ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3485

Р.А. Асанов

ОБ ОДНОМ ВНЕШНЕМ РЕШЕНИИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

Р2 - 3485

Р.А. Асанов

ОБ ОДНОМ ВНЕШНЕМ РЕШЕНИИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В работах И. Фишера[1] и Г. Таубера[2] приведены точные статические решения уравнений Эйнштейна и Максвелла для электрического и магнитного диполей. В цилиндрически-симметричной метрике

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\, d\xi^\mu d\xi^\nu = -e^{2\alpha}[(d\rho)^2 + (dz)^2] - e^{2\beta}\rho^2(d\varphi) + e^{2\gamma}(dt)^2 \qquad (1)$$

эти решения имеют вид:

$$e^{\alpha} = e^{\beta} = e^{-\gamma} = 1 - p\sqrt{\kappa}\,\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad (2)$$

здесь κ -ньютонова гравитационная постоянная, p -момент соответствующего диполя ($p > 0$), $r^2 = \rho^2 + z^2$. Компоненты метрического тензора для этих решений имеют, очевидно, особенность на некоторой замкнутой кривой, проходящей через источник. Поэтому приведенные решения могли бы рассматриваться как внешние во всяком случае для расстояний от источника, больших чем $\sqrt{p\sqrt{\kappa}}$. Заметим, однако, что объект, описываемый внешним решением (2), имел бы с точки зрения обычных представлений довольно странные свойства. Во-первых, полная масса такого объекта[x] равняется нулю, так как величина $g_{11} = -e^{2\alpha}$ при $r \to \infty$ не имеет в разложении "шварцшильдовского" члена $\approx \frac{\kappa m}{r}$. Во-вторых, гравитационный потенциал U такого объекта, определяемый в ньютоновом приближении по формуле $g_{44} = e^{2\gamma} \cong 1 + 2U$, имеет в данном случае вид $U = p\sqrt{\kappa}\,\frac{\cos\theta}{r^2} + \ldots$, то-есть меняет знак при переходе из верхнего полупространства в нижнее. Такой вид потенциала приводил бы для

[x] По формулам для псевдотензоров Ландау-Лифшица или Меллера.

незаряженного пробного тела к притяжению в нижнем полупространстве и к отталкиванию в верхнем, не говоря уже о не-ньютоновом характере сил, именно $\approx \frac{1}{r^3}$.

Такое положение наводит на мысль попытаться ввести в решение (2) "забытые" шварцшильдовские члены. В каком-то смысле это соответствовало бы введению в решение (2) общего решения однородных уравнений Эйнштейна (без правой части). Аналогия поверхностна, поскольку уравнения нелинейны, однако она позволит найти первые члены разложения просто из известного решения Шварцшильда в изотропных координатах /3/.

Уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}$ в цилиндрически-симметричном статическом случае при наличии электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\Delta\alpha + \Delta\beta + \frac{2\beta_1}{\rho} + \beta_1^2 + \beta_2^2 = -\kappa e^{-2\gamma}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\kappa e^{2\gamma}}{\rho^2}(\chi_1^2 + \chi_2^2), \quad (3)$$

$$\Delta\alpha + \Delta\gamma + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \kappa e^{-2\gamma}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\kappa e^{2\gamma}}{\rho^2}(\chi_1^2 + \chi_2^2), \quad (4)$$

$$\beta_{11} + \gamma_{11} + \frac{1}{\rho}(2\beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1) + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2) =$$
$$= \kappa e^{-2\gamma}(\phi_1^2 - \phi_2^2) - \frac{\kappa e^{2\gamma}}{\rho^2}(\chi_1^2 - \chi_2^2), \quad (5)$$

$$\beta_{22} + \gamma_{22} + \frac{\gamma_1 + \alpha_1}{\rho} + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) - \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2) =$$
$$= -\kappa e^{-2\gamma}(\phi_1^2 - \phi_2^2) + \frac{\kappa e^{2\gamma}}{\rho^2}(\chi_1^2 - \chi_2^2), \quad (6)$$

$$\beta_{12} + \gamma_{12} - \alpha_2\left(\frac{1}{\rho} + \beta_1 + \gamma_1\right) - \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) + \beta_2\left(\frac{1}{\rho} + \beta_1\right) + \gamma_1\gamma_2 =$$
$$= 2\kappa e^{-2\gamma}\phi_1\phi_2 - 2\kappa e^{2\gamma}\rho^{-2}\chi_1\chi_2, \quad (7)$$

здесь ϕ –скалярный потенциал электрического поля ($\phi = -A_4$, $\phi_1 = F_{41}$, $\phi_2 = F_{42}$), χ есть компонента A_3 поля ($\chi_1 = F_{13}$, $\chi_2 = F_{23}$), индексы 1 и 2 внизу означают соответственно производные по ρ и z, а $\Delta = \partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2$.

