ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3407

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В ЛЕСТНИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ U (6,6)

1967г.

P2 - 3407

А.В. Николов

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В ЛЕСТНИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ U (6,6)

1. Соотношения для масс барионов и мезонов, основывающиеся на их классификации по лестничным представлениям группы $U(6,6)$, были получены впервые в [6]. Точнее, в качестве барионного и мезонного представлений там рассматривались соответственно "лестницы"

$$(56,1)+(126,6^*)+(252,21^*)+\dots$$

$$(1,1)+(6,6^*)+(21,21^*)+(56,56^*)+\dots \tag{1}$$

и в случае первой из них разложение обрывалось на члене (56,1), а в случае второй - на членах (1,1) и $(6,6^*)$. Полученные таким образом результаты для масс согласовывались с опытом, за немногими исключениями, удовлетворительно. Однако, если, например, в случае мезонов принять во внимание и член $(21,21^*)$, то получается значительное расхождение с опытом - относительные ошибки достигают 200-300 % (соответствующие подсчёты, при которых использовались результаты работы [6], были сделаны недавно).

Здесь барионы и мезоны (в состоянии покоя) также описываются представлениями (1), но массовый оператор определяется по другому. Это приводит к массовым формулам, которые хорошо согласуются с опытом - как в случае барионов, так и в случае мезонов (имеются в виду мезоны со спин-чётностью 0^-, 1^- и 2^+ в приближении членов $(6,6^*)$ и $(21,21^*)$ мезонной "лестницы").

2. Лестничные представления группы $U(6,6)$ рассматривались, например, в [1-6]. Здесь мы будем придерживаться терминологии и обозначений работы [6]. Напомним, что там через $a^*_{\alpha i}$, $b^*_{\beta j}$ и $a_{\alpha i}$, $b_{\beta j}$, $\alpha,\beta=1,2$, $i,j=1,2,3$

обозначены соответствующие операторы рождения и уничтожения, а через ϕ и $\bar{\phi}$ –двенадцатикомпонентные операторные спиноры

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} a^*_{\alpha i} \\ \\ -b_{\beta j} \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} a_{\alpha i} \\ \\ b^*_{\beta j} \end{pmatrix} \tag{2}$$

С помощью последних образуются (эрмитовы) генераторы M^{μ}_{s}, N^{μ}_{s}, V^{μ}_{s}, A^{μ}_{s}, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $s = 0, \ldots, 8$ лестничной серии представлений группы $U(6,6)$.

Каждое представление из этой серии определяется заданием барионного числа B. Положим:

$$\Gamma^{\mu} = \bar{\phi}\gamma^{\mu} \times 1_3 \phi , \tag{3}$$

где γ^{μ} – матрицы Дирака, а 1_{ν} – единичная матрица порядка ν. Нетрудно показать, что используемый в /6/ оператор n (суммарное число верхних и нижних индексов членов "лестницы") удовлетворяет соотношению

$$n = \Gamma^{0} - 6 . \tag{4}$$

Постулируем теперь, что барионы и мезоны образуют бесконечные мультиплеты, которые описываются соответственно уравнениями

$$(\Gamma^{\mu} p_{\mu} - M)\Psi = 0, \quad [(\Gamma^{\mu} p_{\mu})^2 - M]\Phi = 0 , \tag{5}$$

где $p = (p_0 , \vec{p})$ – обычный 4 –импульс, а M – лоренц-инвариантный оператор, действующий в пространстве лестничной серии, о котором еще будет идти речь ниже; разумеется, поля Ψ и Φ зависят от p и от "лестничных" индексов; очевидно, мы имеем дело с аналогами уравнений Дирака и Клейна-Гордона (в импульсном представлении). В системе покоя $p = (m , \vec{0})$, где m – масса частицы из соотвествующего мультиплета. Обозначая поля Ψ и Φ в этой системе через Ψ_0 и Φ_0 и принимая во внимание (4), из (5) находим

$$\frac{1}{n+6} M\Psi_0 = m\Psi_0 , \quad \frac{1}{(n+6)^2} M\Phi_0 = m^2\Phi_0 , \tag{6}$$

так как оператор M лоренц-инвариантен и $n \geq 0$. Следовательно, можно рассматривать $(n+6)^{-1} M$ как оператор массы в случае барионов и $(n+6)^{-2} M$ как оператор квадрата массы в случае мезонов; конечно, M зависит от барионного числа B.

Постулируем еще, что Ψ_0 является вектором из первой "лестницы" (1), а Φ_0 – из второй. Точнее, будем определять (ср. /6-9/) физические частицы в состоянии покоя как собственные векторы операторов, среди которых находятся $B, P, Y, \vec{I}^2, \vec{J}^2, \vec{N}^2, \vec{S}^2$, где P – оператор чётности, а $\vec{J}, \vec{N}, \vec{S}$ – операторы спина, нормального спина и странного спина соответственно (мы используем ставшие уже общепринятыми обозначения и названия из работы /10/).

