^2 \\ z^2 &= (q_1 + q_2)^2 . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Первые четыре инварианта набора (3.2) являются переданными импульсами, пятый - квадратом полной энергии частиц q_1 и q_2 в их с.ц.м., где $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$.

Вспомогательные инварианты (3.2) выражаются через фундаментальные инварианты (3.1) следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= W^2 - 3m^2 - \omega^2 - \Delta^2 \\ \bar{t}^2 &= W^2 - 3m^2 - u^2 - t^2 \\ \bar{r}^2 &= \omega^2 + \Delta^2 - t^2 - \mu^2 - 2m^2 \\ \bar{r}^2 &= u^2 + t^2 - \Delta^2 - \mu^2 - 2m^2 \\ z^2 &= W^2 - \omega^2 - u^2 + \mu^2 + 2m^2 . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Любые кинематические величины (энергия, импульс, угол рассеяния и др.) в любой системе отсчета могут быть выражены через основные инварианты (3.1).

Полный инвариантный матричный элемент M_{fi} процесса (1) и (2), определенный соотношением

$$S_{fi} = -i(2\pi)^{-2} \left[\frac{m^4}{2q_0 q_{10} q_{20} p_{10} p_{20}} \right]^{1/2} \delta^4(q + q_1 + q_2 - p_1 - p_2) M_{fi}, \quad (4)$$

является алгебраической суммой четырех матричных элементов соответствующих диаграмм а), б), в), г), рис.1,

$$M_{fi} = M_a - M_b - M_c + M_d. \quad (5)$$

Конкретный вид матричных элементов, зависящий от деталей предположений ПМ, будет установлен в главе 3. Не конкретизируя вид полного матричного элемента (5), обратимся к способу вычисления двойных дифференциальных поперечных сечений $\frac{d^2\sigma}{dq_{10} d\Omega_1}$, ($i = \pi, N, N$).

Для процесса (1) общее дифференциальное поперечное сечение записывается через матричный элемент M_{fi} следующим образом:

$$d\sigma = (2\pi)^{-5} \frac{1}{F} \frac{m^4}{2} \sum |M_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3q d^3q_1 d^3q_2}{q_0 q_{10} q_{20}}, \quad (6)$$

где символ \sum означает усреднение по начальным и сумму по конечным спиновым состояниям; $F = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}$ - релятивистски инвариантный поток, m - масса нуклона.

q_0, q_{10}, q_{20} - полные энергии частиц в конечном канале,
 d^3q, d^3q_1, d^3q_2 - дифференциалы трехмерных импульсов,
 $\delta^4(P_f - P_i)$ - 4-мерная δ -функция, аргументом которой является выражение для закона сохранения

4-импульса, где $P_i = p_1 + p_2$, $P_f = q + q_1 + q_2$, т.е.

$$p_1 + p_2 = q + q_1 + q_2. \quad (7)$$

Выражение (7) является краткой записью законов сохранения энергии и импульса:

$$P_{10} + P_{20} = q_0 + \vec{q}_{10} + q_{20}, \quad (8)$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{q} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2. \quad (9)$$

Для вычисления двойного дифференциального поперечного сечения для любой из конечных частиц соответствующий ей дифференциал $d^3 q_1$ ($i = \pi, N, N$) переносится в левую часть выражения (6) и используется соотношение

$$d^3 q_1 = |\vec{q}_1| q_{10} d q_{10} d \Omega_1. \quad (10)$$

В частности, для двойного дифференциального поперечного сечения для пионов (частица q) получаем

$$\frac{d^2 \sigma}{d q_0 d \Omega} = \frac{(2\pi)^{-5}}{F} \frac{m^4}{2} |\vec{q}| \int \Sigma |M_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}}. \quad (11)$$

Выражения, подобные (11), для частиц q_1 и q_2 здесь не приводятся вследствие их очевидности. Следует иметь в виду, что величина $|\vec{q}|$ вычисляется в той же системе отсчета, что и q_0 и Ω . Выражение, стоящее под знаком интеграла в (11), является релятивистски инвариантным и может быть вычислено в любой системе отсчета. Его вычисление требует проведения шестикратного интегрирования. Четыре из них легко могут быть устранены с помощью δ^4 - функции, в результате чего остается двойной интеграл, вычисляемый обычно численно.

Подынтегральное выражение должно быть выражено через фундаментальный набор пяти инвариантов (3.1). Поскольку инварианты вспомогательного набора (3.2) выражаются через набор (3.1), то, если окажется удобным, они также могут использоваться в процессе вычислений.

Для вычислений выражений типа (11) авторами работы /4/ предложены следующие системы отсчета:

- а) лабораторная (L) система ($\vec{p}_2 = 0$),
- б) система центра масс (B) ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$),
- в) Q - система ($\vec{q} + \vec{q}_1 = 0$),
- г) P - система ($\vec{q} + \vec{q}_2 = 0$),
- д) D - система ($\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$),

из которых Q, P и D - системы использовались для вычисления выражений типа (11) для частиц q_2, q_1 и q , соответственно, и указаны пределы интегрирования, характерные для системы центра масс упругого рассеяния двух частиц. Ниже будет показано, что такие границы интегрирования выбраны произвольно и что это привело к пренебрежению законами сохранения энергии и импульса и, в конечном счете, к не соответствующим им результатам вычислений. Авторами другой работы /8/ проводились вычисления выражения (11) в L - системе и ими также допущена подобная неточность.

2. Выделенная лабораторная система отсчета (L_R - система) для процесса $N + N \rightarrow N + N + \pi$

Лабораторная система отсчета (L) определяется соотношением:

$$\vec{p}_2^L = 0. \quad (12)$$

Запишем законы сохранения энергии и импульса в L - системе

$$p_{10}^L + m = q_0^L + q_{10}^L + q_{20}^L, \quad (13)$$

$$\vec{p}_1^L = \vec{q}^L + \vec{q}_1^L + \vec{q}_2^L. \quad (14)$$

Введем следующие обозначения и перепишем выражения (13) и (14) в виде

$$R_0 = p_{10}^L + m - q_0^L = q_{10}^L + q_{20}^L, \quad (15)$$

$$\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}^L = \vec{q}_1^L + \vec{q}_2^L. \quad (16)$$

Введем повернутую относительно вектора \vec{p}_1^L лабораторную систему, определяемую вектором \mathbf{R} (L_R -система), заданного выражением (16). Роль этой системы будет ясна из дальнейшего рассмотрения.

В L_R -системе проведем вычисление подынтегрального выражения в (11) (знак Σ для краткости опускаем)

$$J = \int |M_{f1}|^2 \delta^4(P_f - P_1) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}}. \quad (17)$$

Устраним с помощью $\delta^4(P_f - P_1)$ четыре интегрирования

$$\begin{aligned} J &= \int \delta(P_{f0}^L - P_{10}^L) \frac{q_2^L d q_{20}^L d \Omega_2^L}{q} \int |M_{f1}|^2 \delta^3(\vec{P}_f^L - \vec{P}_1^L) d \vec{q}_1^L = \\ &= \int \frac{q_2^L}{q_{10}^L} \left| \frac{\partial \phi(q_{20}^L)}{\partial q_{20}^L} \right|^{-1} |M_{f1}|^2 d \Omega_2^L, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$d \Omega_2^L = d \cos \theta_{R q_2} d \phi_{q q_2},$$

причем величина под знаком интеграла (18) определяется при условиях

$$\vec{q}_1^L = \vec{R} - \vec{q}_2^L, \quad (19)$$

$$q_{20}^L = R_0 - q_{10}^L, \quad (20)$$

$$\phi(q_{20}^L) = P_{f0}^L - P_{10}^L = q_{20}^L + q_{10}^L - R_0. \quad (21)$$

Это означает, что четырехкратное интегрирование с помощью δ^4 - функции сводится к определению зависимости подынтегрального выражения (18) от переменных величин q_{20}^L , $\cos \theta_{R q_2}$ и $\phi_{q q_2}$, определенных в

L_R -системе в соответствии с законами сохранения энергии и импульса (15) и (16).

Ситуация в L_R - системе графически изображена на рис.2, где

$$\cos \alpha = \cos \theta_{Rq} = \frac{1}{R} (p_1^L \cos \theta_{\pi}^L - q^L)$$

$$\cos \beta_1 = \cos \theta_{Rq_1}$$

$$\cos \beta_2 = \cos \theta_{Rq_2}$$

$$\cos \gamma = \cos \theta_{qq_2}, \quad \phi_{qq_2} = \phi_{Rq_2} = \phi$$

$$\cos \epsilon^L = \cos \theta_{Rp_1} = \frac{1}{R} (p_1^L - q^L \cos \theta_{\pi}^L).$$

Из (20) и (19) имеем уравнение

$$q_{20}^L = R_0 - \sqrt{(R - q_2^L)^2 + m^2} = R_0 - \sqrt{R^2 - 2R \sqrt{(q_2^L)^2 - m^2} \cos \beta_2 + (q_{20}^L)^2}, \quad (22)$$

решением которого является величина

$$q_{20}^{L(+)} = \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2)} [R_0(R_0^2 - R^2) \pm R \cos \beta_2 \sqrt{(R_0^2 - R^2)^2 - 4m^2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2)}]. \quad (23)$$

Замечательной особенностью выражения (23) является то, что оно не содержит зависимости от азимутального угла $\phi_{qq_2} = \phi$ (угол ϕ_{qq_2} отсчитывается от плоскости, содержащей векторы \vec{R} , \vec{p}_1^L и \vec{q}^L). Это означает, что направления вектора \vec{q}_2^L , соответствующего величине (23), обладают полной симметрией относительно вектора \vec{R} в зависимости от азимутального угла ϕ_{qq_2} , а величина этого вектора одинакова при всех значениях угла ϕ_{qq_2} .

