ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3536

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов

О ПОЛНОМ НАБОРЕ КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ГРУППЫ O(n)

1967.

P2 - 3536

А.В. Николов

О ПОЛНОМ НАБОРЕ КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ГРУППЫ O(n)

Направлено в журнал "Известия физического института" АН Болгарии

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой был развит способ нахождения собственных значений операторов Казимира произвольного порядка для $O(n)$. Однако там был оставлен открытым вопрос о том, какие из введенных нами операторов Казимира независимы между собой и образуют ли они базис в совокупности всех операторов Казимира для $O(n)$. Здесь мы займемся этим вопросом. Как выяснится в дальнейшем, полученные результаты дают также возможность найти довольно естественный и удобный полный набор коммутирующих операторов в случае группы $O(n)$.

I.

В [1] мы определили операторы Казимира C_N следующим образом:

$$C_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{ii}^{N} , \tag{1.1}$$

где

$$I_{ij}^{1} = I_{ij} , \quad I_{ij}^{N+1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} I_{ik}^{N} I_{kj} + (-1)^{N+1}\sum_{k=1}^{n} I_{jk}^{N} I_{ki}\right], \quad N \geq 1 , \tag{1.2}$$

а I_{ij} – генераторы группы $O(n)$, которые выбраны как в [2]. Там же мы доказали, что операторы C_N действительно являются инвариантами любого неприводимого представления $O(n)$. Аналогично можно доказать, что такими же инвариантами являются и операторы

$$Z_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_{ii}^N , \tag{1.3}$$

где

$$J_{ij}^1 = I_{ij} , \quad J_{ij}^{N+1} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik}^N I_{kj} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik} J_{kj}^N , \quad N \geq 1 . \tag{1.4}$$

Нетрудно найти связь между операторами (1.1) и (1.3). Действительно, прежде всего на основании (1.4) можно доказать индуктивно, что

$$J_{ji}^N = \sum_{M=0}^{N} A_M^N J_{ij}^M , \tag{1.5}$$

где

$$J_{ij}^0 = \delta_{ij} , \quad A_N^N = (-1)^N , \tag{1.6}$$

а точные численные значения остальных коэффициентов A_M^N, $M < N$ здесь не представляют интереса (при надобности для этих коэффициентов можно получить рекуррентные формулы). Тогда, принимая во внимание, что в силу (1.2) и (1.4) $I_{ij}^1 = J_{ij}^1$, на основании (1.2) и (1.5-6) можно доказать индуктивно, что

$$I_{ij}^N = \sum_{M=0}^{N} B_M^N J_{ij}^M , \quad B_N^N = 1 ; \tag{1.7}$$

об остальных коэффициентах B_M^N, $M < N$ можно повторить дословно вышесказанное насчёт A_M^N, $M < N$. Из (1.7) с помощью (1.1), (1.3) и (1.6), получаем

$$C_N = Z_N + \sum_{M=1}^{N-1} B_M^N Z_M + \frac{n}{2} B_0^N . \tag{1.8}$$

Положим, как в /1/, $\nu = [\frac{n}{2}]$ и рассмотрим операторы $C_2, \ldots, C_{2\nu}$ и $Z_2, \ldots, Z_{2\nu}$. Из (1.8) вытекает, что соответствие между первой системой и второй системой операторов взаимно однозначно (впрочем, это утверждение сохраняет свою справедливость и при любом выборе числа ν; что касается операторов

Казимира нечётного порядка C_{2N+1} и Z_{2N+1}, то, как мы установили в /1/, $C_{2N+1} = 0$, $N = 0, 1, \ldots$, так что в силу (1.8) Z_{2N+1} выражается посредством $Z_2, \ldots, Z_{2N}$, $N = 0, 1, \ldots$). Теперь ясно, что вместо того, чтобы исследовать интересующий нас вопрос о базисном характере операторов $C_2, \ldots, C_{2\nu}$, можно исследовать такой же вопрос для операторов $Z_2, \ldots, Z_{2\nu}$. А это более удобно по причине, которая выяснится в дальнейшем.

2.

