ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3577

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.И. Кузнецов

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

1967.

P2 - 3577

Г.И. Кузнецов

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Направлено в ЖЭТФ

Гинзбург и Тамм в работе "К теории спина"[1] вводят для частиц внутренние степени свободы x_i, причём $x_i^2 = -1$. Введение таких переменных дало возможность модифицировать волновое уравнение и получить "спектр масс".

Однако произведенное в[1] разложение квадратичноинтегрируемой функции $f(x)$ по решениям уравнения Лапласа, определенным на однополостном гиперболоиде, на самом деле было выполнено по неполной системе функций.

В настоящей заметке мы укажем способ построения полной системы функций, основываясь на результатах работы Гельфанда и Граева[2], а также[3]. Согласно[2,3], квадратичноинтегрируемая чётная функция $f(x)$ разлагается на неприводимые относительные группы Лоренца компоненты по формуле

$$f(x) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int_L F(\xi,\sigma) \, |(x\xi)|^{-\sigma-2} \, d^2\xi \, d\sigma + \tag{1}$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2n \int_L F(\xi, x; 2n) \, \delta(x\xi) \, d^2\xi .$$

Здесь $x^2 = x_0^2 - x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = -1$, $\xi^2 = 0$, L – контур интегрирования на конусе (сфера при $\xi_0 = 1$).

Числа σ и n – веса представлений группы Лоренца основной и дикретной серии соответственно, причем в унитарном случае $\sigma = -1 + i\rho$.

Чтобы написать разложение для нечётной функции $f(x)=-f(-x)$ $(x_0\to -x_0,\ \vec{x}\to-\vec{x})$, нужно в (1) заменить $|x\xi|^{-\sigma-2}$ на $|x\xi|^{-\sigma-2}\,\mathrm{sign}(x\xi)$ и во втором слагаемом заменить $2n$ на $2n-1$. Доказательство этих утверждений дано в приложении.

Функции $F(\xi,\sigma)$ и $F(\xi,x;2n)$ преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца соответственно.

Введем новые переменные

$$
\begin{aligned}
&x_0 = \mathrm{sh}\,a & &\xi_0 = 1\\
&x_3 = \mathrm{ch}\,a\cos\theta & &\xi_3 = \cos\theta'\\
&x_2 = \mathrm{ch}\,a\sin\theta\cos\phi & &\xi_2 = \sin\theta'\cos\phi\\
&x_1 = \mathrm{ch}\,a\sin\theta\sin\phi & &\xi_1 = \sin\theta'\sin\phi\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
(x\xi) = \mathrm{sh}\,a - \mathrm{ch}\,a(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\Phi)] = \mathrm{sh}\,a - \mathrm{ch}\,a\cos\Theta\\
d^2\xi = \sin\theta' d\theta' d\Phi\,.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Разложим $F(\xi,\sigma)$ и $F(x,\xi;2n)$ в ряд

$$
F(\xi,\sigma) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(\sigma)\, Y_{\ell m}(\theta',\Phi)
\tag{4}
$$

$$
F(\xi,x;2n) = \sum_{\ell m} c_{\ell m} D^{\ell}_{mk}(\xi/|\xi|)\,,\qquad k=2n\,.
\tag{5}
$$

Повернем систему координат так, чтобы ось Z совпала с вектором $\vec{x}$. При этом функции $Y_{\ell m}$ и D^{ℓ}_{mk} преобразуются по формулам

$$
Y_{\ell m}(\theta',\Phi) = \sum_{i} D^{\ell}_{mi}(\phi,\hat{\theta},\chi)\, Y_{\ell i}(\Theta,\Psi)
\tag{6}
$$

$$
D^{\ell}_{mk}(\Phi,\theta',0) = \sum_{j} D^{\ell}_{mj}(\phi,\theta,\chi)\, D^{\ell}_{jk}(\Psi,\Theta,0)\,,
\tag{7}
$$

а ввиду инвариантности меры на сфере при вращениях

$$
d\cos\theta' d\Phi = d\cos\Theta\, d\Psi = d^2\xi\,.
\tag{8}
$$

Подставим выражения (4), (5) в формулу (1) и произведем с учётом (6)–(8) интегрирование по $d^2\xi$. В итоге получим

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1)\Gamma(-\sigma-1)\sum_{\ell m} a_{\ell m}(\sigma)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{P_\ell^{\sigma+1}(\mathrm{th}\,a)+(-)^{\ell}P_\ell^{\sigma+1}(-\mathrm{th}\,a)}{\mathrm{ch}\,a}\,d\sigma +\\
+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} 2n \sum_{\ell m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\, c_{\ell m}\frac{P_\ell^{2n}(\mathrm{th}\,a)}{\mathrm{ch}\,a}\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $P_\ell^{\sigma+1}(\mathrm{th}\,a)$ и $P_\ell^{n}(\mathrm{th}\,a)$ – присоединенные функции Лежандра.