Очевидное условие вещественности величины $q_{20}^{L(+)}$ налагает ограничение

$$(R_0^2 - R^2)^2 - 4m^2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2) \geq 0. \quad (24)$$

Равенство нулю левой части выражения (24) определяет граничное значение $\cos \beta_2$, равное

$$A = (\cos \beta_2)_{\text{гп}} = \left| \sqrt{\frac{4m^2 R_0^2 - (R_0^2 - R^2)^2}{4m^2 R^2}} \right|. \quad (25)$$

Решение (23) содержит знаки (\pm) перед корневым выражением. Необходимо установить, которое из решений с определенным знаком имеет физический смысл. К сожалению, прямой подстановкой (23) в исходное выражение (22) не удается произвести выбор, так как в результате следует допустимость обоих решений.

Другой путь отбора решения может быть таким. Для краткости введем обозначения

$$a = (R_0^2 - R^2), \quad (26)$$

$$b = (R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2),$$

и вычислим импульс $q_2^{L(\pm)}$, соответствующий полной энергии $q_{20}^{L(\pm)}$ в (23),

$$\frac{1}{2b} [a R \cos \beta_2 \pm R_0 \sqrt{a^2 - 4m^2 b}] \quad (27.1)$$

$$q_2^{L(\pm)} = \frac{1}{2b} [R_0 \sqrt{a^2 - 4m^2 b} \pm a R \cos \beta_2]. \quad (27.2)$$

Правая часть для $q_2^{L(\pm)}$ может быть записана двояким математически допустимым образом в виде либо (27.1), либо (27.2).

Воспользуемся условиями:

1) $q_2^{L(\pm)} > 0$, что означает вещественность и положительность физических величин импульса (величина $q_2^{L(\pm)} = 0$ невозможна вследствие $(\cos \beta_2)_{\text{гп}} \neq 0$);

2) $a^2 - 4m^2 b = 0$ при $\cos \beta_2 = (\cos \beta_2)_{\text{гп}}$.

Пользуясь условием 2), из (27.1) получим

$$a R \cos \beta_2 > 0 .$$

(28)

Затем, пользуясь снова условием 2), из (27.2) устанавливаем, что для удовлетворения условия 1) в (27.2) необходимо взять только знак (+). Ниже будет изложен другой способ отбора решения с определенным знаком, подтверждающий необходимость только (+) решения.

Итак, единственным решением уравнения (22), удовлетворяющим физическим условиям задачи, является

$$q_{20}^L = q_{20}^{L(+)} = \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2)} [R_0(R_0^2 - R^2) + R \cos \beta_2 \sqrt{(R_0^2 - R^2)^2 - 4m^2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2)}]. \quad (29)$$

В дальнейшем всюду обозначается $q_{20}^{L(+)} = q_{20}^L$.

Учитывая, что

$$q_{10}^L = \sqrt{(q_1^L)^2 + m^2} = \sqrt{(R - q_2^L)^2 + m^2} = \sqrt{R^2 - 2R \sqrt{(q_{20}^L)^2 - m^2} \cos \beta_2 + (q_{20}^L)^2}, \quad (30)$$

для статфактора получаем выражение

$$\rho^R(q_{20}^L, \cos \beta_2) = \frac{q_2^L}{q_{10}^L} \left| \frac{\partial \phi(q_{20}^L)}{\partial q_{20}^L} \right|^{-1} = \left| \frac{(q_{20}^L)^2 - m^2}{R_0 \sqrt{(q_{20}^L)^2 - m^2} - q_{20}^L R \cos \beta_2} \right|. \quad (31)$$

Затем, если выразить все инварианты, от которых зависит матричный элемент M_{fi} , через q_{20}^L , $\cos \beta_2$ и ϕ_{qq_2} и характерные постоянные величины в L_R -системе, то задача о способе проведения интегрирований в (11) принципиально решается вычислением инвариантных выражений

$$J = \int_A^B d \cos \beta_2 \int_0^{2\pi} d \phi_{q_2} \left\{ \rho^L(q_{20}^L, \cos \beta_2) | M_{f1}(q_{20}^L, \cos \beta_2, \phi_{q_2}) |^2 \right\}. \quad (32)$$

Интегрирование по переменной ϕ_{q_2} вследствие симметрии задачи относительно вектора \vec{R} (как это следует из вида выражения (29)) имеет пределы

$$0 \leq \phi_{q_2} \leq 2\pi.$$

Задача будет решена полностью, если установлены пределы интегрирования А и В по переменной $\cos \beta_2$.

Предел $A = (\cos \beta_2)_{rp}$ определен в (25).

Для четкого понимания существования предела В следует иметь в виду следующее: четырехкратное интегрирование с помощью δ^4 - функции можно провести в обратном порядке, т.е. вначале по $d^3 q_2$, а затем по $d^3 q_1$, в результате чего получим выражение для q_{10}^L , аналогичное выражению (29) для q_{20}^L . Если учесть идентичность частиц q_1 и q_2 , то это означает, что у частицы q_1 имеется такое же граничное положение как и у частицы q_2 , определяемое выражением (25). Принимая во внимание (15) и (16) (см. также рис.2), легко понять следующее. В тот момент, когда частица q_2 занимала граничное положение А, частица q_1 занимает положение В, которое по величине определяет граничное положение частицы q_2 , когда частица q_1 занимает граничное положение, по величине равное А, т.е.

$$B = (\cos \beta_1)_{rp} \leq \cos \beta_2 \leq (\cos \beta_2)_{rp} = A. \quad (33)$$

Величина $B = (\cos \beta_1)_{rp}$ должна быть определена на основе строгого учета законов сохранения энергии и импульса (15) и (16).

Важно иметь в виду, что для заданных q_0^L и \vec{q}^L величины

$$R_0 = p_{10}^L + m - q_0^L, \quad (34)$$

$$R = \left| \sqrt{(p_1^L)^2 + (q^L)^2 - 2p_1^L q^L \cos \theta} \right| \quad (35)$$

являются константами при заданных T , T_{π}^L и θ_{π}^L в выражении (11).

Здесь $p_{10}^L = m + T$, T - кинетическая энергия налетающей частицы p_1 в L - системе, $p_1^L = \sqrt{T(T + 2m)}$ - величина ее импульса; $q_0^L = \mu + T_{\pi}^L$, где T_{π}^L - кинетическая энергия пиона в L - системе, $q^L = \sqrt{T_{\pi}^L(T_{\pi}^L + 2\mu)}$ - величина его импульса; θ_{π}^L - угол вылета пиона относительно вектора p_1^L в L - системе. Все эти величины являются константами при вычислении выражений (32). Это означает, что в (15) сумма полных энергий q_{10}^L и q_{20}^L частиц q_1 и q_2 при их изменении по закону (29) в пределах (33) должна оставаться постоянной и равной R_0 . Одновременно векторная сумма импульсов \vec{q}_1^L и \vec{q}_2^L в (16) также должна оставаться постоянной и равной \vec{R} (величина этой суммы равна R , определенному в (35)).

Вычислим величину $V = (\cos \beta_1)_{rp}$.

Взяв скалярное произведение вектора \vec{R} на самого себя и сократив на величину R , из выражения (16) получим в общем случае

$$R = q_1^L \cos \beta_1 + q_2^L \cos \beta_2, \quad (36)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{1}{q_1^L} (R - q_2^L \cos \beta_2),$$

и из (36) для граничных величин импульсов и углов

$$R = (q_1^L)_{rp} (\cos \beta_1)_{rp} + (q_2^L)_{rp} (\cos \beta_2)_{rp}, \quad (37)$$

$$V = (\cos \beta_1)_{rp} = \frac{1}{(q_1^L)_{rp}} [R - (q_2^L)_{rp} (\cos \beta_2)_{rp}].$$

Величины $(q_{20}^L)_{rp}$ и $(q_2^L)_{rp}$ вычисляются из (29) при условии (25) и равны

$$(q_{20}^L)_{rp} = \frac{R_0 (R_0^2 - R^2)}{2 [R_0^2 - R^2 (\cos^2 \beta_2)_{rp}]} = R_0 \frac{2m^2}{R_0^2 - R^2}, \quad (38)$$

$$(q_{2 \text{ rр}}^L) = \frac{\sqrt{(q_{20}^L)_{\text{рр}}^2 - m^2}}{R_0^2 - R^2} = \frac{2m^2 R (\cos \beta_2)_{\text{рр}}}{R_0^2 - R^2}. \quad (38)$$

