ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3535

А.В. Николов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СЕРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ O(p, 1)

1967г.

P2 - 3535

А.В. Николов

О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СЕРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ $O(p, 1)$

Направлено в журнал Известия АН Болгарии

В работе [1] была получена дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли $A(p,q)$ группы $O(p,q)$; для этой цели были введены схемы, подобные схемам Гельфанда-Цетлина [2]. Здесь мы получим полунепрерывную серию унитарных представлений алгебры $A(p,1)$ при помощи схем такого же типа - подобно тому, как это сделано Гельфандом и Граевым для алгебры Ли группы $U(p,1)$ в [3].

1. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений работы [1]. Там была установлена справедливость утверждения, из которого вытекает, что если в гильбертовом пространстве H с ортонормальным базисом заданы операторы $I_{k+1,k}$, $k=1,\ldots,p$ (точнее, задано их действие на базисные векторы) такие, что

$$[I_{k+1,k}, I_{h+1,h}]=0,\quad k\neq h\pm1,$$

$$[[A^{\nu}_{k}, B^{\nu}_{k}], A^{\nu}_{k}] = B^{\nu}_{k},\ \nu=1,2,\ A^{1}_{k}=B^{2}_{k}=I_{k+1,k},\ A^{2}_{k}=B^{1}_{k}=I_{k+2,k+1}, \tag{1}$$

$$\overset{+}{I}_{k+1,k}=-I_{k+1,k},\ k<p,\quad \overset{+}{I}_{p+1,p}=I_{p+1,p},$$

то тем самым в H задано унитарное представление алгебры $A(p,1)$.

Рассмотрим сначала случай, когда число p нечетное, т.е. $p=2k+1$, где k – целое. Введем схемы $m=(m_{ij})$, подобные схемам в случае алгебры $A(p+1)=A(p+1,0)$ (см. /1,2/), отличающиеся от них лишь небольшой модификацией, о которой будет идти речь ниже. Положим, как и в /1/,

$$l_{2s+1,j}=m_{2s+1,j}+s-j+1,\quad l_{2s,j}=m_{2s,j}+s-j+1. \qquad (2)$$

Все неравенства для чисел m_{ij}, в которых не участвует m_{pl}, имеющие место в случае алгебры $A(p+1)$, сохраним и здесь; число же $m_{pl}=l_{pl}-k$ зададим по-новому. Возможны 2 случая:

а) $l_{pl}=i\lambda$, где λ – любое вещественное число, а остальные числа l_{ij} являются, как и в /1/, все целыми или все полуцелыми;

б) $l_{pl}=l$, l вещественно и $0<l<1$, $l_{p,k+1}=0$, а остальные все целые.

Ясно, что имеется счётное множество допустимых схем с фиксированной верхней строкой (а сама эта строка состоит из k "дискретных" параметров и одного "непрерывного" параметра; отсюда и происходит название <u>полунепрерывная</u> серия).

Введем гильбертово пространство, в котором эти схемы "нумеруют" векторы ортонормального базиса и сохраним (по форме) все соответствующие обозначения, которые использовались в /1/. Зададим операторы $I_{k+1,k}$ теми же формулами, что и в случае алгебры $A(p+1)$ (см. /1/). Проверка соотношений (1) проводится аналогично соответствующей проверке в /1/. Отметим, что коэффициенты (см.[1]) $B(l_{2k,j})$ теперь чисто мнимые, а коэффициент C_{2k} либо чисто мнимый (когда $l_{pl}=i\lambda$), либо равен нулю (когда $l_{p,k+1}=0$) и поэтому затруднения, о которых шла речь в /1/, здесь не возникают.