Первое слагаемое в этом выражении аналогично разложению функции на двухполостном гиперболоиде, полученному Виленкиным и Смородинским[4].

Появление сигнатуры $(-)^{\ell}$ в этом слагаемом обязано рассмотрению чётной функции $f(x)=f(-x)$, $(x_0\to-x_0)$, $\vec{x}\to-\vec{x})$. Для нечётной функции нужно в (9) заменить $(-)^{\ell}$ на $-(-)^{\ell}$ и суммирование по чётным числам – на суммирование по нечётным. Характерной особенностью однополостного гиперболоида является то, что произвольная функция $\phi(x)$, определенная на нем, разлагается на компоненты по паре функций $P_\ell^{\sigma+1}(\mathrm{th}\,a)$ и $P_\ell^{n}(\mathrm{th}\,a)$, где $n=1,2,3\ldots$

Второе слагаемое в (9) как раз и есть то разложение, которое получено в работе[1], с теми же самыми ограничениями на квантовые числа

$$\ell = n,\ n+1,\ n+2,\ \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \qquad (10)$$

Эти ограничения явно видны из (9) и свойств $P_\ell^n(\mathrm{th}\,a)$. Используя только дискретные представления, Гинзбург и Тамм получили "спектр масс" $m_0^2 = m_0^2(\ell, n)$. Таким образом, в /1/ не учтен весь непрерывный спектр оператора Лапласа и поэтому написанная в /1/ формула Планшереля неверна.

Полную же систему функций относительно нормы $\int |f(x)|^2 dx < \infty$ образует пространство пар функций:

$$\mathrm{ch}^{-1} a \begin{matrix} P_\ell^{\sigma+1}(\mathrm{th}\,a) \\ \\ P_\ell^{n}(\mathrm{th}\,a) \end{matrix} \quad Y_{\ell m}(\theta, \phi),$$

т.е. наряду с формулой для спектра масс, соответствующей с.з. оператора Лапласа $\lambda = -(n^2 - 1)$,

$$m_0^2 = \frac{\kappa^2 - \beta(-n^2 + 1)}{1 + \epsilon(\ell^2 + \ell - n^2 + 1)} \qquad (11)$$

одновременно существует "спектр масс", соответствующий $\lambda = \rho^2 + 1$

$$m_0^2 = \frac{\kappa^2 - \beta(\rho^2 + 1)}{1 + \epsilon(\ell^2 + \ell + \rho^2 + 1)}, \qquad (12)$$

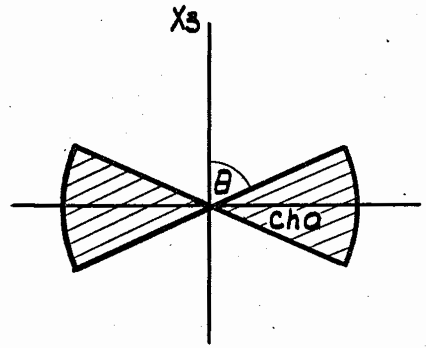
где β, ϵ – некоторые константы (см. /1/), κ – масса, соответствующая обычному волновому уравнению. Так как в качестве внутренних координат выбирался только вектор x, то второй инвариант группы Лоренца

$$\Delta_1 = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M_{\mu\nu} M_{\alpha\beta}$$

равен нулю.

Только подходящим выбором некоторого граничного условия можно разбить множество $\{X\}$ на две подобласти, в каждой из которых система $P_\ell^{\sigma+1}(\mathrm{th}\,a)$ либо $P_\ell^n(\mathrm{th}\,a)$ будет полна.

Второе слагаемое в (1) появляется в результате интегрирования при выводе формулы обращения (см.приложение) по области $|ax| < 1$, где a – начало отсчёта, например, $a_3 = 1$, $a = (0100)$. Отсюда следует, что дискретная серия возникает в подобласти гиперболоида, а именно, при $x_3 < 1$, или в параметризации, рассмотренной выше, $x_3 = \mathrm{ch}\,a \cos\theta' < 1$. При этом $x_0 = \mathrm{sh}\,a$ может быть больше x_3, либо меньше x_3. Если $x_0 = \mathrm{sh}\,a > x_3 = \mathrm{ch}\,a \cos\theta$, то это означает, что скорость взаимодействия, распространяющегося вдоль направления x_3, меньше скорости света. В противном случае $x_0 < x_3$ скорость взаимодействия больше скрости света. Вырежем из многообразия $x_0^2 - x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = -1$, $|x_3| < 1$ подобласть $\mathrm{th}\,a < \cos\theta$. В результате такой операции получим тело вращения, симметричное относительно x_3 и имеющее вид, изображенный на рис. 1 в разрезе, а также избавимся от скоростей, больших скорости света в направлении x_3. На полученном многообразии достаточно рассмотрение только дискретной серии представлений.