Величина $(q_{10}^L)_{\text{рр}}$ определяется из закона сохранения энергии (15) для частного случая граничных энергий частиц q_1 и q_2 . Учитывая (38), из (15) получаем

$$(q_{10}^L)_{\text{рр}} = R_0 - (q_{20}^L)_{\text{рр}} = R_0 \left(1 - \frac{2m^2}{R_0^2 - R^2}\right), \quad (40)$$

и

$$(q_1^L)_{\text{рр}} = \sqrt{(q_{10}^L)_{\text{рр}}^2 - m^2} = \frac{2mR}{R_0^2 - R^2} \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) (\cos^2 \beta_2)_{\text{рр}}}. \quad (41)$$

Подставив (38) и (41) в (37), получаем

$$B = (\cos \beta_1)_{\text{рр}} = \frac{1}{2m} \frac{(R_0^2 - R^2) - 2m^2 (\cos^2 \beta_2)_{\text{рр}}}{\left| \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) (\cos^2 \beta_2)_{\text{рр}}} \right|}. \quad (42)$$

Выражение (42) представляет собой искомый верхний предел интегрирования по переменной $\cos \beta_2$ в выражении (11). Окончательно, дифференциальное поперечное сечение пионов (частица q) для процесса (1) при вычислении в $L_{\text{н}}$ - системе выражения, стоящего под знаком интеграла в (11), дается выражением

$$\frac{d^2 \sigma}{d q_0 d \Omega} = \frac{(2\pi)^{-5} m^4}{F} \frac{1}{2} \left| \vec{q} \right| \int_{\Lambda}^R d \cos \beta_j \int_0^{2\pi} d \phi_{q_1} \left\{ \rho^{\text{н}}(q_{j0}^L, \cos \beta_j) \left| M_{\text{н}}(q_{j0}^L, \cos \beta_j, \phi_{qq}) \right|^2 \right\}, \quad (43)$$

где $j = 1, 2$ означает частицу q_1, q_2 и способ выражения инвариантов, от которых зависит матричный элемент $|M_{ff}|^2$; q_{j0} , A и B даются выражениями (29), (25) и (42), соответственно.

Заметим, что изложенный способ вычисления $B = (\cos \beta_1)_{\text{гр}}$ на основе (37) не является единственным. Образова скалярные произведения векторов \vec{q}_1^L и \vec{q}_2^L с выражением (15), можно получить следующие выражения

$$\cos \beta_1 = \frac{1}{q_1^L} \left[q_2^L \cos \beta_2 + \frac{1}{R} (q_{10}^{L2} - q_{20}^{L2}) \right], \quad (44)$$

и из (44) и (36) можно также получить

$$\cos \beta_1 = \frac{R}{2 q_1^L} \left[1 + \frac{1}{R^2} (q_{10}^{L2} - q_{20}^{L2}) \right]. \quad (45)$$

Граничное значение $\cos \beta_1$ по формулам (44) и (45) получаем подстановкой в них граничных значений $q_1^L, q_2^L, q_{10}^L, q_{20}^L$ и $\cos \beta_2$. Легко показать, что выражения (36), (44) и (45) и соответствующие выражения для граничных значений эквивалентны.

Интересно отметить, что из формулы (44) следует невозможность равенства граничных энергий частиц q_1 и q_2 , так как в случае $(q_{10}^L)_{\text{гр}} = (q_{20}^L)_{\text{гр}}$

$$(\cos \beta_1)_{\text{гр}} = (\cos \beta_2)_{\text{гр}}, \quad A = B$$

и интеграл (32) равен нулю. Затем из (45) следует, что это также означает невозможность $\cos \beta_1 \rightarrow 1$.

Из вышеизложенного следует, что решение (29) требует уточнения пределов области фазового пространства, где оно соответствует исходным выражениям (15) и (16), из которых оно было получено. Покажем также, что существует другой способ вычисления $(\cos \beta_1)_{\text{гр}}$, основанный на том, что q_{20}^L в выражении (29) при $\cos \beta_2 = (\cos \beta_1)_{\text{гр}}$ должно перейти в $(q_{10}^L)_{\text{гр}}$, определенное выражением (40).

Для удобства перепишем выражение (29) с учетом (25) в виде

$$q_{20}^L = \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 \cos^2 \beta_2)} [R_0(R_0^2 - R^2) + 2mR^2 \cos \beta_2 \sqrt{\cos^2 \beta_2 - (\cos^2 \beta_2)_{rp}}] \cdot l. \quad (46)$$

При $q_{20}^L = (q_{20}^L)_{rp}$ выполняется соотношение (40), которое одновременно означает, что при $\cos \beta_2 = (\cos \beta_1)_{rp}$ (46) должно перейти в

$$\begin{aligned} (q_{10}^L)_{rp} = R_0 - (q_{20}^L)_{rp} &= R_0 \left(1 - \frac{2m^2}{R_0^2 - R^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2[R_0^2 - R^2(\cos^2 \beta_1)_{rp}]} [R_0(R_0^2 - R^2) + 2mR^2(\cos \beta_1)_{rp} \sqrt{(\cos^2 \beta_1)_{rp} - (\cos^2 \beta_2)_{rp}}]. \end{aligned} \quad (47)$$

В принципе, из (47) также можно получить выражение для $(\cos \beta_1)_{rp}$. Однако этот путь оказывается значительно более сложным, так как требует решения уравнения четвертой степени. Эта процедура связана с отбором решения с определенным знаком и с дополнительными проверками. В вычислениях такого рода нет никакой необходимости, поскольку ясно, что результат в конечном счете должен быть тождественен с (42). Это станет несомненным, если будет показано, что при подстановке (42) в (47) действительно получается требуемое тождественное равенство. Опуская для краткости обозначения граничных значений, из (47) имеем

$$2R_0^2 q_{10}^L - R_0(R_0^2 - R^2) - 2q_{10} R^2 \cos^2 \beta_1 = 2mR^2 \cos \beta_1 \sqrt{\cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2}. \quad (48)$$

Произведя простые преобразования с использованием (25) и (42), получим

$$\begin{aligned} 2R_0^2 q_{10}^L - R_0(R_0^2 - R^2) &= \frac{2R_0 R^2}{(R_0^2 - R^2)} [(R_0^2 - R^2) - 2m^2 \cos^2 \beta_2] = \\ &= \frac{2mR_0 R^2}{(R_0^2 - R^2)} \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (49)$$

Легко убедиться, что

$$\sqrt{\cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2} = \frac{R_0 (1 - \cos^2 \beta_2)}{\sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2}} \quad (50)$$

Подставим (49) и (50) в (48) и, сократив всюду на $2R^2 R_0 \cos \beta_1$, получаем

$$\frac{2m}{(R_0^2 - R^2)} \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2} - \frac{m(1 - \cos^2 \beta_2)}{\sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2}} = \left(1 - \frac{2m^2}{R_0^2 - R^2}\right) \cos \beta_1; \quad (51)$$

Выполнив в (51) элементарные действия, получаем

$$\frac{m \sin^2 \beta_2 [(R_0^2 + R^2) - 2m^2] + 2m^3}{(R_0^2 - R^2) - 2m^2} = \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2} \cos \beta_1 \quad (52)$$

Учитывая (43), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{R_0^2 - (R_0^2 - m^2) \cos^2 \beta_2} \cos \beta_1 &= \frac{1}{2m} [(R_0^2 - R^2) - 2m^2 \cos^2 \beta] \\ &= m \sin^2 \beta_2 + \frac{(R_0^2 - R^2) - 2m^2}{2m}, \end{aligned} \quad (53)$$

и несколько преобразовав левую часть (52), приходим к выражению

$$m \sin^2 \beta_2 + \frac{2m^3 + 2m R^2 \sin^2 \beta_2}{(R_0^2 - R^2) - 2m^2} = m \sin^2 \beta_2 + \frac{(R_0^2 - R^2) - 2m^2}{2m}, \quad (54)$$

которое представляет собой тождественное равенство, так как с учетом (25) имеем

$$[(R_0^2 - R^2) - 2m^2]^2 = (R_0^2 - R^2)^2 - 4m^2 R_0^2 + 4m^2 R^2 + 4m^4 =$$

$$= 4m^4 + 4m^2 R^2 - 4m^2 R^2 \cos^2 \beta_2 = 4m^4 + 4m^2 R^2 \sin^2 \beta_2 . \quad (55)$$

Проделанные выкладки являются очевидным доказательством того, что вычисленная в (42) величина $V = (\cos \beta_1)_{\text{пр}}$ действительно удовлетворяет (47), вытекающему из (15) и (16). Кроме того, получено прямое доказательство необходимости только (+) решения в выражении (47) (а, следовательно, и в (23)), поскольку очевидно, что с (-) решением не получается требуемого значения сохранения тождественного равенства в выражении, получаемом вместо (54) для (-) решения (а, следовательно, и в (47)).

Определением в строгом соответствии с (15) и (16) пределов интегрирования по переменным $\phi_{\alpha\alpha_2}$ и $\cos \beta_2$ в (32) установлен способ интегрирования выражений (11) по допустимому законами сохранения энергии и импульса фазовому пространству для частицы q_2 (или q_1).

