ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3537

Л. Енковски

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ НЕУБЫВАЮЩИХ АМПЛИТУД

1967.

Р2 - 3537

Л. Енковски

ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ НЕУБЫВАЮЩИХ АМПЛИТУД

Направлено в Nuclear Physics

Н.Н.Боголюбовым было отмечено, что многие правила сумм в теории алгебры токов можно получить как следствие аналитичности соответствующих инвариантных амплитуд, если последние обладают определенными асимптотическими поведениями. Были рассмотрены различные дисперсионные правила сумм для убывающих на бесконечности амплитуд. Такие правила приводят к ряду следствий, которые неплохо согласуются с опытом (см.обзор[1] и цитированную там литературу). В недавней работе[2] было получено дисперсионное правило сумм для амплитуд, обладающих реджевским поведением. Целью настоящей работы является получение и сравнение с экспериментом некоторых других дисперсионных правил сумм для амплитуд рассеяния, которые ограничены или растут полиномиально. Эти поведения, в свою очередь, можно также установить непосредственно на опыте путем измерения сечения (без всяких поляризационных эффектов). Поэтому полученные ниже правила сумм можно рассматривать как средство для проверки аналитичности амплитуд.

1. Обозначим через $F_{\pm}(\omega)$ амплитуды рассеяния вперед $\pi^{\pm}$-мезонов на протоне с вычтенными полюсными членами, где ω – энергия мезона в лабораторной системе в единицах его массы. В локальной теории поля $F_{\pm}(\omega)$ являются граничными значениями аналитических функций $F_{\pm}(z)$ в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ и удовлетворяют соотношениям перекрестной симметрии

$$F_{+}(\omega) = F_{-}(\omega)^{*}$$

(для вещественных ω).

$$f(z) = \frac{F_{+}(z) - F_{-}(z)}{z}.$$

Она является также аналитической функцией в комплексной плоскости z с указанными разрезами. На основе имеющихся в настоящее время экспериментальных данных можно предполагать, что $f(z)$ ограничена. Тогда для $f(z)$ мы имеем дисперсионное соотношение с одним вычитанием. В частности, для вещественных ω, лежащих между точками $\omega = -1$ и $\omega = 1$:

$$f(\omega) = \mathrm{Re}\, f(\omega) = c + \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega'.$$

Отсюда получаем значение производной n -го порядка при $\omega = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'^{n+1}} d\omega'. \qquad (1)$$

С другой стороны, реальная часть функции $f(z)$ является гармонической функцией. Пользуясь этим свойством, мы можем выразить $f^{(n)}(0)$ через интеграл от реальной части вдоль разрезов и тем самым получить правило сумм, содержащее одновременно мнимую и реальную части. Для этой цели мы осуществляем конформное отображение плоскости z с разрезами в единичный круг, полагая:

$$w(z) = \frac{\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z} + \sqrt{1-z}}.$$

Реальную часть $f(z)$ рассмотрим теперь как функцию от w, гармоническую внутри единичного круга:

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(w). \qquad (2)$$

Для $u(w)$ мы имеем формулу Пуассона

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) P(w, e^{i\phi}) d\phi,$$

где $P(w, e^{i\phi})$ – ядро Пуассона

$$P(w, e^{i\phi}) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\phi} = \mathrm{Re}\, \frac{e^{i\phi} + r}{e^{i\phi} - r}, \quad r = |w|.$$

Отсюда получаем

$$u^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) \left[\frac{d^n}{dw^n} P(w, e^{i\phi}) \right]_{w=0} d\phi. \qquad (3)$$

Интеграл в правой части последнего соотношения можно представить в виде интеграла вдоль разрезов в плоскости z. Поскольку производные $f^{(n)}(0)$ (по z) и $u^{(n)}(0)$ (по w) просто связаны между собой, то из (1) и (3) сразу вытекают правила сумм, в которые входят только измеримые величины. В частности, для производных первого и второго порядков мы имеем равенства

$$f'(0) = u'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{1}{4} u''(0).$$

Отсюда получаем правило сумм

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega)}{\omega^3} d\omega = \int_1^{\infty} \mathrm{Re}\, f(\omega) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 - 1}} d\omega. \qquad (4)$$

2. Рассмотрим теперь амплитуду $F(z)$ с вычтенными полюсными членами, аналитическую в плоскости z с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Пусть $|z|^n$ растет не быстрее $|z|^n$ при $z \to \infty$. Введем вспомогательную функцию $\phi(z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) $\phi(z)$ аналитична в плоскости z с указанными разрезами и вещественна при $z = \omega$, $-1 < \omega < 1$;

б) на разрезах она может иметь лишь корневые особенности типа $(z-a)^{-1/2}$;

с) $\phi(z) \to 0$ не медленнее $|z|^{-n-2}$ при $z \to \infty$.