Обозначим через $A(n)$ алгебру Ли группы $O(n)$. Нетрудно убедиться в том, что $A(n)$ состоит из всех вещественных кососимметричных матриц порядка n. Как известно (см., например, /3/, лекция 9), для отыскания всех операторов Казимира для $O(n)$ достаточно перечислить все решения уравнения

$$P(O\, x\, O^{-1}) = P(x) , \tag{2.1}$$

где $O \in O(n)$, $x \in A(n)$, а $P(x) \equiv P(x_{ij})$ – (искомый) однородный полином от элементов x_{ij} матрицы x; коль скоро найден такой полином $P(x_{ij})$, то формула

$$C = P(I_{ij}) \tag{2.2}$$

(с условием симметричности – по парным индексам (ij)! – на тензор коэффициентов) дает соответствующий оператор Казимира. Сущность этого утверждения в том, что все операторы Казимира для $O(n)$ являются функциями от операторов Казимира типа (2.2).

Далее, можно показать (см. Приложение в конце настоящей работы), что каждый полином $P(x_{ij})$, удовлетворяющий (2.1), может быть разложен по степеням следов $P_1(x_{ij}) = Sp\, x^2, \ldots, P_\nu(x_{ij}) = Sp\, x^{2\nu}$, $\nu = [\frac{n}{2}]$. Следовательно, в силу только что сказанного, все операторы Казимира являются функциями от операторов Казимира $P_1(I_{ij}), \ldots, P_\nu(I_{ij})$. Но так как

$$P_a(x_{ij}) = Sp\, x^{2a} = x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \ldots x_{i_{2a} i_1} , \quad a = 1, \ldots, \nu$$

(суммирование по повторным индексам подразумевается), то

$$P_\alpha(I_{ij}) = I_{i_1 i_2} I_{i_2 i_3} \dots I_{i_{2\alpha} i_1} = 2 Z_{2\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, \nu;$$

последнее равенство вытекает из (1.3-4).

Итак, все операторы Казимира для $O(n)$ являются функциями от $Z_2, \dots, Z_{2\nu}$ или – в силу результатов предыдущего пункта–от $C_2, \dots, C_{2\nu}$.

3.

Как известно, (см., например,[1,2]), неприводимые представления группы $O(n)$ задаются набором чисел $m_1, \dots, m_\nu$, $\nu = [\frac{n}{2}]$ (удовлетворяющих некоторым условиям). В[1] мы доказали, что в любом таком представлении собственные значения операторов $C_2, \dots, C_{2\nu}$ выражаются однозначно посредством $m_1, \dots, m_\nu$. Точнее, там было установлено существование полиномов $f_\alpha(x_1, \dots, x_\nu), \alpha = 1, \dots, \nu$ таких, что

$$C_{2\alpha} = f_\alpha(m_1, \dots, m_\nu), \quad \alpha = 1, \dots, \nu \tag{3.1}$$

(здесь и в дальнейшем собственные значения произвольного оператора Казимира обозначаются тем же символом, которым обозначается и сам этот оператор).

В[4] рассмотрена другая система операторов Казимира[x] $K_2, \dots, K_{2\nu}$ для группы $O(n)$ и также установлено существование полиномов $g_\alpha(x_1, \dots, x_\nu), \alpha = 1, \dots, \nu$ таких, что

$$K_{2\alpha} = g_\alpha(m_1, \dots, m_\nu), \quad \alpha = 1, \dots, \nu. \tag{3.2}$$

[x] Мы изменили их обозначения во избежание недоразумений. По этой же причине вместо C_n' (см.[4]) мы будем писать K_ν' (заметим при этом, что через n в[4] обозначается ν).

Кроме того, $K_2, \dots, K_{2\nu}$ являются "полиномами" от генераторов X_j^i, использованных в[4], которые со своей стороны выражаются линейно посредством генераторов I_{ij}, так что $K_2, \dots, K_{2\nu}$ являются "полиномами" и от I_{ij}. Сопоставляя этот факт с результатами предыдущего пункта и рассуждая как в[3] (лекция 9), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: существуют полиномы $h_\alpha(y_1, \dots, y_\nu), \alpha = 1, \dots, \nu$ такие, что

$$K_{2\alpha} = h_\alpha(C_2, \dots, C_{2\nu}), \quad \alpha = 1, \dots, \nu$$

и, следовательно, согласно (3.1-2),

$$g_\alpha(m_1, \dots, m_\nu) = h_\alpha[f_1(m_1, \dots, m_\nu), \dots, f_\nu(m_1, \dots, m_\nu)], \quad \alpha = 1, \dots, \nu.$$