и, согласно /3/, их значения равны соответственно

$$I^{\mp}(x, b-i0, \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-1/2} \{(-P \pm i0)^{1/2} \pm i b_3\}^{\mu+1} \qquad (9)$$

$$I^{\mp}(x, b+i0; \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-1/2} \{(-P \mp i0)^{1/2} \mp i b_3\}^{\mu+1} \qquad (10)$$

где верхний знак добавки $i0$ имеет место, если $b_0 > 0$, а нижний – если $b_0 < 0$; $P = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2$.

Приняв во внимание формулы (7) – (10), получаем для $\Phi_1(a, x; \mu)$ выражение (при $x = (0100)$)

$$\Phi_1(x, a; \mu) = \frac{i\pi}{(\mu+1)\sin\mu\pi}\Big[e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-1/2} \{(-P \pm i0)^{1/2} + i(a_3 - 1)\}^{\mu+1} -$$

$$- e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-1/2} \{(-P \mp i0)^{1/2} - i(a_3 - 1)\}^{\mu+1} - \qquad (11)$$

$$- e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-1/2} \{(-P \mp i0)^{1/2} - i(a_3+1)\}^{\mu+1} + e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-1/2} \{(-P \pm i0)^{1/2} + i(a_3+1)\}^{\mu+1}\Big],$$

здесь $P = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2$ и верхний знак берется при $a_0 > 0$, а нижний при $a_0 < 0$. Функция $\Phi_2(x, a; \mu)$ имеет вид

$$\Phi_2(x,a;\mu) = \frac{i\pi}{(\mu+1)\sin\mu\pi}\Big[e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-1/2} \{(-P \mp i0)^{1/2} - i(1-a_3)\}^{\mu+1} - e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-1/2} \times \qquad (12)$$

$$\times \{(-P \pm i0)^{1/2} + i(1-a_3)\}^{\mu+1} - e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-1/2} \{(-P \pm i0)^{1/2} - i(a_3+1)\}^{\mu+1} + e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-1/2} \times$$

$$\times \{(-P \mp i0)^{1/2} + i(a_3+1)\}^{\mu+1}\Big].$$

Используя формулы

$$(-P \pm i0)^{1/2} = P_-^{1/2} \pm i P_+^{1/2} \qquad (13)$$

$$(-P \pm i0)^{-1/2} = P_-^{-1/2} \mp i P_+^{-1/2}, \qquad (13')$$

упростим выражения (11), (12) и получим вид функции $\Phi(x, a; \mu)$ при $P > 0$, $a_0 > 0$, $a_0 < 0$, $x = (0100)$

$$\Phi = \frac{-2\pi P^{\mu/2}}{\mu+1}\Big\{\Big(1 + \frac{a_3 - 1}{P^{1/2}}\Big)^{\mu+1} - \Big(1 - \frac{a_3+1}{P^{1/2}}\Big)^{\mu+1}\Big\}, \qquad (14)$$

а в области $P < 0$, т.е. $(ax)^2 = \cos^2 kr \equiv \cos^2\Theta = a_3^2 < 1$,

$$\Phi(a, x; \mu) = \frac{-4\pi \sin^{\mu} kr}{(\mu+1)\sin\mu\pi} \cos kr. \qquad (14')$$

Здесь r – расстояние между точками a и x. Поскольку значение $\Phi(x, a; \mu)$ не меняется при одновременном сдвиге точек a и x, поэтому полученные выражения справедливы для любых двух точек однополостного гиперболоида.

