ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3392

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Э.А. Тагиров, Е.Д. Федюнькин, Н.А. Черников

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

1967г

P2 - 3392

Э.А. Тагиров, Е.Д. Федюнькин, Н.А. Черников

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

§ 1. Введение

Пространственно-временные отношения в квантовой теории поля задаются обычно геометрией Минковского, и вследствие этого в ней нет места для удовлетворительного учета гравитации. Представляется желательным поэтому приспособить аппарат квантовой теории поля к общему случаю псевдориманова пространственно-временного мира. Последний выступает в этой проблеме глобально, так что нельзя ограничиться рассмотрением одних только его локально-метрических свойств. В этом отношении замечательным примером является пространство де Ситтера, ибо оно отличается от пространства Минковского не только кривизной, но и топологией.

В данной работе мы преследуем главным образом методические цели и поэтому ограничимся рассмотрением скалярного поля в двумерном пространстве де Ситтера. Распространение полученных здесь результатов на четырехмерный случай не представляет существенных затруднений.

Двумерное пространство де Ситтера изображается сферой (однополостным гиперболоидом) в трехмерном пространстве Минковского:

$$x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 = -1. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что группа изометрических преобразований пространства де Ситтера изоморфна однородной группе Лоренца объемлющего пространства Минковского.

В пространстве де Ситтера удобно ввести координаты θ, ξ:

$$x^0 = \operatorname{tg}\theta, \quad x^1 = \frac{\cos\xi}{\cos\theta}, \quad x^2 = \frac{\sin\xi}{\cos\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \xi < 2\pi. \qquad (2)$$

В этих координатах метрическая форма этого пространства равна:

$$ds^2 = \frac{d\theta^2 - d\xi^2}{\mathrm{Cos}^2\theta}. \tag{3}$$

§ 2. Основные уравнения

Уравнение движения для скалярного поля ϕ с интегралом действия

$$S = \frac{1}{2}\int \left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - m^2\phi^2\right)\sqrt{-g}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{m^2}{\mathrm{Cos}^2\theta}\phi^2\right\} d\theta\, d\xi \tag{4}$$

имеет вид:

$$\Box\phi + m^2\phi = \mathrm{Cos}^2\theta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + m^2\phi = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее мы пользуемся системой единиц, в которой $c = h = 1$. Уравнение (5) эквивалентно уравнениям Гамильтона:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial H}{\delta\pi} = \pi, \quad \frac{\partial\pi}{\partial\theta} = -\frac{\delta H}{\delta\phi} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \frac{m^2}{\mathrm{Cos}^2\theta}\phi,$$

где

$$H(\theta,\phi,\pi) = \int_0^{2\pi}\mathcal{H}\, d\xi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{\pi^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{m^2}{\mathrm{Cos}^2\theta}\phi^2\right\}. \tag{6}$$

Квантовую теорию поля мы будем рассматривать в шредингеровском представлении. В качестве вектора состояния выберем зависящий от θ функционал $\Psi(\theta;\phi)$ от поля $\phi(\xi)$. Оператор поля $\hat{\phi}(\xi)$ и оператор канонического импульса поля $\hat{\pi}(\xi)$ представляются при этом в виде:

$$\hat{\phi}(\xi)=\phi(\xi)\,,\quad \hat{\pi}(\xi)=-i\,\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\,. \tag{7}$$

Для определения зависимости вектора состояния от θ нужно решить уравнение Шредингера

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=H(\theta,\phi,\pi)\,\Psi \tag{8}$$

с гамильтонианом (6).

Разложим поле $\phi(\xi)$ в ряд Фурье:

$$\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\overset{2}{q}_0+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=1}^{\infty}\{\overset{1}{q}_s\,\mathrm{Sin}\;s\xi+\overset{2}{q}_s\,\mathrm{Cos}\;s\xi\}\,. \tag{9}$$

Последовательностью коэффициентов $\overset{2}{q}_0,\overset{1}{q}_1,\overset{2}{q}_1,\dots,\overset{\sigma}{q}_s,\dots$ поле $\phi(\xi)$ полностью определяется. Ввиду этого $\Psi(\theta;\phi)$ является функцией этой последовательности, т.е.