Ниже мы приведем некоторые примеры таких функций. Произведение $F(z)\phi(z)$ является также аналитической функцией в плоскости с указанными разрезами. Оно стремится к нулю не медленее $\frac{1}{|z|^2}$ и, следовательно, удовлетворяет правилу сумм:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, [F(\omega)\phi(\omega)]\, d\omega = 0.$$

В качестве примера вспомогательной функции $\phi(z)$ можно выбрать:

$$\phi(z) = \left(\frac{w(z)}{z}\right)^{n+2},$$

где $w(z)$ – аналитическая функция, отображающая конформно плоскость z с разрезами в единичный круг и переводящая точку $z=0$ в точку $w=0$, или

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(a_1^2-z^2)\ldots(a_{n+2}^2-z^2)}},$$

где a_i – положительные числа $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2}$. Подобные функции были использованы Келдышем и Седовым [3] при решении смешанных краевых задач. В частности, при $n=2$ мы можем выбрать

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(a^2-z^2)(b^2-z^2)(c^2-z^2)}}, \quad c > b > a > 1$$

и мы получим правило сумм

$$\int_1^a \frac{\operatorname{Re} F(\omega) - \operatorname{Re} F(-\omega)}{\sqrt{(\omega^2-1)(a^2-\omega^2)(b^2-\omega^2)(c^2-\omega^2)}}\,d\omega - \int_a^b \frac{\operatorname{Im} F(\omega) + \operatorname{Im} F(-\omega)}{\sqrt{(\omega^2-1)(\omega^2-a^2)(b^2-\omega^2)(c^2-\omega^2)}}\,d\omega -$$

$$- \int_b^c \frac{\operatorname{Re} F(\omega) - \operatorname{Re} F(-\omega)}{\sqrt{(\omega^2-1)(\omega^2-a^2)(\omega^2-b^2)(c^2-\omega^2)}}\,d\omega + \int_c^\infty \frac{\operatorname{Im} F(\omega) + \operatorname{Im} F(-\omega)}{\sqrt{(\omega^2-1)(\omega^2-a^2)(\omega^2-b^2)(\omega^2-c^2)}}\,d\omega = 0.$$

Это правило сумм применимо ко всем амплитудам рассеяния, так как все они удовлетворяют требуемому ограничению на рост при $z \to \infty$. Подобное правило было получено также в работе [4] для всех убывающих амплитуд, независимо от способа стремления к нулю. В действительности же правила сумм вида (5) справедливы для любых амплитуд с полиноминальным ростом и являются следствием лишь аналитичности и унитарности.

Перепишем правила сумм (5) и (4) в переменных, удобных для сравнения с экспериментом

$$\frac{1}{4\pi}\int_1^a \frac{k\,\sigma^{(-)}}{|\phi(\omega)|}\,d\omega + \int_a^b \frac{D^{(-)}}{|\phi(\omega)|}\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int_b^c \frac{k\,\sigma^{(-)}}{|\phi(\omega)|}\,d\omega -$$

$$- \int_c^d \frac{D^{(-)}}{|\phi(\omega)|}\,d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_d^\infty \frac{k\,\sigma^{(-)}}{|\phi(\omega)|}\,d\omega - \frac{2f^2}{\left|\phi\left(\frac{1}{2M}\right)\right|} = 0 \qquad (6)$$

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^4}\,\frac{k\,\sigma^{(-)}}{4\pi} = \int_1^\infty \left[\frac{D^{(-)}}{\omega} - \frac{2f^2}{\omega^2 - \left(\frac{1}{2M}\right)^2}\right] \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2-1}} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right) d\omega \qquad (7)$$

где $\sigma^{(-)}$ и $D^{(-)}$ – разности полных сечений и реальных частей амплитуд рассеяния вперед $\pi^{\pm} p \to \pi^{\pm} p$ процессов, ω и k – энергия и импульс π -мезона (все величины в лабораторной системе), M – масса нуклона. При расчётах принималось $m_\pi = h = c = 1$.

