ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3550

Л.Г. Литвиненко

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ МЕТОДОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

Р2 - 3550

54//1 ир.

Л.Г. Литвиненко *

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ МЕТОДОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

Направлено в ЯФ

* Институт математики АН МССР.

I. Введение

Введение понятия потенциала в квантовой теории поля (квазипотенциальный метод) является весьма удобным для изучения аналитических свойств матрицы рассеяния. С помощью квазипотенциального метода описание процессов рассеяния сводится к уравнению типа Шредингера с комплексным потенциалом. Свойства разложения амплитуды при малых константах связи определяются поведением потенциала на малых расстояниях. Так известно /1/, что потенциалы, которые ведут себя при малых r как $\frac{\bar{g}}{r^{\alpha}}$, разделяются на три класса в зависимости от значения $\alpha \gtreqless 2$. В случае $\alpha < 2$ S – матрица конечна в каждом порядке и ряд теории возмущений сходится. В случае $\alpha = 2$ S – матрица также конечна в каждом порядке. Для $\alpha > 2$, начиная с некоторого порядка, члены ряда теории возмущений расходятся. Хотя в теориях с константой связи, имеющей размерность длины в нулевой или отрицательной степени, после перенормировки физические величины имеют конечные значения, вопрос о сходимости ряда теории возмущений для матрицы рассеяния остается открытым.

Дайсон /2/ приводил аргументы в пользу того, что в квантовой электродинамике S -матрица зависит от константы связи неаналитическим образом, а потому разложение ее в ряд теории возмущений в лучшем случае можно считать асимптотическим. Сопоставляя результаты теории поля и потенциального рассеяния, рассмотрим случай взаимодействия $L_{int} = g\,\phi^4$. Этому виду взаимодействия соответствует потенциал, который на малых расстояниях ведет себя как

$$g\left(\frac{\log r}{r^2}\right)^{\gamma} f(r)\,,$$

где γ – целое число. В работе [3] показано, что решение уравнения Шредингера с потенциалом

$$V(r) = -g\,\frac{\log r}{r^2}, \quad \mathrm{Re}\, g > 0 \tag{1.1}$$

имеет существенную особенность при $g=0$. Поэтому интересно выяснить, как эта особенность волновой функции влияет на аналитические свойства матрицы рассеяния. В работе [4] высказано утверждение, что длина рассеяния, соответствующая потенциалу (1.1), имеет ту же особенность, что и волновая функция. Однако более детальное исследование показывает, что существенная особенность возникает лишь при учёте в потенциале, полученном по теории возмущений с помощью метода [5], всех членов, начиная с $\gamma=0$. Пренебрежение первым членом дает для полюсов амплитуды в плоскости g уравнение, которое не приводит к накоплению полюсов в точке $g=0$. Член с $\gamma=0$ изменяет центробежный потенциал. Учет этого члена аналогичен замене $\ell . \ell = \bar{\ell} = \sqrt{\lambda^2 - g^2(v_{2,0} + g\, v_{3,0})}$,

здесь $\lambda^2 = (\ell + \frac{1}{2})^2$, а $v_{2,0}$ и $v_{3,0}$ – константы. Уравнение Шредингера при рассеянии на этом потенциале описывает свободное движение. Решение представляется функциями Бесселя $Z_{\bar{\ell}}(kr)$. Учёт членов с $\gamma \geq 1$ ведет к появлению существенной особенности и в волновой функции, и в амплитуде рассеяния. Рассмотрим более детально возникновение существенной особенности в амплитуде рассеяния.

II. Амплитуда рассеяния и ее аналитические свойства

Полученный по теории возмущений потенциал имеет такой вид:

$$V(r) = \frac{1}{r^2}\Big\{ g^2 \sum_{m=2} g^{m-2} v_{m,0} + g^3 \log\frac{r}{r_0} \sum_{m=3}^{n} g^{m-3} v_{m,1} +$$

$$+ g^4 \log^2\frac{r}{r_0} \sum_{m=4}^{n} g^{m-4} v_{m,2} + \ldots + g^4 \log^{n-2}\frac{r}{r_0} \sum_{m=r}^{n} g^{m-r} v_{m,m-r} \Big\}, \tag{2.1}$$

Первые члены этого разложения получены в работе /6/. Ограничимся двумя первыми слагаемыми, считая $V(r) = 0$, при $r > r_0$. Будем решать уравнение Шредингера для такого потенциала:

$$u''(r) + \frac{\bar{\lambda}^2 - \frac{1}{4}}{r^2} u(r) + k^2 u(r) = V(r) u(r). \tag{2.2}$$

Рассмотрим случай $k^2 \to 0$. Это можно сделать, так как согласно теореме Пуанкаре, решение есть целая функция параметра k^2. Для того чтобы разделить регулярное и иррегулярное решения при $r \to 0$, будем считать, что на малых расстояниях имеет место сильное отталкивание.