Уточним теперь свойства оператора M. Постулируем, что M диагонален по физическим частицам; значит, он должен коммутировать с $B, P, Y, \vec{I}^2, \vec{J}^2, \vec{N}^2, \vec{S}^2$. Для простоты будем пренебрегать изотопическим расщеплением (тем более, что оно пока отсутствует и в экспериментальных данных о высших резонансах), т.е. будем считать M $SU(2)_I$ -инвариантом. Ясно, что все вышеприведенные требования относительно M сводятся к следующему: оператор M должен быть $L \times SU(2)_I \times U(1)_Y$ -инвариантным (ср. /9/), где L – полная группа Лоренца (включающая и пространственные отражения); наряду с этим он должен удовлетворять соотношениям

$$[M, \vec{N}^2] = 0, \quad [M, \vec{S}^2] = 0. \tag{7}$$

Наконец, потребуем по аналогии с /6-10/, чтобы M являлся полиномом второй степени от генераторов M^μ_s, N^μ_s, V^μ_s, A^μ_s исходной группы $U(6,6)$.

Соотношения (7) мы учтем позже, а пока займемся следствиями, вытекающими из остальных требований. Наиболее общее выражение, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид

$$M = \sum_{s=0,6} a_s M^0_s + \sum_{s,t=0,6} \Big[b_{st} M^0_s M^0_t + c_{st} N^0_s N^0_t + d_{st} \sum_{k=1}^{3} (M^k_s M^k_t - N^k_s N^k_t) + \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu} (e_{st} V^\mu_s V^\mu_t + f_{st} A^\mu_s A^\mu_t) \Big], \tag{8}$$

где коэффициенты $a, b, \ldots, f$, согласно вышесказанному, зависят от B (это выражение автоматически является эрмитовым оператором, если считать, как обычно, коэффициенты вещественными). Здесь, конечно, имеются в виду генераторы лестничного представления группы $U(6,6)$. Как мы отметили выше, эти генераторы образуются с помощью операторов рождения и уничтожения (см. /6/). Их подстановка в (8) приводит в конечном итоге к следующему результату:

$$M = M' + \delta M + \delta M^{*}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
M' = {} & a_0 + aY + bY^2 + c_\Delta \Big(\sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\alpha i} a_{\beta j} b_{\beta j} + \sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big) + \\
& + d_\Delta \Big(\vec{J}^{\,2}_\Delta - 2 \sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\beta i} a_{\alpha j} b_{\beta j} - 4 \sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big) + \qquad (10) \\
& + e_\Delta \Big[\vec{J}^{\,2}_\Delta + 4 \sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\alpha j} a_{\beta i} b_{\beta j} - \sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\alpha i} a_{\beta j} b_{\beta j} - 2 \Big(\sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big)^2 - (2\epsilon_\Delta Y + 1) \sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big] + \\
& + f_\Delta \Big[2 \sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\beta i} a_{\alpha j} b_{\beta j} - \sum_{i,j\in\Delta} a^{*}_{\alpha i} b^{*}_{\alpha i} a_{\beta j} b_{\beta j} - 2 \Big(\sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big)^2 - (2\epsilon_\Delta Y + 4\nu_\Delta - 3) \sum_{i\in\Delta} b^{*}_{\alpha i} b_{\alpha i} \Big]
\end{aligned}$$

и

$$\delta M = -\frac{1}{2}\left(c_{\Lambda} + e_{\Lambda} + f_{\Delta}\right) \sum_{i,j\in\Delta} a_{\alpha i}\, a_{\beta j}\, b_{\alpha i}\, b_{\beta j} + \left(d_{\Lambda} + f_{\Delta}\right) \sum_{i,j\in\Delta} a_{\alpha i}\, a_{\beta j}\, b_{\beta i}\, b_{\alpha j}; \qquad (11)$$

здесь подразумевается суммирование по α, β и по Δ -символу , который обозначает одну из трех совокупностей чисел (1,2,3), (1,2), (3); кроме того,

$$\epsilon_{(1,2,3)} = 0,\ \epsilon_{(1,2)} = 1,\ \epsilon_{(3)} = -1,$$

$$\nu_{(1,2,3)} = 3,\ \nu_{(1,2)} = 2,\ \nu_{(3)} = 1,$$

$$\vec{J}_{(1,2,3)} = \vec{J},\ \vec{J}_{(1,2)} = \vec{N},\ \vec{J}_{(3)} = \vec{S}.$$

Заметим, что уменьшение числа констант в (10) по сравнению с (8) происходит за счёт членов, содержащих B^2 и BY (новые коэффициенты, конечно, опять зависят от B).