$$\Psi(\theta;\phi)=\Psi(\theta;\overset{2}{q}_0,\overset{1}{q}_1,\overset{2}{q}_1,\dots,\overset{\sigma}{q}_s,\dots)=\Psi(\theta;\vec{q})\,. \tag{10}$$

В этом представлении, очевидно:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(\xi)&=-i\sum_{s,\sigma}\frac{\delta\,\overset{\sigma}{q}_s}{\delta\phi(\xi)}\,\frac{\partial}{\partial\,\overset{\sigma}{q}_s}=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\overset{2}{\hat{p}}_0+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=1}^{\infty}(\overset{1}{\hat{p}}_s\,\mathrm{Sin}\;s\xi+\overset{2}{\hat{p}}_s\,\mathrm{Cos}\;s\xi)\,,\end{aligned} \tag{11}$$

где $\overset{\sigma}{\hat{p}}=-i\,\dfrac{\partial}{\partial\,\overset{\sigma}{q}_s}$. В уравнении (8) переменные q разделяются, так как

$$H=\overset{2}{H}_0+\sum_{s=1}^{\infty}(\overset{1}{H}_s+\overset{2}{H}_s)\,, \tag{12}$$

где

$$\overset{\sigma}{H}_s=\frac{1}{2}\{\overset{\sigma}{\hat{p}}_s\,\overset{\sigma}{\hat{p}}_s+(s^2+\frac{m^2}{\mathrm{Cos}^2\,\theta})\,\overset{\sigma}{\hat{q}}_s\,\overset{\sigma}{\hat{q}}_s\}\,. \tag{13}$$

Поэтому $\Psi(\theta;\vec{q})$ можно искать в виде произведения:

$$\Psi(\theta;\vec{q}) = \overset{2}{\Psi}_0(\theta,\overset{2}{q}_0)\prod_{s=1}^{\infty}\overset{1}{\Psi}_s(\theta,\overset{1}{q}_s)\overset{2}{\Psi}_s(\theta,\overset{2}{q}_s), \tag{14}$$

где $\overset{\sigma}{\Psi}_s$ должно подчиняться уравнению

$$i\frac{\partial\overset{\sigma}{\Psi}_s}{\partial\theta} = \overset{\sigma}{H}_s\overset{\sigma}{\Psi}_s . \tag{15}$$

§ 3. Решение одномерной задачи

Таким образом, наша задача сводится к решению уравнения вида

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(s^2 + \frac{m^2}{\operatorname{Cos}^2\theta}\right)x^2\right\}\Psi . \tag{16}$$

Ему можно удовлетворить функцией гауссова типа

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{u(\theta)}}\, e^{-\frac{1}{2}a(\theta)x^2}, \tag{17}$$

если $a(\theta), u(\theta)$ подчинить уравнениям:

$$i\frac{da}{d\theta} - a^2 + s^2 + \frac{m^2}{\operatorname{Cos}^2\theta} = 0,$$

$$(18)$$

$$i\frac{du}{d\theta} + au = 0.$$

Из (18) следует

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(s^2 + \frac{m^2}{\operatorname{Cos}^2\theta}\right)u = 0. \tag{19}$$

Заметим, что функция $\phi = u(\theta)e^{\pm is\xi}$ удовлетворяет классическому уравнению поля (5).

Пара линейно-независимых решений уравнения (19) выражается через гипергеометрическую функцию:

$$u_s^{\pm}(\theta) = 2^{\rho}\,\frac{\sqrt{\Gamma(s+\rho)\,\Gamma(s-\rho+1)}}{s!}\,\mathrm{Cos}^{\rho}\theta\, e^{\pm i(s+\rho)\theta}\; F(\rho+s,\rho;s+1;-e^{\pm 2i\theta}), \tag{20a}$$

или, иначе,

$$u_s^{\pm}(\theta) = \frac{\sqrt{\Gamma(s+\rho)\,\Gamma(s-\rho+1)}}{s!}\,e^{\pm is\theta}\; F\left(\rho,\,1-\rho;\,s+1;\,\frac{1\pm i\,\mathrm{tg}\,\theta}{2}\right), \tag{20б}$$

где $\rho = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4m^2}\right).$

Перечислим следующие свойства этих функций:

1) при замене ρ на $1-\rho$ функции (20) не меняются;