Но поскольку мы имеем дело с полиномами, а $m_1, \dots, m_\nu$ принимают "довольно много" значений (см., например,[2]), то имеют место и тождества

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_\nu) \equiv h_\alpha[f_1(x_1, \dots, x_\nu), \dots, f_\nu(x_1, \dots, x_\nu)], \quad \alpha = 1, \dots, \nu.$$

Из этого вытекает, что

$$\det \left\| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\beta} \right\| \equiv \det \left\| \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_\beta} \right\|_{y=f} \det \left\| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|.$$

И так как якобиан[x] $\det \left\| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|$ не аннулируется[4], хотя бы для некоторых значений $m_1, \dots, m_\nu$, то якобиан $\det \left\| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|$ также не аннулируется для этих значений своих аргументов. Значит, в силу (3.1) операторы $C_2, \dots, C_{2\nu}$ независимы между собой. Иными словами, они образуют базис в совокупности всех операторов Казимира для $O(n)$ (которые, как было установлено в пункте 2, являются функциями от $C_2, \dots, C_{2\nu}$).

Соответствие между $m_1, \dots, m_\nu$ и $K_2, \dots, K_{2\nu}$, задаваемое соотношениями (3.2), не всегда обратимо. Однако, как было указано в[4], если при n чётном заменить $K_{2\nu}$ на некоторый другой оператор Казимира K_ν' (при n нечётном ничего не надо изменять), то во всех случаях мы будем иметь систему операторов Казимира, которые определяют однозначно $m_1, \dots, m_\nu$ (точнее, в любом неприводимом представлении группы $O(n)$ система собственных значений этих операторов определяет однозначно $m_1, \dots, m_\nu$; напом-

[x] В духе работы[4] следовало бы обозначить указанный якобиан через $\frac{D(K_2, \dots, K_{2\nu})}{D(m_1, \dots, m_\nu)}$. Это формальное (и неточное) обозначение связано с (3.2).

ним, что в таком представлении каждый оператор Казимира имеет одно единственное собственное значение). С другой стороны, из вышесказанного ясно, что эти операторы являются функциями от $C_2, \ldots, C_{2\nu}$, так что такими функциями являются и $m_1, \ldots, m_\nu$. Этот факт и соотношения (3.1) позволяют нам заключить, что соответствие между $m_1, \ldots, m_\nu$ и $C_2, \ldots, C_{2\nu}$ взаимно однозначно[x/].

Теперь ясно, что $C_2, \ldots, C_{2\nu}$ задают неприводимые представления группы $O(n)$. В пространстве каждого такого представления существует базис, векторы которого "занумерованы" соответствующими схемами Гельфанда-Цетлина [/2/]. Верхняя строка этих схем совпадает с набором чисел $m_1, \ldots, m_\nu$. Нетрудно убедиться в том, что вторая сверху строка совпадает с таким же набором чисел для той группы $O(n-1) \subset O(n)$, алгебра Ли которой порождается генераторами I_{ij}, $j<i\leq n-1$ (ср. [/5/]); для каждой из остальных строк справедливо аналогичное утверждение. Следовательно, согласно вышесказанному, строки схем Гельфанда-Цетлина находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторыми системами операторов Казимира для указанных групп $O(n) \supset O(n-1) \supset \ldots$, так что совокупность всех последних операторов определяет вполне однозначно базис в пространстве любого неприводимого представления группы $O(n)$. Точнее, эта совокупность состоит из первых $[\frac{n}{2}]$ для $O(n)$, первых $[\frac{n-1}{2}]$ для $O(n-1)$ и т.д. операторов Казимира чётного порядка; как нетрудно показать, все они коммутируют между собой (в силу определения цепочки групп $O(n) \supset O(n-1) \supset \ldots$ или же в силу того, что они одновременно диагонализуются). Другими словами, они образуют полный набор к[оммутирующих] операторов, которые диагонализуются в указанном базисе.

[x/] Следовательно, в отличие от [/4/] здесь нет никакой надобности модифицировать систему операторов Казимира – мы имеем в виду модификацию типа вышеупомянутой, при которой $K_{2\nu}$ заменяется на K'_ν; это объясняется фактически тем, что в отличие от $K_2, \ldots, K_{2\nu}$, которые зависят лишь от чётных степеней $m_1, \ldots, m_\nu$ (см. [/4/]), $C_2, \ldots, C_{2\nu}$ зависят и от их нечётных степеней, как можно установить при помощи формул, полученных в [/1/]. Итак, налицо новое преимущество (в [/1/] мы уже указывали на некоторые другие преимущества) рассматриваемых нами операторов Казимира перед теми, которые рассматривались в [/4/].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы докажем утверждение, которое было лишь сформулировано в пункте [/2/]. Рассуждения проведем подобно тому, как это было сделано в [/3/] (лекция 9) для группы $GL(n)$.