Определение вида матричного элемента M_{11} в зависимости от инвариантов фундаментального набора (3.1) является вопросом и задачей конкретной модели. Изложенный способ вычисления дифференциальных поперечных сечений пионов является общим для любой модели любого процесса типа (1). Для его применения необходимо только, чтобы инварианты (3.1), от которых зависит матричный элемент M_{11} , помимо заданных в L - системе величин масс частиц, энергий T, T_{π}^L и лабораторного угла наблюдения θ_{π}^L , были выражены через $q_{20}^{L(+)}$, $\cos \beta_2$ и $\phi_{\alpha\alpha_2}$ (или $q_{10}^{L(+)}$, $\cos \beta_1$ и $\phi_{\alpha\alpha_1}$).

3. Периферический матричный элемент и вычисление энергетических распределений π^+ - мезонов для процесса $p + p \rightarrow p + p + \pi^+$

Анализ преобразований периферической модели и сравнение с экспериментальными данными будут предметом другой работы.

Здесь для иллюстрации метода вычисления в L_π системе выражений (32) и (42) в качестве примера дифференциальных поперечных сечений в любой системе отсчета, можно взять периферическую модель, позволяющую получить по формулам (1) - (3) следующие выражения для матричного элемента в L_π системе (2).

Квадрат матричного элемента в этом случае удобно записать в виде /4/

$$|M_{fi}|^2 = (2\pi^2) \frac{G^2}{m^4} [(c_1^2 + c_3^2) X^2 + (c_2^2 + c_4^2) Y^2 + (c_1 c_3 + c_2 c_4) ZZ^*], \quad (56)$$

где $(c_1^2 + c_3^2) X^2$ - вклад квадратов матричных элементов диаграмм (а) и с) рис.1, $(c_2^2 + c_4^2) Y^2$ - то же для диаграмм в) и d); $(c_1 c_3 + c_2 c_4) ZZ^*$ - вклад от соответствующих интерференций между диаграммами (а) и с); в) и d); c_1, \dots, c_4 - базисные изотопические коэффициенты, соответствующие диаграммам а), ..., (d)

Для процесса (2) (обозначения как в работе /4/),

$$(c_1^2 + c_3^2) = (c_2^2 + c_4^2) = (c_1 c_3 + c_2 c_4) = \frac{20}{9}. \quad (57)$$

$$X^2 = u t^2 \Pi^2(t^2) |f_{1+}(u, t^2)|^2 (1 + 3 \cos^2 \theta^P) \quad (58)$$

$$Y^2 = u^2 \bar{t}^2 \Pi^2(\bar{t}^2) |f_{1+}(u, \bar{t}^2)|^2 (1 + 3 \cos^2 \epsilon^P) \quad (59)$$

$$ZZ^* = u^2 \Pi(t^2) \Pi(\bar{t}^2) |f_{1+}^*(u, t^2) f_{1+}(u, \bar{t}^2)| \times \quad (60)$$

$$\times \{ (u+m) R_{(-)} [1 + 9 \cos \theta^P \cos \epsilon^P \cos \alpha^P - 3(\cos^2 \theta^P + \cos^2 \epsilon^P)] +$$

$$(u-m) R_{(+)} [\cos \alpha^P + 3 \cos \theta^P \cos \epsilon^P] \},$$

$$\Pi(t_1^2) = \frac{1}{t_1^2 + \mu^2} G(t_1^2) = \frac{1}{t_1^2 + \mu^2} \cdot \frac{8\mu^2}{t_1^2 + 9\mu^2}, \quad (61)$$

$$(t_1^2 = t^2, \bar{t}^2)$$

$$f_{1+}(u, t_1^2) = \frac{p_1^P}{q^P} \Gamma(t_1^2) \sqrt{\frac{\sigma_{33}(u)}{8\pi}}, \quad (62)$$

$$\Gamma(t_1^2) = \left(1 + \frac{t_1^2 + \mu^2}{4m^2}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{3(t_1^2 + \mu^2)}{2m(u-m)}\right] \left[1 + \frac{t_1 + \mu^2}{2m(u-m)}\right]^{-3}, \quad (63)$$

$$\sigma_{33} = \frac{2\pi}{(q^P)^2} \left[\frac{\gamma^2}{(u-u_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \right], \quad \gamma = \left[\frac{2(q^P a)^3}{1 + (q^P a)} \right] \gamma_0, \quad (64)$$

где $u_0 = 1235 \text{ МэВ}$, $a = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ}^{-1}$, $\gamma_0 = 58 \text{ МэВ}$;

$$R_{(+)} = [(p_{10}^P + m)(p_{20}^P + m)]^{1/2}, \quad R_{(-)} = [(p_{10}^P - m)(p_{20}^P - m)]^{1/2}; \quad (65)$$

$$\cos \theta^P = \frac{1}{2q^P p_2^P} \left[r^2 + (m^2 + \mu^2) - 2q_0^P p_{20}^P \right], \quad (66)$$

$$\cos \epsilon^P = \frac{1}{2q^P p_1^P} \left[r^2 + (m^2 + \mu^2) - 2q_0^P p_{10}^P \right], \quad (67)$$

$$\cos \alpha^P = \frac{1}{2p_1^P p_2^P} \left[2m^2 - W^2 + 2p_{10}^P p_{20}^P \right]; \quad (68)$$

$$q_0^P = \frac{1}{2u} (u^2 + \mu^2 - m^2), \quad q^P = \sqrt{(q_0^P)^2 - \mu^2}; \quad (69)$$

$$p_{10}^P = \frac{1}{2u} (u^2 + m^2 + t^2), \quad p_1^P = \sqrt{(p_{10}^P)^2 - m^2}; \quad (70)$$

$$p_{20}^p = \frac{1}{2u} (u^2 + m^2 + t^2), \quad p_2^p = \sqrt{(p_{20}^p)^2 - m^2}; \quad (71)$$

$$u^2 = W^2 - 3m^2 - t^2 - \bar{t}^2. \quad (72)$$

В результате $|M_{fi}|^2$ оказывается выраженным через инварианты W^2 , r^2 , \bar{r}^2 , z^2 , t^2 и \bar{t}^2 . Учитывая (3.3), ясно, что в конечном счете $|M_{fi}|^2$ выражен через фундаментальный набор инвариантов (3.1). Инварианты W^2 , z^2 , r^2 и \bar{r}^2 простым образом выражаются через постоянные величины в L -системе

$$r^2 = -(m - \mu)^2 + 2\mu T - 2T \frac{L}{\pi} (m + T) - 2\sqrt{T(T + 2m)} \sqrt{T \frac{L}{\pi} (T \frac{L}{\pi} + 2\mu)} \cos \theta \frac{L}{\pi} \quad (73)$$

$$\bar{r}^2 = -(m - \mu)^2 + 2m T \frac{L}{\pi} \quad (73')$$

$$W^2 = 2m(2m + T) \quad (74)$$

$$z^2 = (2m - \mu)^2 + 2T(m - \mu) - 2T(2m + T) + 2\sqrt{T(T + 2m)} \sqrt{T \frac{L}{\pi} (T \frac{L}{\pi} + 2\mu)} \cos \theta \frac{L}{\pi} = \quad (75)$$

$$= (q_{10}^L + q_{20}^L)^2 - (q_1^L + q_2^L)^2 = R_0^2 - R^2.$$

Таким образом, вся зависимость от переменных интегрирования содержится в инвариантах t^2 и \bar{t}^2 , которые выражаются через переменные интегрирования $\cos \beta_2$ и ϕ_2 для частицы q_2 следующим образом:

$$t^2 = 2\left\{ -\frac{1}{2} (2m^2 + \mu^2) + m q_0^L + (m - q_0^L) q_{20}^L + \right. \\ \left. + \frac{q^L}{R} \sqrt{(q_{20}^L)^2 - m^2} [(p_1^L \cos \theta \frac{L}{\pi} - q^L) \cos \beta_2 + (p_1^L \sin \theta \frac{L}{\pi}) \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2} \cos \phi_2] \right\}, \quad (76)$$

$$\bar{t}^2 = 2 \left[-\frac{1}{2} (2m^2 + \mu^2) + p_{10}^L q_0^L + p_1^L q_1^L \cos \theta_\pi^L + (p_{10}^L - q_0^L) q_{20}^L - R \sqrt{(q_{20}^L)^2 - m^2 \cos^2 \beta_2} \right], \quad (77)$$

и через переменные интегрирования $\cos \beta_1$ и ϕ_1 для частицы q_1

$$t^2 = 2 \left\{ p_{10}^L q_{10}^L - m^2 - \frac{q_1^L}{R} \sqrt{(q_{10}^L)^2 - m^2} \left[\left(\frac{R^2}{q_1^L} + p_1^L \cos \theta_\pi^L - q_1^L \right) \cos \beta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. (p_1^L \sin \theta_\pi^L) \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1} \cos \phi_1 \right] \right\}, \quad (78)$$

$$\bar{t}^2 = 2 (m q_{10}^L - m^2). \quad (79)$$

В (76)–(79) q_{20}^L , q_{10}^L определяются выражением (29), причем пределы интегрирования А и В для частиц q_2 и q_1 одинаковы. Поскольку зависимость $|M_{ft}|^2$ от ϕ входит только через $\cos \phi$, то пределы интегрирования по ϕ можно брать от 0 до π , умножив результат на 2.