Характер взаимодействия определяется знаком:

$$\xi = (-1)^n \, v_{n,m-r}. \tag{2.3}$$

Если $\xi > 0$, при малых r имеется отталкивание, если $\xi < 0$ – притяжение. В рассматриваемом случае $m = 3$, а потому для наиболее сингулярной части потенциала коэффициент отрицателен: $v_{3,1} = -\beta$.

Решение уравнения (2.2) с потенциалом (2.1) в сделанном приближении выражается через функцию Эйри:

$$u(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} A_i\left[\beta^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\bar{\lambda}^2}{g^2} + v_{2,0} + g\, v_{3,0} - \beta g \log \frac{r}{r_0}\right)\right]. \tag{2.4}$$

Здесь
$$\bar{\lambda}^2 = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \left(v_{2,0} + g\, v_{3,0}\right).$$

Согласно /7/, определим парциальную амплитуду рассеяния:

$$f_\ell = -\frac{W[u, g]}{W[u, f]}. \tag{2.5}$$

Здесь $W[u, g]$ – определитель Вронского, а $f(r), g(r)$ описывают свободное движение при $r > r_0$ и имеют такую асимптотику:

$$g(k) \approx k^{-1} \sin\left(k r - \frac{\ell \pi}{2}\right), \quad f(r) \approx e^{i\left(k r - \frac{\ell \pi}{2}\right)}. \tag{2.6}$$

Они представляются функциями Бесселя:

$$g(r) = \sqrt{\frac{\pi k r}{2}}\, k^{-1} J_{\ell+\frac{1}{2}}(k r) \tag{2.7}$$

$$f(r) = \sqrt{\frac{\pi k r}{2}}\, i\, H^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}(k r) .$$

Рассматривая амплитуду при малых знаяениях k, получим такое выражение

$$f_{\ell} = -\frac{\Gamma(1-\lambda)}{2^{2\lambda}\Gamma(1+\lambda)}\,\frac{\sin\pi\lambda\cdot(k r)^{2\lambda}}{k}\,\frac{(\lambda+\frac{1}{2})u - u' r_0}{(\frac{1}{2}-\lambda)u - u' r_0} \tag{2.8}$$

Подставляя сюда $u(r)$ из уравнения (2.4), имеем:

$$f_{\ell} = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2^{2\lambda}\Gamma(1+\lambda)}\,\frac{\sin\pi\lambda\cdot(k r)^{2\lambda}}{k}\,\frac{\lambda + g\beta^{-\frac{1}{3}}\dfrac{A_1'(\eta)}{A_1(\eta)}}{\lambda - g\beta^{\frac{1}{3}}\dfrac{A_1'(\eta)}{A_1(\eta)}} . \tag{2.9}$$

Здесь

$$\eta = \beta^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\bar{\lambda}}{g^2} + v_{2,0} + g\, v_{3,0}\right).$$

Рассмотрим поведение амплитуды при $g \to 0$. Используя ассимптотику функций Эйри $A_1(\eta)$ в области $\frac{2}{3}\pi < \arg\eta < \frac{4}{3}\pi$, получим следующее выражение для амплитуды:

$$f_{\ell} = \frac{\Gamma(1-\lambda)\cdot}{2^{2\lambda}\Gamma(1+\lambda)}\,\frac{\sin\pi\lambda\cdot(k r)^{2\lambda}}{k}\,\frac{\lambda - \bar{\lambda}\, i\, \mathrm{tg}\left(\frac{2}{3} i \eta^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\lambda + \bar{\lambda}\, i\, \mathrm{tg}\left(\frac{2}{3} i \eta^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)} . \tag{2.10}$$

Для нулей амплитуды имеем такое уравнение:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2}{3} i \eta^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) = i\,\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} . \tag{2.11}$$