Итак, мы имеем дело с (бесконечномерными) унитарными представлениями алгебры $A(p,1)$. Можно показать, что при $l=1$ соответствующее представление приводимо и распадается на 2 неприводимых представления – они задаются дополнительными условиями $l_{p-1,k}=1$ и $l_{p-1,k}>1$; все остальные представления неприводимы. Заметим, что условие $0<l\leq 1$ можно было бы заменить условием $0<|l|\leq 1$, однако, представления, соответствующие $+l$ и $-l$, оказались бы эквивалентными. По такой же причине исключается из рассмотрения и случай $l=0$, так как он совпадает со случаем $\lambda=0$.

Пусть теперь число p чётное, т.е. $p=2k$, где k – целое. Опять вводим схемы $m=(m_{ij})$ и определяем l_{ij} с помощью (2). Дальше следует повторить вышесформулированные условия, модифицируя при этом а) и б) следующим образом:

а) $l_{pl}=\frac{1}{2}+i\lambda$, где λ – любое неотрицательное число, а остальные числа l_{ij} являются все целыми или все полуцелыми;

б) $l_{pl}=l$, $\frac{1}{2}<l\leq 1$, а остальные все целые.

Аналогично устанавливаем, что эти условия определяют (бесконечномерные) унитарные представления алгебры $A(p,1)$, которые неприводимы, за исключением двух случаев, а именно: когда $\lambda=0$, т.е. $l_{pl}=\frac{1}{2}$, а остальные числа l_{ij} также полуцелые и когда $l=1$; в первом (втором) случае соответствующее представление распадается на 2 (на 3) неприводимых представления, которые задаются дополнительными условиями $l_{p-1,k}\geq\frac{1}{2}$ и $l_{p-1,k}<-\frac{1}{2}$ ($l_{p-1,k}\geq 1$, $l_{p-1,k}=0$ и $l_{p-1,k}\leq -1$). Заметим, что неравенства $0\leq\lambda<\infty$ и $\frac{1}{2}<l\leq 1$ можно было бы заменить неравенствами $-\infty<\lambda<+\infty$ и $0\leq l\leq 1$, $l\neq\frac{1}{2}$, соответственно, однако, опять имела бы место эквивалентность – как для $+\lambda$ и $-\lambda$, так и для l и $1-l$. Случай же $l=\frac{1}{2}$ исключается из рассмотрения, так как он совпадает со случаем $\lambda=0$.

2. В качестве примера рассмотрим полунепрерывную серию алгебры Ли $A(3,1)$ группы Лоренца $O(3,1)$. Полагая $l_1=l_{31}$ и $l_0=l_{32}$ и принимая во внимание вышеизложенную общую теорию, приходим к заключению, что представления из полунепрерывной серии алгебры $A(3,1)$ определяются парой чисел (l_0,l_1), причём либо l_1 – чисто мнимое, а l_0 – любое целое или полуцелое, либо $l_0=0$, а l_1 вещественно и $|l_1|\leq 1$. Все эти представления бесконечномерны и унитарны. Все они неприводимы, за исключением случая $|l_1|=1$, а в этом случае соответствующее представление распадается на два неприводимых представления, одно из которых бесконечномерно, а другое одномерно (согласно (2), $m_{21}=l_{21}-1$, так что в силу вышесказанного последнее представление характеризуется соотношениями $m_{21}=0$ и $m_{11}=0$; заметим, что при $p>3$ конечномерных представлений не содержится в рассматриваемых полунепрерывных сериях). Полученные результаты для $A(3,1)$ полностью совпадают с соответствующими результатами в /4/. Кроме того, в /4/ было установлено, что перечисленными представлениями исчерпываются все унитарные неприводимые представления алгебры $A(3,1)$.

Л и т е р а т у р а

1. А.В.Николов, Препринт ОИЯИ Р5-3140, Дубна, 1967.
2. И.М.Гельфанд, М.Л.Цетлин, ДАН СССР 71, 1017 (1950).
3. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Изв. АН СССР, серия математическая, 29, 1329 (1965).
4. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца, их применения. М., Физматгиз, 1958.

Рукопись поступила издательский отдел
9 октября 1967 года.