В результате величина, соответствующая точке энергетического спектра π^+ – мезонов с кинетической энергией T_π^L при угле наблюдения θ_π^L для процесса (2) дается выражением

$$\frac{d^2 \sigma}{d T_\pi^L d \cos \theta_\pi^L} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{20}{9} \frac{G_r^2}{F} |q^L| \int_A^B d \cos \beta_j \rho^R(q_{j0}, \cos \beta_j) \int_0^\pi d \phi_j [X^2 + Y^2 + Z Z^*], \quad (80)$$

где А и В даются выражениями (25) и (43), соответственно; $j = 1, 2$ и означает частицу q_1 , q_2 и соответственный способ выражения инвариантов t^2 , \bar{t}^2 ;

$$G_r^2 = \frac{16 \pi m^2}{\mu^2} f^2, \quad \text{где } f^2 = 0,08 - \text{константа связи}. \quad (81)$$

Результаты вычислений по формуле (80) энергетических распределений π^+ - мезонов, образующих в процессе (2), приведены на рис.3 и 4 в сравнении с экспериментальными данными для угла $\theta_{\pi}^L = 24^\circ$ при энергиях $T = 657$ и 556 Мэв ^{/10/}, из которых видно, что согласие теории с экспериментом хорошее вплоть до энергий, близких к максимальной, где в эксперименте вследствие недостаточно хорошей разрешающей способности аппаратуры начинает проявляться примесь от пика пионов из процесса $p + p \rightarrow d + \pi^+$.

Вычисления выражений (80) проводились с переменными интегрирования для частиц q_2 и q_1 ; результаты этих вычислений совпадают.

Для контроля выполнения законов сохранения (15) и (16) для всех энергий спектра T_{π}^L , при которых вычислялись величины (80), проводилось вычисление следующих величин

$$Q_0^{(+)} = (q_{20}^L)_{r_p} + (q_{10}^{L(+)})_{r_p}, \quad (82)$$

$$Q_0^{(-)} = (q_{20}^L)_{r_p} + (q_{10}^{L(-)})_{r_p}, \quad (83)$$

$$Q^{(+)} = (q_2^L)_{r_p} (\cos \beta_2)_{r_p} + (q_1^{L(+)})_{r_p} (\cos \beta_1)_{r_p}, \quad (83)$$

$$(84)$$

$$Q^{(-)} = (q_2^L)_{r_p} (\cos \beta_2)_{r_p} + (q_1^{L(-)})_{r_p} (\cos \beta_1)_{r_p}. \quad (85)$$

Во всех случаях оказывалось, что

$$Q_0^{(+)} = R_{\infty}, \quad Q_0^{(-)} \neq R_0, \quad (86)$$

$$Q^{(+)} = R, \quad Q^{(-)} \neq R. \quad (87)$$

Эти результаты являются численными подтверждениями необходимости только (+) решения и невозможности (-) решения в (47) и (23). Результаты вычислений выражений (80) с использованием L_R - системы приведены на рис.7.

4. D и L системы отсчета

D - система (система центра масс частиц q_1 и $q_1(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0)$)

В работе /4/ предложено вычислять выражения (11) в D - системе в следующем виде

$$\frac{d^2 \sigma}{dT_{\pi}^L d \cos \theta_{\pi}^L} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{20}{9} \frac{G_r^2}{r} \left| \frac{+L}{z} \right| \frac{q_1^{D+1}}{z-1} \int d \cos \theta^D \int_0^{\pi} d \phi^D [X^2 + Y^2 + ZZ^*], (88)$$

где X^2, Y^2, ZZ^* такие же, как в разделе 3;

$$z^2 = (2m - \mu)^2 + 2T(m - \mu) - 2T_{\pi}^L(2m + T) + 2\sqrt{(T + 2m)T_{\pi}^L(T_{\pi}^L + 2\mu)} \cos \theta_{\pi}^L. (89)$$

Инварианты t^2 и \bar{t}^2 в данном случае выражаются через величины в D - системе следующим образом:

$$t^2 = 2(q_{10}^D p_{10}^D - m^2 - q_1^D p_1^D \cos \theta^D), (90)$$

$$\bar{t}^2 = 2[q_{10}^D p_{20}^D - m^2 - q_1^D p_2^D (\cos \alpha^D \cos \theta^D + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha^D} \sqrt{1 - \cos^2 \theta^D} \cos \phi^D)], (91)$$

$$\cos \alpha^D = \frac{1}{2p_1^D p_2^D} [2p_{10}^D p_{20}^D + 2m^2 - W^2] (92)$$

$$q_{10}^D = \frac{z}{2}, \quad q_1^D = \sqrt{(q_{10}^D)^2 - m^2}$$

$$p_{10}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + m^2 + r^2), \quad p_1^D = \sqrt{(p_{10}^D)^2 - m^2}$$

$$p_{20}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + m^2 + r^2), \quad p_2^D = \sqrt{(p_{20}^D)^2 - m^2} \quad (83)$$

Отсчет углов интегрирования ведется так, как указано на рис.5.

В данной работе вычислялись величины (88) для различных исходных данных и сравнивались с результатами вычислений величин (80) в L_R - системе. Во всех случаях получались несовпадающие результаты. Оказалось, что результат вычислений величин (88) в D - системе по рецепту работы ^{/4/} равен сумме результатов вычислений величин (80) в L_R - системе с $q_{20}^L = q_{20}^{L(+)}$ и $q_{20}^L = q_{20}^{L(-)}$, причем в качестве верхнего предела интегрирования по $\cos \beta_2$ нужно взять $V=+1$. Если способ вычисления в L_R - системе верен, то это означает, что пределы интегрирования по $\cos \theta^D$ в выражении (88) не соответствуют законам сохранения энергии и импульса и их выбор произволен, и, следовательно, метод определения допустимого фазового пространства на основе аналогии с системой центра масс упругого рассеяния двух частиц в случае процесса (1) приводит к противоречию с законами сохранения энергии и импульса. Введением D - системы предоставляется полная свобода для перемещения векторов \vec{q}_1^D и \vec{q}_2^D во всем трехмерном фазовом пространстве, которая не имеет места в случае процессов типа (1). Интересно отметить, что само введение системы центра масс частиц q_1 и q_2 с самого начала предполагает такую возможность, так как из определения D - системы

$$\vec{q}_1^D + \vec{q}_2^D = 0, \quad \vec{R}^D = \vec{p}_1^D + \vec{p}_2^D - \vec{q}_1^D = 0 \quad (86)$$

следует, что вследствие равенства нулю вектора симметрии \vec{R}^D векторы \vec{q}_1^D и \vec{q}_2^D могут занять любое направление относительно векторов \vec{p}_1^D , \vec{p}_2^D и \vec{q}^D . Это, по-видимому, означает, что D - система в случае процесса (1) максимально скрывает его кинематические особенности и не является удобной для определения пределов интегрирования выражений (88) в соответствии с (8) и (9).

Вопрос о применимости систем центра масс Q , P , D и V для

вычислений дифференциальных поперечных сечений процессов типа (1) требует более детального исследования и ему будет посвящена отдельная работа.

Лабораторная система (L - система)

Для вычисления выражений (11) в L - системе ($\vec{p}_2^L = 0$) следует исходить из законов сохранения энергии и импульса, записанных в форме (13) и (14). Все направления и углы определяются относительно вектора \vec{p}_1^L .

Величина q_{10}^L , получаемая из законов сохранения, равна

$$q_{10}^L (\pm) = \frac{ab \pm c \sqrt{b^2 - m^2 (a^2 - c^2)}}{(a^2 - c^2)}, \quad (87)$$

где

$$a = p_{10}^L + m - q_0^L, \quad (88)$$

$$b = \frac{1}{2} (2m^2 + \mu^2) + m p_{10}^L - (p_{10}^L + m) q_0^L + p_1^L q^L \cos \theta_\pi^L, \quad (89)$$

$$c = p_1 \cos \theta_{p_1 q_1} - q^L (\cos \theta_\pi^L \cos \theta_{p_1 q_1} + \sin \theta_\pi^L \sin \theta_{p_1 q_1} \cos \phi_{qq_1}^L). \quad (100)$$

В работе /8/ вычислялись энергетические распределения π^+ - мезонов, образующихся в процессе (2), на основе выражений вида

$$\frac{d^2 \sigma}{d T_\pi^L d \cos \theta_\pi^L} = \text{const} \left| \vec{q}^L \right| \int_{(\cos \theta_{p_1 q_1}^L)_{rp}}^{+1} d \cos \theta_{p_1 q_1}^L \int_0^{2\pi} d \phi_{qq_1}^L \{ \rho^L | M_{fi} |^2 \}, \quad (101)$$

где

$$\rho^L = \left| \frac{(q_{10}^L)^2 - m^2}{\left(\frac{W^2}{2m} - q_{10}^L\right) \sqrt{(q_{10}^L)^2 - m^2} - c q_{10}^L} \right|, \quad (102)$$

$$(\cos \theta_{p_1 q_1}^L)_{\text{гп}} = \frac{\underline{A} \underline{C} - \underline{B} \sqrt{\underline{B}^2 + \underline{C}^2} - \underline{A}^2}{\underline{B}^2 + \underline{C}^2} \quad (103)$$

$$\underline{A}^2 = a^2 - \frac{b^2}{m^2}, \quad \underline{B} = q^L \sin \theta_{\pi}^L \cos \phi_{q q_1}^L, \quad \underline{C} = p_1^L - q^L \cos \theta_{\pi}^L. \quad (104)$$

При вычислениях в работе /8/ бралось $q_{10}^L = q_{10}^L(+)$, причем выбор (+) решения в (97) приведен без доказательств. Покажем, что пределы интегрирования по $\phi_{q q_1}^L$ и верхний предел интегрирования по $\cos \theta_{\pi}^L$ равный +1, взяты произвольно и не соответствуют законам сохранения энергии (13) и импульса (14).