Напомним, что $A(n)$ состоит из всех вещественных кососимметрических матриц порядка n. Как известно (см. [/6/], гл. XI, §5), если $x \in A(n)$, то существует матрица $O \in O(n)$ такая, что

$$x = O^{-1}\phi O, \tag{1}$$

где ϕ – квазидиагональная матрица порядка n, у которой все ненулевые[x/] диагональные блоки являются двухрядными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ -\phi_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \phi_\nu \\ -\phi_\nu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nu = [\frac{n}{2}],$$

а $\phi_1, \ldots, \phi_\nu$ – вещественные числа. Следовательно, в силу (2.1)

$$P(x) = P(\phi) = P(\phi_1, \ldots, \phi_\nu). \tag{2}$$

Поменяем теперь местами ϕ_α и ϕ_β, $\alpha \neq \beta$ в матрице ϕ; новополученную матрицу обозначим через ψ. Используя свойства так называемых элементарных операций (см. [/6/], гл. VI §1), нетрудно показать, что

$$\phi = \tilde{O}^{-1}\psi\tilde{O}, \qquad \tilde{O} \in O(n).$$

[x/] Имеются в виду те диагональные блоки, которые не аннулируются тождественно (фактически, когда n чётно, тождественно аннулирующихся блоков не существует, а когда n нечётно, существует только один и при этом, очевидно, его порядок равен единице). Конечно, в частных случаях некоторые из чисел $\phi_1, \ldots, \phi_\nu$ могут быть нулями, т.е. количество ненулевых блоков может быть меньше ν.

Следовательно, согласно (2.1), $P(\phi) = P(\psi)$ (мы, конечно, приняли во внимание, что $\phi ; \psi \in A(n)$). С другой стороны, $P(\psi)$ отличается от $P(\phi)$ лишь тем, что ϕ_α и ϕ_β поменялись местами. Значит, полином $P(\phi) \equiv P(\phi_1,...,\phi_\nu)$ неизменен при перестановках аргументов $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$. Аналогичным образом можно доказать, что он неизменен и при замене $\varphi_a \to -\varphi_a$, т.е. при замене

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_a \\ -\phi_a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -\phi_a \\ \phi_a & 0 \end{pmatrix},$$

которая также сводится к элементарным операциям.

Как нетрудно показать, любой полином $P(\phi) \equiv P(\phi_1, \ldots, \phi_\nu)$ с указанными двумя свойствами может быть разложен по степеням следующих элементарных степенных сумм:

$$\sum_{a=1}^{\nu} \phi_a^2, \ldots, \sum_{a=1}^{\nu} \phi_a^{2\nu}.$$

Но в силу опеределения матрицы ϕ имеем

$$Sp\phi^2 = -2 \sum_{a=1}^{\nu} \phi_a^2, \ldots, Sp\,\phi^{2\nu} = 2(-1)^\nu \sum_{a=1}^{\nu} \phi_a^{2\nu}.$$

Наконец, согласно (1),

$$Sp\,x^2 = Sp\,\phi^2, \ldots, Sp\,x^{2\nu} = Sp\,\phi^{2\nu}$$

и, согласно (2), $P(x) = P(\phi)$. Из всего только что сказанного вытекает, что полином $P(x)$ может быть разложен по степеням следов $Sp\,x^2, \ldots, Sp\,x^{2\nu}$, а именно это утверждение и требовалось доказать.

Литература

1. А.В.Николов. Препринт ОИЯИ Р2-3334, Дубна, 1967.
2. И.М.Гельфанд, М.Л.Цетлин. ДАН СССР 71, 1017 (1950).
3. Д.П.Желобенко. Лекции по теории групп Ли. Изд. ОИЯИ Дубна, 1965.
4. А.М.Переломов, В.С.Попов. ЯФ 3, 1127 (1966).
5. А.В.Николов, К.В.Рерих. Препринт ОИЯИ 5-2962. Дубна, 1966.
6. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц, Изд. Наука, Москва, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1967 года.