Если ограничиться потенциалом (1.1), то отношение $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$ в правой части (2.11) будет равно 1, и уравнение (2.11) не будет иметь решений. В работе /4/ утверждается, что длина рассеяния имеет накопление точек полюсов, поскольку отношение $\frac{K'_{1/3}(z)}{K_{1/3}(z)}$ имеет полюсы, обусловленные нулями $K_{\frac{1}{3}}(z)$, где $K_{\frac{1}{3}}(z)$ есть функция Бесселя, через которую выражается решение уравнения. Однако, определяя уравнение для положения полюсов в амплитуде, следует приравнять к нулю весь знаменатель амплитуды, что приводит к уравнению:

$$K_{\frac{1}{3}}(z) + K_{\frac{2}{3}}(z) = 0, \tag{2.12}$$

которое при $z \to \infty$ дает $\operatorname{tg}(iz - \frac{5}{12}\pi) = -i$. Таким образом, S-матрица уравнения Шредингера с потенциалом (1.1) не имеет существенной особенности по константе связи.

Уравнение (2.11) легко свести к явному уравнению для g:

$$\frac{2}{3}\beta^{-1}\frac{\bar{\lambda}^3}{g^3} - \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\frac{1}{i} = \ln\frac{1}{g} + \ln 2\lambda - \left(\frac{1}{2}\ln v_{0,0} + i\pi\right). \tag{2.13}$$

Очевидно, что можно выбрать контур $g = Re^{i\phi}$ (рис. 1), на котором при $R \to 0$ $|f(g)| > |\phi(g)|$, где $f(g) = \frac{2}{3}\beta^{-1}\frac{\bar{\lambda}^3}{g^3} + i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$ и $\phi(g) = \ln\frac{1}{g} + \ln 2\lambda - \left(\frac{1}{2}\ln v_{0,0} + i\pi\right)$ и потому число корней уравнения (2.13), начиная с некоторых n, будет совпадать с числом нулей функции $f(g)$, поэтому корни уравнения (2.13) будут сгущаться в окрестности точки $g = 0$ /8/, а, следовательно, точка $g = 0$ будет существенно особой точкой амплитуды рассеяния.

III. Амплитуда рассеяния для потенциала порядка g^4

Покажем, что та же особенность возникает при учёте следующего члена в ряде для потенциала (2.1):

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^2}\left\{ g^2 \sum\limits_{m=2}^{n} v_{m,0} + g^3 \log\frac{r}{r_0} \sum\limits_{m=3}^{n} g^{m-3} v_{m,1} + g^4 \log^2\frac{r}{r_0} \sum\limits_{m=4}^{n} g^{m-4} v_{m,2} \right\} & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Последовательной заменой $u(r) = (\frac{r}{r_0})^{\frac{1}{2}} \bar{u}(r)$ и $x = \log \frac{r}{r_0}$ уравнение Шредингера сводится к такому виду:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d x^2} = [\, \bar{\lambda}'^2 + g^3 \beta' x + \gamma g^4 x^2 \,] \bar{u} \,. \tag{3.2}$$

Здесь

$$\bar{\lambda}'^2 = \lambda^2 + g^2 (v_{1,0} + g v_{3,0} + g^2 v_{4,0})$$

$$\beta' = (v_{3,1} + g v_{4,1})$$

$$\gamma' = v_{4,2} > 0 .$$

Уравнение (3.2) легко приводится к виду, решением которого являются функции параболического цилиндра:

$$u(r) = (\frac{r}{r_0})^{\frac{1}{2}} D_p(z) , \tag{3.3}$$

где

$$z = \sqrt{2}\, g \gamma^{\frac{1}{4}} x - \frac{\beta}{\sqrt{2}\, \gamma^{\frac{3}{4}}} \qquad \text{и}$$

$$p = - \frac{1}{2} - \frac{\bar{\lambda}^2}{2 g^2 \gamma^{1/2}} + \frac{\beta^2}{8 \gamma^{3/2}} \,.$$

Амплитуда запишется следующим образом:

$$f_\ell = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2^{2\lambda} \Gamma(1+\lambda)} \, \frac{\sin \pi \lambda \cdot (k r)^{2\lambda}}{k} \, \frac{\lambda - \sqrt{2}\, g \gamma^{1/4} \dfrac{D'_p(-\frac{\beta}{\sqrt{2}\gamma^{3/4}})}{D_p(-\frac{\beta}{\sqrt{2}\gamma^{3/4}})}}{\lambda + \sqrt{2}\, g \gamma^{1/4} \dfrac{D'_p(-\frac{\beta}{\sqrt{2}\gamma^{3/4}})}{D_p(-\frac{\beta}{\sqrt{2}\gamma^{3/4}})}} \,. \tag{3.4}$$