Графически ситуация в L - системе изображена на рис.6, где $\beta = \cos \theta_{p_1 q_1}^L$. Из рис. 6 видно, что пределы интегрирования по углу $\phi_{q q_1}^L$ в выражении (101) соответствуют только случаю а). Случаи в) и с) формулой (101) не учитываются.

Что касается пределов по переменной $\cos \theta_{p_1 q_1}^L$, то важно отметить следующее. L_R - система отличается от L - системы поворотом в плоскости векторов \vec{p}_1^L и \vec{q}_1^L на угол $(\epsilon^L, \cos \epsilon^L = \frac{1}{R} (p_1^L - q^L \cos \theta_{\pi}^L))$. Как установлено ранее, величина $\cos \beta = +1$ в L_R - системе невозможна, следовательно, невозможна и величина $\cos \theta_{p_1 q_1}^L = +1$. Заметим, что L и L_R системы совпадают в частном случае, когда $\cos \theta_{\pi}^L = +1$.

Вычисления в L_R - системе выражений (43) сопровождалась вычислением величин $(\cos \beta_2)_{\text{гп}}$, $(\cos \beta_1)_{\text{гп}}$ и $\cos \epsilon^L$ для каждого значения T_{π}^L с целью проверки существования случаев а), в) и с) в L - системе. Установлено, что при начальной энергии $T=660$ Мэв все три случая могут осуществляться. В частности, случаи в) и с) имеют место при углах θ_{π}^L , близких к 20° и 90° при значениях T_{π}^L , близких к $(T_{\pi}^L)_{\text{max}}$ спектра π^+ - мезонов для процесса (2).

Также вычислялись выражения (101) в L - системе. Результаты этих вычислений не совпадают с результатами вычислений в L_R - системе по правилам раздела 3, что является следствием произвола в определении пределов интегрирования в выражениях (101).

Многочисленными вычислениями установлено, что результаты вычислений в D - системе выражений (80) и сумма результатов вычислений в L - системе выражений (101) при $q_{10}^L = q_{10}^{L(+)}$ и $q_{10}^L = q_{10}^{L(-)}$ с пределами интегрирования как в /8/ совпадают. Эти результаты совпадают и с вычислениями в L_R - системе выражений для суммы с $q_{j_0}^L = q_{j_0}^{L(+)}$ и $q_{j_0}^L = q_{j_0}^{L(-)}$ в случае, когда верхний предел интегрирования B равен $+1$.

Из изложенного следует, что решение вопроса об установлении пределов в соответствии с законами сохранения энергии и импульса в выражениях (32) и их вычисления в L - системе связаны со значительными трудностями. Решение, данное в работе /8/, неудовлетворительно. В предложенной в данной работе L_R - системе все описанные трудности автоматически устраняются. Тем не менее детальный анализ положения в L - системе интересен потому, что она отражает условия эксперимента, знание которых важно при планировании и проведении экспериментов, касающихся процессов типа (1).

Результаты вычислений в D и L системах приведены на рис.8.

V. Обсуждение результатов

В данной работе для анализа процессов типа (1) предложена удобная и наглядная система отсчета - L_R - система, определяемая вектором $\vec{R}_1 = \vec{p}_1^L - \vec{q}_1^L$, и с ее использованием развит метод вычисления дифференциальных поперечных сечений при детальном учете законов сохранения энергий и импульса. Показано, что в методах вычисления в других системах отсчета /4,8/ не проводится полного учета законов сохранения энергии и импульса вследствие возникающих осложнений в этих системах. По-видимому, наиболее естественной для процессов типа (1) является L_R - система и подобные ей, в которых существует отличный от нуля вектор симметрии, равный сумме векторов двух других частиц. В частности, если интересуются распределениями пионов в процессе (1), то таким вектором в L -системе является $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}_1^L$. Сущест-

ование такого вектора позволяет учесть все кинематические особенности процессов (1) и удовлетворить требования законов сохранения энергии и импульса. Интересно отметить, что при каждом данном \vec{q}^L фиксируется в L - системе и вектор \vec{R} . Осуществлением контроля над вектором \vec{R} при данном \vec{q}^L контролируется интервал углов частиц q_1 и q_2 относительно вектора \vec{R} (и, тем самым, относительно \vec{p}_1^L), который определяется известными граничными значениями A и B ((25) и (42)), т.е. $A \leq \cos \beta \leq B$. Если кроме вектора \vec{q}^L фиксируется, скажем, и вектор \vec{q}_1^L , то, как следует из (16) и (36), фиксируется положение вектора \vec{q}_2^L . Это обстоятельство может оказаться полезным при планировании и проведении возможных экспериментов на совпадение частиц в конечном канале процессов типа (1).

Выполненные в данной работе расчеты дифференциальных поперечных сечений π^+ - мезонов, образующихся в процессе (2), при начальных энергиях протонов $T = 657$ и 556 Мэв указывают на достаточно хорошее согласие предсказаний периферической модели с экспериментальными данными. Для полной достоверности наличия такого согласия требуется более широкое сравнение теории с экспериментом. Однако полученных данных достаточно для утверждения, что периферическая модель применима для описания процессов (1) и (2) в области начальных энергий $500 - 700$ Мэв.

В заключение автор считает приятным долгом выразить глубокую благодарность В.И.Кочкину за составление программ и вычисления, К.О.Оганесяну, В.А.Ярбе, профессорам З.Маричу, В.П.Джелепову, Л.И.Лапидусу и С.В.Измайлову за поддержку работы и обсуждения результатов; дирекции ЛТФ,ЛВТА и персоналу вычислительной машины М-20, на которой были выполнены все вычисления.

Л и т е р а т у р а

1. S.Mandelstam, Proc. Roy. Soc., 244, 491 (1958).
2. S.J.Lindenbaum, R.B.Sterheimer, Phys. Rev., 105, 1874 (1957).
3. E.Ferrari, F.Selleri, Suppl. Nuovo Cim., 24, 453 (1962).
4. E.Ferrari, F.Selleri, Nuovo Cim., 27, 1450 (1963).
5. G.Da Prato, Nuovo Cim., 22, 123 (1961).
6. S.D.Drell, Rev. Mod. Phys., 33, 458 (1961).

7. J.D.Jackson, Rev. Mod. Phys., 37, 484 (1965).
8. С.Б.Нурушев, В.Л.Соловьянов. Препринт ОИЯИ Р-2382 (1985).
9. F.Selleri, Nuovo Cim., 40, 236 (1965).
10. М.Г.Мешеряков, В.П.Зрелов, Б.С.Неганов, И.К.Взоров, А.Ф.Шабудин. ЖЭТФ 31, 45 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел

22 ноября 1987 года

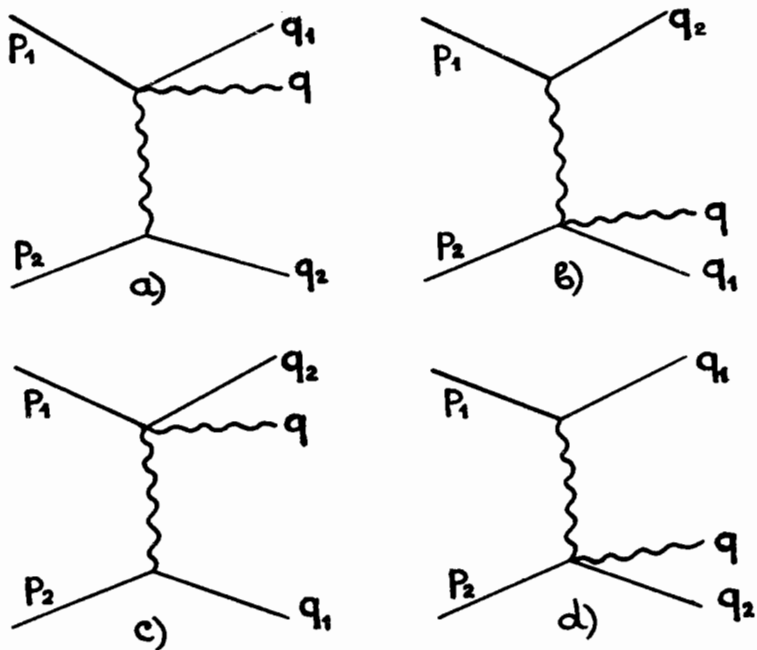


Рис.1. Четыре полюсные фейнмановские диаграммы, описывающие в периферической модели процесс одномезонного образования в NN столкновениях.