2) они комплексно-сопряжены друг другу: $(u_s^{\pm})^* = u_s^{\mp}$;

3) $u_s^{+}(\theta) = u_s^{-}(-\theta)$;

4) определитель Вронского равен $W(u_s^{+},u_s^{-}) = u_s^{+}\dot{u}_s^{-} - \dot{u}_s^{+}u_s^{-} = -2i$ (точка означает дифференцирование по θ);

5) $\dot{u}_s^{\pm} = s\,\mathrm{tg}\,\theta\, u_s^{\pm} \pm i\,\frac{\sqrt{s(s+1)+m^2}}{\mathrm{Cos}\,\theta}\,u_{s+1}^{\pm}$;

6) $\sqrt{s(s+1)+m^2}\,u_{s+1}^{\pm} - \sqrt{s(s-1)+m^2}\,u_{s-1}^{\pm} = \pm 2is\,\mathrm{Sin}\,\theta\, u_s^{\pm}$;

7) $u_{s+1}^{+}u_s^{-} + u_s^{+}u_{s+1}^{-} = \frac{2\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\sqrt{s(s+1)+m^2}}$;

8) $0 < |u_s^{\pm}(\theta)| < \infty$ в рассматриваемом интервале $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Эти свойства следуют из известных соотношений для гипергеометрических функций.

Мы должны представить в (17)

$$u = u_s = \lambda_s^{+}u_s^{+} + \lambda_s^{-}u_s^{-};$$

$$a = a_s = -i\,\frac{\dot{u}_s}{u_s} = -is\,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{\sqrt{s(s+1)+m^2}}{u_s\,\mathrm{Cos}\,\theta}\left(\lambda_s^{+}u_{s+1}^{+} - \lambda_s^{-}u_{s+1}^{-}\right), \tag{21}$$

где $\lambda^{\pm}_s$ –некоторые константы. Квадрат модуля волновой функции (17) равен:

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{|u_s|} \exp\{ \frac{|\lambda^-_s|^2 - |\lambda^+_s|^2}{|u_s|^2} x^2 \}. \qquad (22)$$

Таким образом, для того, чтобы функция Ψ была нормируема, необходимо выполнить условие $|\lambda^+_s| > |\lambda^-_s|$. При этом в силу свойства 8 функций (20) $0 < |u_s| < \infty$. Без ограничения общности можно положить $\lambda^+_s = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda_s|^2}}$, $\lambda^-_s = \frac{\lambda_s}{\sqrt{1-|\lambda_s|^2}}$, где $|\lambda_s| < 1$.

Другие решения уравнения (16) будем искать в виде:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(\theta, x) = \chi(\theta, x)\,\Psi(\theta, x),$$

откуда для функции $\chi(\theta, x)$ получаем

$$i\frac{\partial\chi}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + a_s x \frac{\partial\chi}{\partial x}. \qquad (23)$$

Последнее уравнение можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого введем новую переменную $y = f(\theta)\, x$, где $f(\theta)$ – некоторая функция. В новых переменных уравнение (23) записывается в следующей форме:

$$i\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{i\dot{f}}{f}\, y\frac{\partial\chi}{\partial y} = -\frac{1}{2} f^2 \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + a_s y\frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

Отсюда видно, что переменные θ, y разделяются, если $f(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$i\dot{f} - a_s f + f^3 = 0. \qquad (24)$$

Полагая $\chi = G(\theta)\, H(y)$ и учитывая (21), получим

$$G = -n\, G \frac{d}{d\theta}\ln(f u),$$

$$\frac{d^2}{dy^2} H(y) - 2y\, H(y) = -2n\, H(y),$$

где n –константа разделения. Функция $\tilde{\tilde{\Psi}}(\theta, x)$ имеет норму лишь при $n = 0,1,2,3, \ldots$. Таким образом, мы получили решения уравнения (23) в виде:

$$\chi = \chi\ (\theta, x) = (f u_s)^{-n} H_n (f x),$$

где H_n –полином Эрмита.

Нам осталось найти f. Общее решение уравнения (24) связано с любым его частным решением условием $f^{-2} - f_0^{-2} = c u$, где $c = \mathrm{const}$. Взяв мнимую часть уравнения Риккати (19), находим частное решение $f_0 = \sqrt{\mathrm{Re}\, a}$. Для того, чтобы при $n > 0$ $\tilde{\tilde{\Psi}}$ была ортогональна к Ψ, необходимо потребовать $c = 0$.