Пусть величина $g \to 0$ тогда /9/ :

$$D_p(z) \approx 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p}{e}\right)^{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{4\left(p + \frac{1}{2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos\left(p\pi - z\sqrt{p + \frac{1}{2}}\right). \qquad (3.5)$$

Положения нулей амплитуды определяются уравнением:

$$\lambda - \sqrt{2}\, g \gamma^{1/4} \sqrt{p + \frac{1}{2}}\, \mathrm{tg}\left(p\pi - z\sqrt{p + \frac{1}{2}}\right) = 0\,, \qquad (3.6)$$

или

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{g^2} \frac{\pi}{2\gamma^{1/2}} - i\frac{\bar{\lambda}}{g}\frac{\beta}{\gamma} + n\pi = i\ln\frac{1}{g} + \frac{1}{2}\ln\frac{4\lambda^2}{v_{2,0}}\,. \qquad (3.7)$$

Таким образом, и в этом случае нули парциальных амплитуд сгущаются около точки $g = 0$. Учёт следующего члена в потенциале не изменяет аналитических свойств амплитуды.

Эти результаты можно обобщить на случай $k^2 \neq 0$, например, рассматривая в уравнении (2.2) член $k^2 u(r)$ как возмущение.

Автор приносит глубокую благодарность А.А.Логунову и О.А.Хрусталеву за полезные и стимулирующие обсуждения, Б.Арбузову , А.Т.Филиппову – за руководство работой.

Литература

1. A.Bastai, L.Bertocchi,S.Fubini, G.Furlan. Nuov.Cim., 30, 1512 (1963).

2. F.J.Dyson.Phys.Rev., 85, 631 (1952).
3. B.A.Arbuzov,A.T.Filippov,O.A.Krustalev. Phys.Lett., 8, 205 (1964).
4. F.Calogero,M.Cassandro. Nuov.Cim., 34,1712 (1964).
5. A.A.Logunov,A.N.Tavkhelidze,I.T.Todorov,O.A.Krustalev. Nuov.Cim., 30, 134 (1963).
6. A.T.Filippov, Phys. Lett. 9, 78 (1964).
7. A.Bottino, A.M.Longoni, T.Regge. Nuov.Cim., 23, 954 (1962).

8. Е.Титчмарш. Теория функций. ГИТТЛ, 1951.

9. H.Jeffreys. Asymptotic Approximations. Oxford, Clarendon Press, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 октября 1967 года.

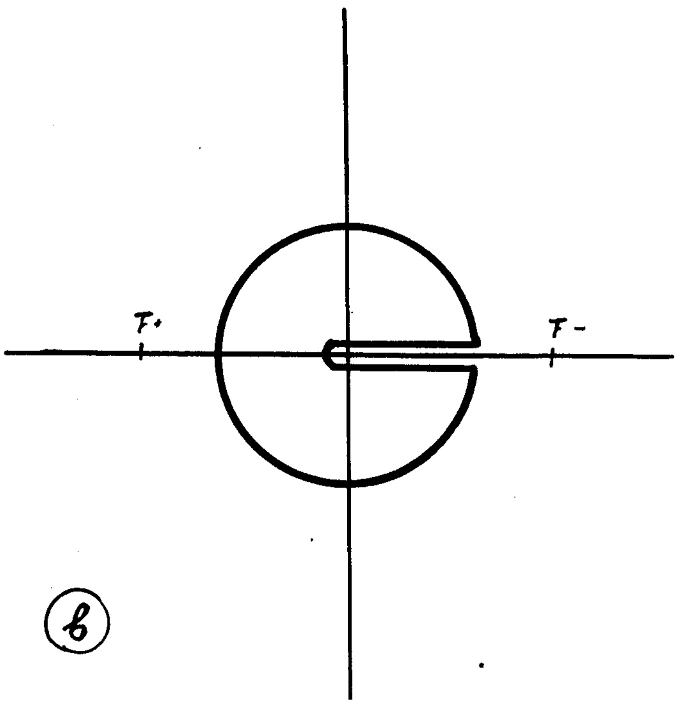

Рис. 1.