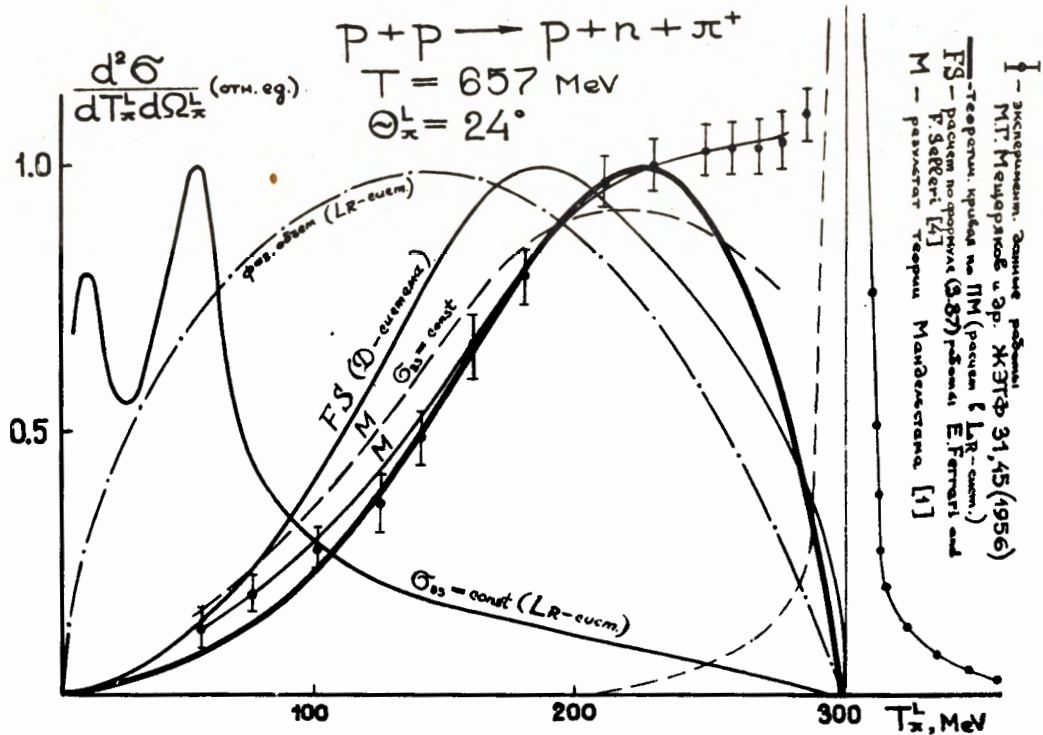


Рис.3. Сравнение вычислений по периферической модели для энергетических распределений π^+ - мезонов процесса $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$, выполненных с использованием ЛР-системы, с экспериментальными данными работы М.Г. Мешерякова и др. [10] при $T=657$ и 556 Мэв, $\theta_{\pi}^L = 24^\circ$. В вычислениях использовался формфактор из работы F. Seller [9] $G(t_1^2) = \frac{8\mu^2}{t_1^2 + 9\mu^2}$. Для сравнения на графики нанесены результаты вычислений по формуле (3.87) работы Феррари и Селлера [4] (FS) и результаты работы Мандельштама [1] (M).

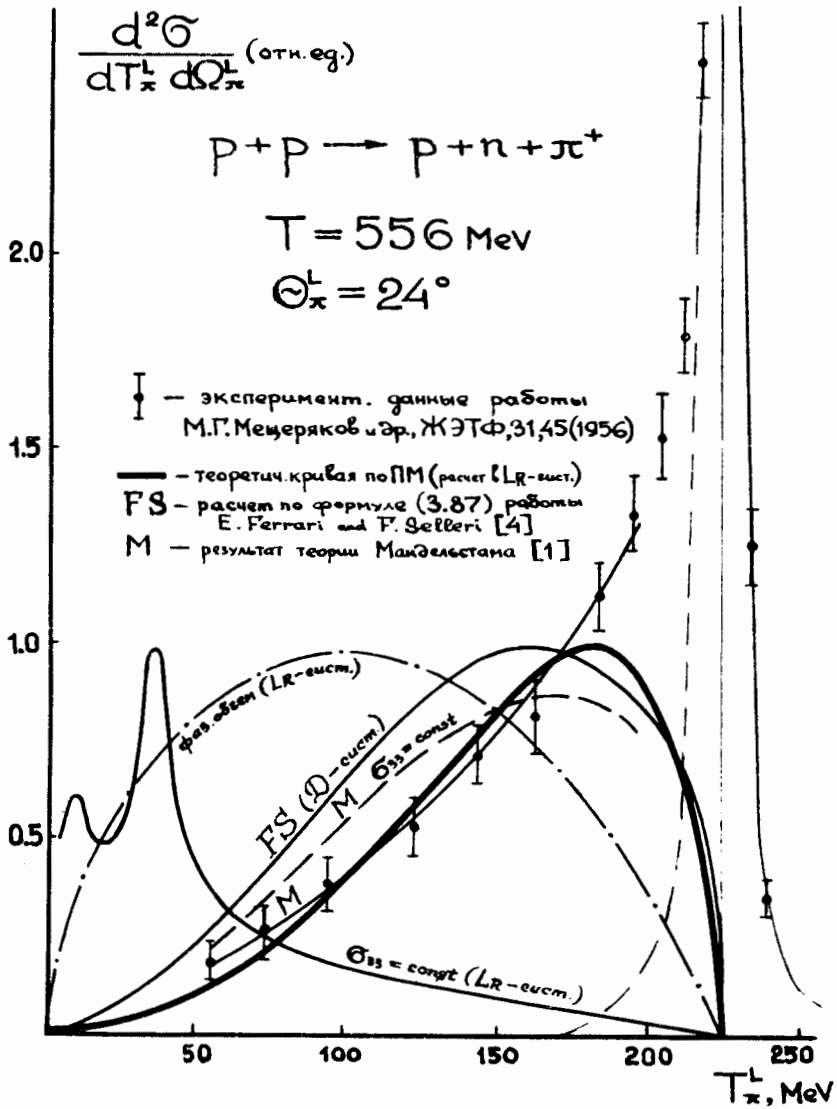


Рис. 4. То же, что и на рис. 3.

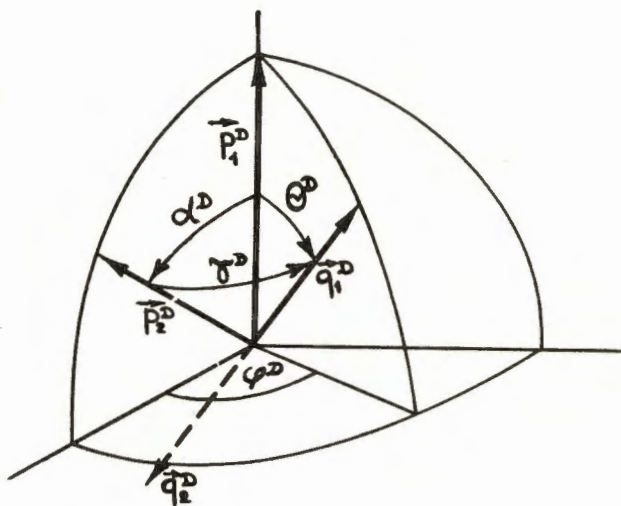


Рис.б. D – система, предложенная в работе Феррари и Селлери /4/.

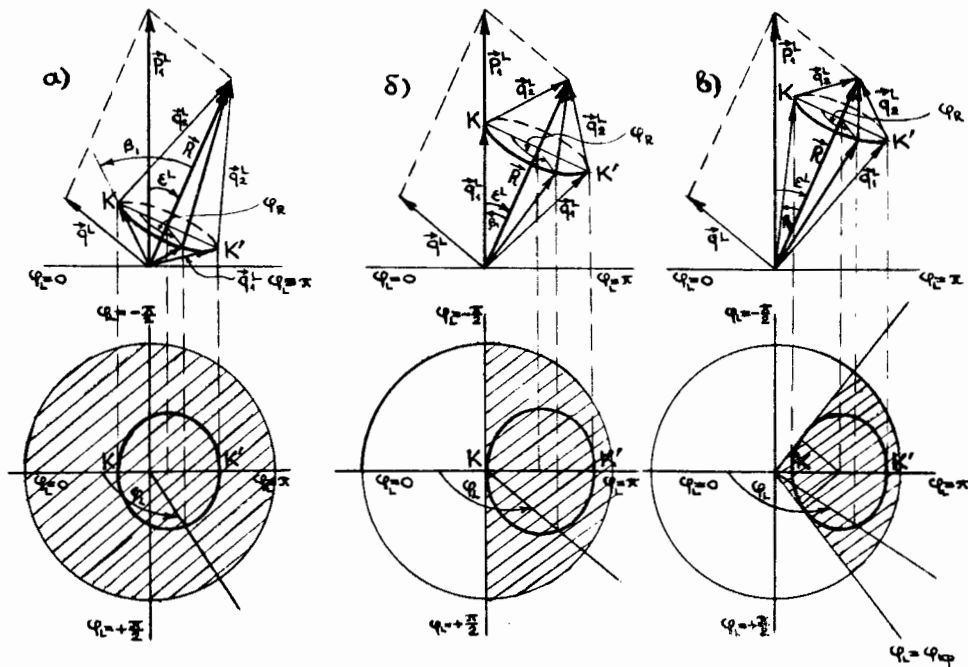


Рис.6. Типичные случаи расположения векторов \vec{q}_1^L и \vec{q}_2^L в L - системе (угол ϕ_1^L отсчитывается от плоскости, в которой лежат векторы \vec{p}_1^L , \vec{q}_1^L и \vec{R} ; угол ϕ_1 отсчитывается от вектора \vec{p}_1^L)