Нормируя Ψ на 1, получаем ортонормированный в каждый момент времени θ базис в пространстве решений уравнения (16):

$$\Psi_{(n)} = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!)^{1/2}}\ \frac{H_n(\sqrt{\mathrm{Re}\, a_s}\, x)}{(u_s \sqrt{\mathrm{Re}\, a_s})^n}\ \frac{e^{-\frac{1}{2} a_s x^2}}{\sqrt{u_s}}. \tag{25}$$

Введем операторы $z^{\pm}$, которые действуют в этом базисе следующим образом:

$$z^+ \Psi_{(n)} = \sqrt{n+1}\, \Psi_{(n+1)},\quad z^- \Psi_{(n)} = \sqrt{n}\, \Psi_{(n-1)}. \tag{26}$$

Пользуясь известными соотношениями для полиномов Эрмита

$$\frac{d}{dy} H_n(y) = 2n H_{n-1}(y),$$

$$H_{n+1}(y) = 2y\, H\ (y) - 2n\, H_{n-1}(y),$$

находим выражение $z^{\pm}$ через операторы $\hat{x}$, $\hat{p}$:

$$z^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\, u_s^*(\theta) \hat{p} - \dot{u}_s^*(\theta) \hat{x}\,], \tag{27}$$

$$z^- = \frac{i}{\sqrt{2}} [\, u_s(\theta) \hat{p} - \dot{u}_s(\theta) \hat{x}\,],$$

так как в x –представлении $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}$. Обращая равенства (27), имеем;

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\, u_s(\theta)\, z^+ + u_s^*(\theta)\, z^- \,],$$
$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\, \dot{u}_s(\theta)\, z^+ + \dot{u}_s^*(\theta)\, z^- \,]. \tag{28}$$

Легко убедиться, что

$$[\, z^-, z^+ \,] = 1, \quad z^- \Psi_{(0)} = 0. \tag{29}$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_{(n)} \Psi_n$, где $C_{(n)}$ –произвольные постоянные, или в соответствии с (26)

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{(n)}}{\sqrt{n!}} (z^+)^n \Psi_0 . \tag{30}$$

Таким образом, мы фактически пришли к представлению Фока /1/.

В заключение параграфа заметим, что для уравнения Шредингера вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \{ -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega^2(t)\Psi \}$$

известна функция Грина. Она получается аналогичным методом /2/. Представление Фока для системы с произвольным числом степеней свободы и гамильтонианом в виде зависящей от времени квадратичной формы от координат и импульсов построено в работе /3/.

§ 4. Представление Фока

Результаты предыдущего параграфа позволяют найти общее решение уравнения Шредингера (8). Для этого рассмотрим формальное произведение (14), где

$$\overset{\sigma}{\Psi}_s(\theta, \overset{\sigma}{q}_s) = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{u_s}} \exp\{ -\frac{1}{2} a_s \overset{\sigma}{q}_s \overset{\sigma}{q}_s \}, \tag{31}$$

и обозначим его Π_0. Оно удовлетворяет уравнению Шредингера (8), так как (31) удовлетворяет уравнению (15). Норма вектора состояния Π_0, очевидно, равна 1. Аналогично (27) введем операторы $\overset{\sigma\pm}{z}_s$:

$$z_s^{\sigma+} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[u_s^*(\theta)\, \hat{p}^{\sigma}_s - \dot{u}_s^*(\theta)\, \hat{q}^{\sigma}_s \right],$$

$$z_s^{\sigma-} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[u_s(\theta)\, \hat{p}^{\sigma}_s - \dot{u}_s(\theta)\, \hat{q}^{\sigma}_s \right]. \tag{32}$$

Тогда произвольное решение Ψ уравнения (8) можно представить в виде:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\, C^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n}\, z_s^{\sigma_{1+}}\, z_s^{\sigma_{2+}} \ldots z_s^{\sigma_{n+}}\, \Pi_0 \tag{33}$$

$(s_i = 0, 1, 2, \ldots;\ \sigma_i = 2$ при $s_i = 0,\ \sigma_i = 1, 2$ при $s_i > 0)$,

где коэффициенты $C^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n}$ не зависят от θ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Очевидно, коэффициенты $C^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n}$ образуют столбец Фока /1/.