Обобщенная функция $(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)_+^{\mu/2}$ имеет при $\mu = -3$ простой полюс с вычетом

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч.}} (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)_+^{\mu/2} = -4\pi\delta(x_0, x_1, x_2),$$

откуда

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч.}} \int \Phi(x,a;\mu) f(x)\,dx = \underset{\mu=-3}{\text{Выч.}} \int_{|ax|>1} \Phi(x,a;\mu) f(x)\,dx + \underset{\mu=-3}{\text{Выч.}} \int_{|ax|<1} \Phi(x,a;\mu) f(x)\,dx = \qquad (15)$$

$$= -8\pi^2 f(a) - 2\int_{|ax|<1} (ax)\,[1-(ax)^2]^{-3/2} f(x)\,dx.$$

Вычет же левой части равенства (3) при $\mu = -3$ в силу формулы

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч.}}\ t_+^{\mu} = \frac{1}{2}\delta''(t)$$

равен

$$\frac{1}{2}\int h(\xi)\,\delta''(|a\xi| - 1)\,\text{sign}\,a\xi\,d\xi\,. \tag{16}$$

Приравнивая полученные выражения, имеем

$$f(a) = -\frac{1}{16\pi^2}\int h(\xi)\,\delta''(|a\xi| - 1)\,\text{sign}\,(a\xi)\,d\xi - \frac{1}{4\pi^2}\int_{|ax|<1}(ax)[1-(ax)^2]^{-3/2}f(x)\,dx.$$

Во втором слагаемом для x введем следующую параметризацию

$$x_0 = t \qquad x_2 = -\sin\Theta\cos\alpha + t\sin\alpha \tag{18}$$

$$x_3 = \cos\Theta \qquad x_1 = \sin\Theta\sin\alpha + t\cos\alpha\,,$$

где $\qquad 0 \le \alpha \le 2\pi,\quad 0 \le \Theta \le \pi,\quad -\infty < t < \infty\,.$

Так как в области $(ax) < 1$ всегда представим в виде $x = b + \xi t$, где с учётом (18) $\xi = (1, 0, \sin\alpha, \cos\alpha)$, $\xi^2 = 0$, $b^2 = -1$,

$$b = (0, \cos\Theta, -\sin\Theta\cos\alpha, \sin\Theta\sin\alpha),\quad dx = \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{x_0} = d\cos\Theta\,dt\,d\alpha\,,$$

то второе слагаемое имеет вид

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\Theta\,d\Theta}{\sin^2\Theta}\int_L \phi(\xi,\theta)\,\delta(a\xi)\,d\Omega\,, \tag{19}$$

где $\phi(\xi,\theta) = \phi(\xi, b)$ определяется формулой (2), L – сфера и $d\Omega$ – элемент поверхности сферы. Разложим $\phi(\xi, b)$ в ряд

$$\phi(\xi, b) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\xi, b; n) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\,F(\xi, a; n) \tag{20}$$

см [3]

Подставим (20) в (19), изменим порядок интегрирования и суммирования и учтем, что мы разлагаем нечётную функцию. В результате получим

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\int_L F(\xi, a; n)\,\delta(a\xi)\,d\Omega\,, \tag{21}$$

где суммирование ведется по нечётным n и

$$\alpha_n = \int_0^{\pi}\cos\theta\,\sin^{-2}\theta\,\cos n\theta\,d\theta\,. \tag{22}$$

Интеграл (22) понимается как значение при $\lambda = -2$ интеграла $\int_0^{\pi}\cos\theta\,\sin^{\lambda}\theta\,\cos n\theta\,d\theta$.

Пользуясь формулой 3.631 (8) из [4], находим что

$$\alpha_n = -2\pi|n|, \qquad \text{где} \qquad n = 2m-1,$$

т.е.

$$I_2 = \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\int_L F[\xi, a; (2m-1)]\,\delta(a\xi)\,d\Omega\,. \tag{23}$$

Разложив $h(\xi)$ на однородные компоненты

$$h(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}F(\xi,\sigma)\,d\sigma\,, \tag{24}$$

подставив (24) в (17), выполним интегрирование. Тогда с учётом (23) получим окончательный вид формулы обращения

$$f(x) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\sigma(\sigma+1)\int_L F(\xi,\sigma)\,|x\xi|^{-\sigma-2}\,\text{sign}\,(\xi x)\,d^2\xi\,d\sigma\, + \tag{25}$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\int_L F[\xi, x; (2m-1)]\,\delta(\xi x)\,d^2\xi\,.$$

Здесь $x^2 = -1$, $\xi^2 = 0$, L – контур интегрирования на конусе (сфера), $d^2\xi = d\Omega$ – элемент поверхности сферы.

Литература

I. В.Л.Гинзбург, И.Е.Тамм. ЖЭТФ 17, 227 (1947).

2. И.М.Гельфанд, М.И.Граев. Труды Моск. Матем.общества 11, 243 (1962).
3. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
4. Н.Я.Виленкин, Я.А.Смородинский, ЖЭТФ 46, 179 3, (1964).
5. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1967 года.