а) $\beta_1 > \epsilon^L$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

б) $\beta_1 = \epsilon^L$, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2}$

в) $\beta_1 < \epsilon^L$, $\phi_{кр} \leq \phi \leq \phi_{кр}$

В верхнем ряду рисунков векторы \vec{p}_1^L , \vec{q}_1^L и \vec{R} , а также точки K и K' лежат в плоскости чертежа; векторы \vec{q}_1^L и \vec{q}_2^L вращаются вокруг вектора \vec{R} ; нижний ряд рисунков изображает вид фигур, описываемых концом вектора \vec{q}_1^L в плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{p}_1^L .

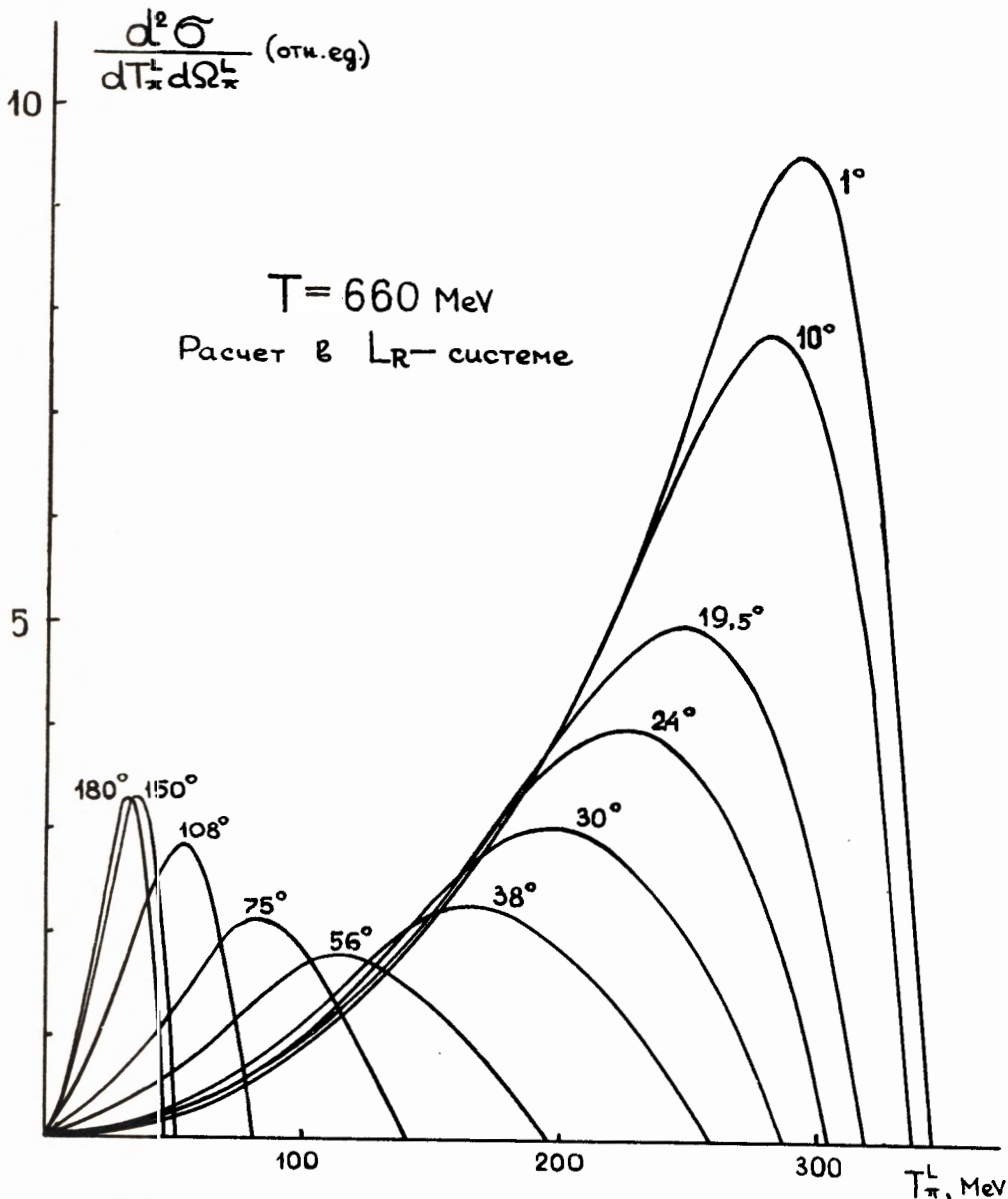


Рис.7. Расчетные кривые по периферической модели для энергетических спектров π^+ - мезонов процесса $p+p \rightarrow p+p+\pi^+$ для $T = 660 \text{ MeV}$. Расчет в L_R - системе выражений (80) данной работы.

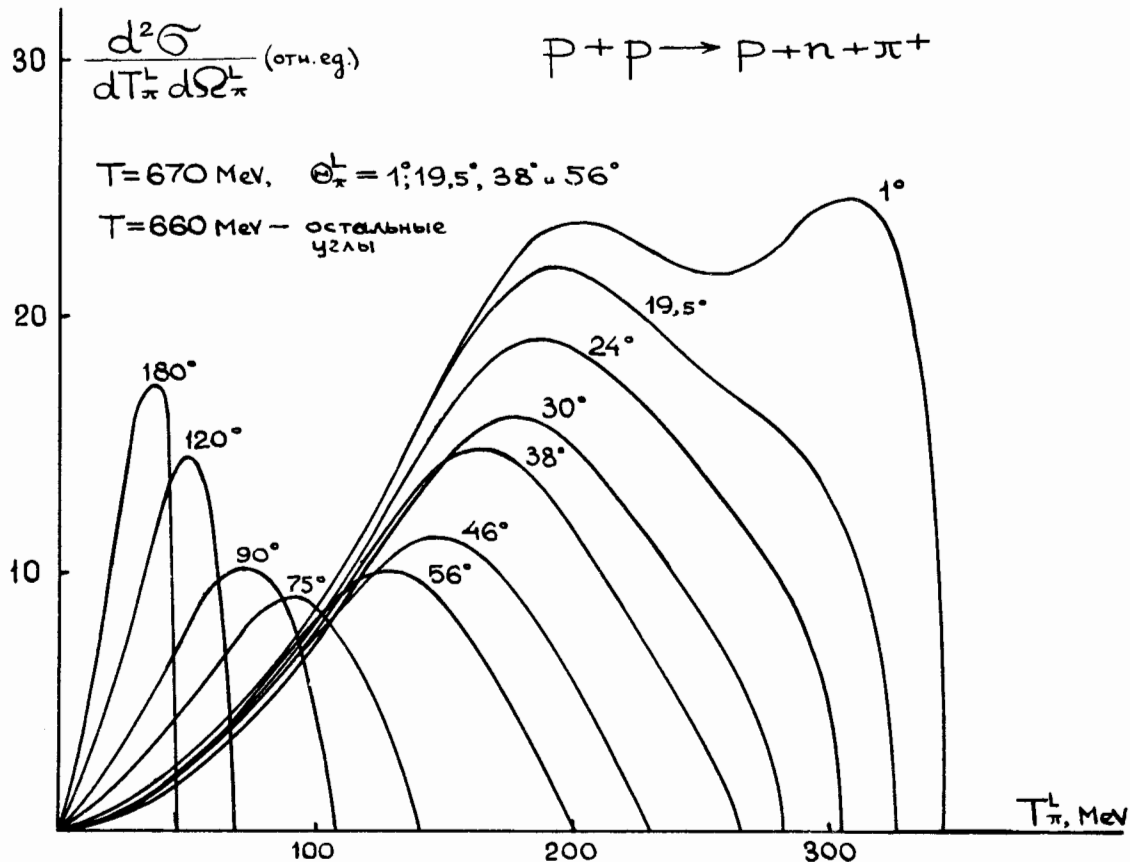


Рис.8. Результаты расчетов: 1) выражений (3.78) работы Феррари и Селлери^{/4/} (P - система); 2) суммы выражений (101) с (+) и (-) решениями для q_π^L (формула (97) данной работы) ($j = 1,2$); 3) суммы выражений (80) с (+) (-) решениями для q_{j0}^L (формула (23)) и верхним пределом интегрирования по $\cos \beta_j = +1$ ($j = 1,2$).