3. Обрывая, как и в /6/, барионную "лестницу" на первом члене (56,1) и используя тождества

$$\vec{N}^2 = \vec{I}^2,\ \vec{S}^2 = \frac{1}{4} Y^2 - Y + \frac{3}{4}, \qquad (13)$$

которые справедливы в этом представлении, из (10-12) получаем, что матричные элементы оператора δM равны нулю, а оператор M' имеет такие же матричные элементы, что и оператор

$$M_{(56)} = \alpha + \beta Y + \gamma Y^2 + \delta \vec{I}^2 + \epsilon \vec{J}^2 \qquad (14)$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ - новые коэффициенты). В силу (13) и (14) соотношения (7) автоматически удовлетворяются в рассматриваемом приближении. Из (6), (9) и (14) вытекают следующие массовые формулы (символ частицы здесь отождествляется с ее массой; в скобках указано относительное экспериментальное отклонение левой части каждого равенства от правой):

$$\begin{aligned} \Omega + 3\Sigma^* &= \Delta + 3\Xi && (0{,}02\%), \\ \Sigma^* + \Xi &= \Xi^* + \Sigma && (0{,}8\%), \\ 2\Delta + 3\Lambda &= 2\Sigma^* + 2N + \Sigma && (0{,}4\%). \end{aligned} \qquad (15)$$

4. Как уже отмечалось, здесь мы рассмотрим мезоны со спин-чётностью 0^-, 1^- и 2^+ в приближении членов $(6,6^*)$ и $(21,21^*)$ мезонной "лестницы". Ниже приводится таблица, содержащая квантовые числа указанных 2^+-мезонов.

$B=0$

$J^P=2^+$

	Y	I	N	S
η'	0	0	2	0
η''	0	0	0	2
η'''	0	0	1	1
π'	0	1	1	1
π''	0	1	2	0
K'	± 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
K''	± 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Опять матричные элементы оператора δM равны нулю, а из (7) вытекает, что

$$c_{(1,2,3)} = d_{(1,2,3)} + e_{(1,2,3)}, \quad f_{(1,2,3)} = d_{(1,2,3)}. \tag{16}$$

Кроме того, в силу равенства частиц и античастиц должно выполняться соотношение

$$2a = c_{(1,2)} - c_{(3)} - 4d_{(1,2)} + 4d_{(3)} - e_{(1,2)} + e_{(3)} - 5f_{(1,2)} + f_{(3)}. \tag{17}$$

Из (6), (9-12) и (16-17) вытекают следующие массовые формулы (символ частицы на этот раз отождествляется с квадратом ее массы, умноженным на $(n+6)^2$, причём $n=2$ для $(6,6^*)$ и $n=4$ для $(21,21^*)$):

$$
\begin{gathered}
12K' + 19\omega + \rho + 2K + 2\eta = 12\eta' + 18\phi + 2K^* + 3\pi + \chi , \\
2K' + \rho + \phi = \pi' + \pi'' + 2K^* , \\
2K' + \omega + \phi = \eta'' + \eta''' + 2K^* , \\
\eta' + \rho = \pi'' + \omega , \\
2K' + \pi' = 2K'' + \eta'' .
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Заметим, что число этих формул на 2 единицы больше разности числа частиц и числа независимых коэффициентов в (10), так как ранг матрицы соответствующей системы линейных уравнений на 2 единицы меньше порядка тех миноров указанной матрицы, у которых размеры максимальны.

Если отождествить η', η'', π', K' с хорошо известными резонансами f, f', A_2, $K_V(1411)$, соответственно, то относительное экспериментальное отклонение левой части от правой первых двух формул (18) будет соответственно 0,03% и 0,5%, т.е. эти формулы удовлетворяются в пределах экспериментальной точности. Что же касается остальных трех соотношений из (18), то в них участвуют пока что не обнаруженные на опыте мезоны η''', π'', K''. На основании указанных соотношений для масс этих частиц получаются соответственно значения 1316, 1249, 1277 Мэв.

Отметим, что имеющая здесь место точность лучше точности массовых формул, полученных другим способом в /11/, в которых участвуют мезоны f, f', A_2, K_V. При этом в /11/ высшие резонансы рассматриваются самостоятельно, в то время как здесь все частицы с заданным B рассматриваются единым образом.

В заключение автор выражает благодарность И.Т.Тодорову за полезные дискуссии и советы.

Литература

1. B. Kurşunoğlu. Two Massless States of Matter, University of Miami preprint, Coral Gables (1964).

2. B. Kurşunoğlu. Symmetry and Strong Interaction. In: Symmetry Principles at High-Energy, Proceedings of the Second Coral Gables Conference, San-Francisco and London, 1965, p. 160–175.

3. Y. Dothan, M. Gell-Mann and Y. Neeman. Phys. Lett., 17, 148 (1965).
4. A. Salam and J. Strathdee. Proc. Roy. Soc., A292, 314 (1966).
5. I. T. Todorov, Preprint IC/66/71, Trieste (1966).
6. D. T. Stoyanov and I. T. Todorov, Ann. Phys., 41, 349 (1967).
7. А.В.Николов, И.Т.Тодоров. ЯФ, 4, 1052 (1966).
8. А.В.Николов, И.Т.Тодоров, Д.Г.Факиров, ЯФ, 4, 1214 (1966).
9. V. G. Kadyševskij, R. M. Muradjan, Ja. A. Smorodinskij, Fortschr. d. Phys., 13, 599 (1965).
10. M. A. B. Bég and V. Singh. Phys. Rev. Lett., 13, 418 (1964).
11. D. Robaschik and A. Uhlmann. Preprint JINR, E-2557, Dubna, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1967 года.