В настоящее время имеется много экспериментальных данных по полным сечениям $\pi^{\pm} p$ рассеяния до энергий 30 Гэв (см. [5] и [6]). Нахождение $D^{(-)}$ представляет бóльшие трудности из-за недостатка и малой точности данных. $D^{(-)}$ мы определили из данных по дифференциальному сечению процесса перезарядки $\pi^- p \to \pi^0 n$ [7]

$$[D^{(-)}]^2_{л.с.} = 2\,\frac{d\sigma_{exc}(0^0)}{d\Omega}\Big|_{л.с.} - \left(\frac{k}{4\pi}\,\sigma^{(-)}\right)^2$$

и по результатам фазового анализа [8,9] в области низких энергий.

Для проверки правила сумм (6) нами были выбраны такие интервалы (0 ÷ 230) мэв, (230 ÷ 371) мэв, (371 ÷ 1003) мэв, (1003 ÷ 1450) мэв кинетических энергий π -мезона, где имеются сравнительно хорошие данные [7]. Получены следующие численные значения для каждого из слагаемых в формуле (6):

$I_1 = (-8{,}4 \pm 0{,}5)$, $I_3 = (-4{,}65 \pm 0{,}2)$, $I_5 = (0{,}134 \pm 0{,}01)$,
$I_2 = (12{,}6 \pm 1{,}5)$, $I_4 = (0 \pm 0{,}1)$, $I_6 = -\dfrac{2f^2}{\left|\phi\left(\frac{1}{2M}\right)\right|} = -0{,}473$,

т.е. в пределах экспериментальных ошибок правило (6) выполняется.

Для правила (7), очевидно, основной вклад дает область низких энергий. Причём для правой части существенны значения величин:

$$D^{(-)}\Big|_{\omega=1} = \left(1+\frac{1}{M}\right)\frac{2}{3}\left(a_1 - a_3\right),$$

где a_1 и a_3 –длины рассеяния в S – состоянии с изоспином 1/2 и 3/2, и f^2, определяющих вклад от особенности $\frac{1}{\sqrt{\omega - 1}}$

Расчёты показали, что согласие с экспериментом имеет место, если для $D^{(-)}(1)$ принять минимальное, в пределах ошибок, значение по данным работы [8], а для f^2 – максимальное – по данным работы [11], где $f^2 = 0,088 \pm 0,001$. Отметим, что значения

$(a_1 - a_3) = 0,245 \pm 0,01$ [10] и $(a_1 - a_3) = 0,260 \pm 0,04$ [12]

данных по фоторождению дают лучшее согласие, чем $(a_1 - a_3) = 0,291 \pm 0,013$ [13] из данных по реакции обмена $\pi^0 p \to \pi^0 n$. Таким образом, необходимо уточнение этих величин.

Я глубоко признателен А.А.Логунову, Нгуен Ван Хьеу и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и ценные замечания и В.В.Кухтину за помощь при выполнении расчётов.

Литература

1. В.А.Матвеев, Л.Д.Соловьев, Б.В.Струминский, В.П.Шелест, препринт ОИЯИ Р2-3118, Дубна, 1967.
2. A.A.Logunov, L.D.Soloviev, A.N.Tavkhelidze, Physics Letters, 24B, 181 (1967).
3. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексной переменной, ГИФМЛ, Москва, 1958, стр. 284.
4. Л.А.Халфин, Ядерная физика. 6, 651 (1967).
5. В.С.Барашенков, Сечения взаимодействий элементарных частиц, Наука, Москва, 1966.
6. S.J.Lindenbaum, preprint BNL New York, 1967.
7. I.C.Caris, et al. Phys. Rev. 121, 893 (1961); В.С.Барашенков, препринт ОИЯИ Р-2582, Дубна, 1966; В.Г.Зинов, С.М.Коренченко, ЖЭТФ, 38, 1399 (1959).

8. J.Hamilton, W.S.Woolcook, Rev.Mod.Phys. 35, 573 (1963).
9. A.Donnachie, preprint CERN 5TH-690, 1966.
10. J.Hamilton, W.S.Woolcock, Phys.Rev. 118, 291 (1960).
11. K.Miyake, K.F.Kinsey, D.E.Knapp, Phys.Rev., 126, 2188 (1962).
12. A.Donnachie, G.Snow, Ann.Phys. 37, 333 (1966).
13. R.A.Donald, et al.Proc.Phys.Soc. 87, 445 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1967 года.