Уравнение Максвелла при наличии только электрического поля (вне источников)

$$\Delta\phi + \left(\frac{1}{\rho} + \beta_1 - \gamma_1\right)\phi_1 + (\beta_2 - \gamma_2)\phi_2 = 0, \tag{8}$$

при наличии только магнитного поля

$$\Delta\chi - \left(\frac{1}{\rho} + \beta_1 - \gamma_1\right)\chi_1 - (\beta_2 - \gamma_2)\chi_2 = 0. \tag{9}$$

Сумма уравнений (5) и (6) приводит к уравнению $\Delta(\rho\, e^{\beta+\gamma}) = 0$, что давало бы возможность ввести[4] координаты, в которых число произвольных функций в интервале (1) сокращается до двух ($\gamma = -\beta$). Но это приводило бы в нашей задаче к некоторому усложнению вида самих функций α и β.

Будем искать разложение внешнего решения задачи о диполе в ряд по величинам $\frac{\kappa m}{r}$ и $\frac{\sqrt{p\sqrt{\kappa}}}{r}$, считая их малыми. Рассмотрим вначале случай электрического диполя ($\chi = 0$). Потенциал электрического поля на больших расстояниях должен иметь вид $\phi = p\frac{z}{r^3} + \ldots = p\frac{\cos\theta}{r^2} + \ldots$ Внешнее решение уравнений Эйнштейна ищем в виде:

$$\alpha = \frac{\kappa m}{r} - \frac{(\kappa m)^2}{4r^2} + \frac{(\kappa m)^3}{12 r^3} + \frac{1}{r^4}\left[\kappa p^2 A(\theta) - \frac{(\kappa m)^4}{32}\right] + \ldots \tag{10}$$

$$\beta = \frac{\kappa m}{r} - \frac{(\kappa m)^2}{4r^2} + \frac{(\kappa m)^3}{12 r^3} + \frac{1}{r^4}\left[\kappa p^2 B(\theta) - \frac{(\kappa m)^4}{32}\right] + \ldots \tag{11}$$

$$\gamma = -\frac{\kappa m}{r} - \frac{(\kappa m)^3}{12 r^3} + \frac{\kappa p^2 D(\theta)}{r^4} + \ldots \tag{12}$$

Таким образом, эти разложения при $p = 0$ переходят в разложения решения Шварцшильда. Для определения величин $A(\theta)$, $B(\theta)$ и $D(\theta)$ из (3)-(7) получим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, общее решение которой при условии конечности выражений имеет вид

$$A = -\frac{1}{32}(3 + 4\cos 2\theta + 9\cos 4\theta) + C_1(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 3C_2\cos 4\theta, \tag{13}$$

$$B = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta) + C_1(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + C_2(1 + 2\cos 2\theta), \qquad (14)$$

$$D = \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta) - C_1(5\cos^3\theta - 3\cos\theta), \qquad (15)$$

здесь C_1 и C_2 –постоянные. Легко проверить, что это решение удовлетворяет уравнению Максвелла (8) и условию эвклидовости метрики на оси z (т.е. требованию, чтобы отношение длины бесконечно малой окружности к диаметру равнялось π). Следовательно, постоянные C_1 и C_2 должны быть определены при построении полного (внешнего и внутреннего) решения.

Для случая магнитного диполя $(\phi = 0)$ потенциал на больших расстояниях должен иметь вид $\chi = p\dfrac{\rho^2}{r^3} + \ldots = p\dfrac{\sin^2\theta}{r} + \ldots$ Можно видеть, что в рассматриваемом приближении правые части уравнений Эйнштейна (3)-(7) будут в точности совпадать с уравнениями для случая электрического диполя. Поэтому гравитационное поле магнитного диполя точно так же описывается найденным решением (10)-(15). Различие возникнет не ближе, чем в членах $\approx 1/r^5$ в выражениях для α , β и γ .

Из уравнений Максвелла (8) и (9) следует, что несколько первых членов разложения (именно, четыре члена) для потенциалов ϕ и χ будут определяться чисто шварцшильдовым интервалом. Соответствующее решение для случая магнитного диполя приведено (в сферических координатах) в статье /5/.

Разумеется, наличие внешнего решения еще не отвечает на вопрос о возможности существования статического диполя в рамках общей теории относительности. Для этого следовало бы построить полное (внешнее и внутреннее) решение без особенностей. Электрический или магнитный диполь, описываемый полученным внешним решением (10)-(15), обладал бы вполне "обычными" свойствами. Полная масса его равна m , а гравитационное поле на больших расстояниях имеет ньютонов характер. Об этом говорит присутствие в решении "шварцшильдова" члена $\dfrac{\kappa m}{r}$.

Приношу благодарность проф. М.А.Маркову за ценные обсуждения.

Литература:

1. И.З.Фишер, ЖЭТФ, 20, 956 (1950).
2. G.E.Tauber, Canad.Journ. of Phys. 35, 477 (1957).
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, "Наука", 1967г.
4. Дж.Синг, Общая теория относительности, ИИЛ, 1963.
5. В.Л.Гинзбург, Л.М.Озерной, ЖЭТФ 47, 1030 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 августа 1967 года.