Перейдем теперь к представлению Гейзенберга. Вектор состояния, соответствующий Π_0, в этом представлении обозначим $|0>$, а вектор состояния, соответствующий (33), обозначим Φ. Очевидно,

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\, C^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n}\, z_{s_1}^{\sigma_{1+}}\, z_{s_2}^{\sigma_{2+}} \ldots z_{s_n}^{\sigma_{n+}}\, |0>. \tag{34}$$

В представлении Гейзенберга операторы $z_s^{\sigma\pm}$ не зависят от θ, а операторы $\hat{q}^{\sigma}_s$, $\hat{p}^{\sigma}_s$ согласно (32) зависят от θ следующим образом:

$$\hat{q}^{\sigma}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_s(\theta)\, z_s^{\sigma+} + u_s^*(\theta)\, z_s^{\sigma-} \right],$$

$$\hat{p}^{\sigma}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\dot{u}_s(\theta)\, z_s^{\sigma+} + \dot{u}_s^*(\theta)\, z_s^{\sigma-} \right]. \tag{35}$$

Из (35) и (9) находим оператор поля

$$\hat{\phi}(\theta,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[u_0(\theta)\overset{2}{z}{}^{+}_{0} + u^{*}_{0}(\theta)\overset{2}{z}{}^{-}_{0} \right] + \tag{36}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=1}^{\infty}\left[u_s(\theta)\left(\overset{1}{z}{}^{+}_{s}\,\mathrm{Sin}\,s\xi + \overset{2}{z}{}^{+}_{s}\,\mathrm{Cos}\,s\xi\right) + u^{*}_{s}(\theta)\left(\overset{1}{z}{}^{-}_{s}\,\mathrm{Sin}\,s\xi + \overset{2}{z}{}^{-}_{s}\,\mathrm{Cos}\,s\xi\right)\right].$$

Помимо (34) и (36), для дальнейшего достаточно знать следующие соотношения:

$$[\overset{\sigma}{z}{}^{+}_{s}, \overset{\sigma'}{z}{}^{-}_{s'}] = 0, \quad [\overset{\sigma}{z}{}^{-}_{s}, \overset{\sigma'}{z}{}^{-}_{s'}] = 0, \quad [\overset{\sigma}{z}{}^{-}_{s}, \overset{\sigma'}{z}{}^{+}_{s'}] = \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{ss'}, \tag{37}$$

$$\overset{\sigma}{z}{}^{-}_{s}\;|0>, \quad <0|0> = 1.$$

Удобно ввести новые операторы рождения и уничтожения, связанные с операторами $\overset{\sigma}{z}{}^{\pm}_{s}$ соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} b^{\pm}_{s} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overset{2}{z}{}^{\pm}_{s} - i\,\overset{1}{z}{}^{\pm}_{s}\right] \\ b^{\pm}_{-s} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overset{2}{z}{}^{\pm}_{s} + i\,\overset{1}{z}{}^{\pm}_{s}\right] \end{aligned}\right\} \quad s > 0, \tag{38}$$

$$b^{\pm}_{0} = \overset{2}{z}{}^{\pm}_{0}.$$

Очевидно,

$$[b^{+}_{s}, b^{+}_{s'}] = 0, \quad [b^{-}_{s}, b^{-}_{s'}] = 0, \tag{39}$$

$$[b^{-}_{s}, b^{+}_{s'}] = \delta_{ss'}, \quad b^{-}_{s}\;|0>$$

С помощью операторов $b^{\pm}_{s}$ строится представление Фока совершенно так же, как это было сделано раньше с помощью операторов $\overset{\sigma}{z}{}^{\pm}_{s}$. Произвольный вектор состояния может быть представлен в виде:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} C^{s_1 \ldots s_n} b^+_{s_1} \ldots b^+_{s_n} |0> . \tag{40}$$

По повторяющимся индексам здесь подразумевается суммирование от $-\infty$ до $+\infty$. Оператор поля $\hat{\phi}$ записывается через операторы следующим образом:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [\, b^+_s u_s(\theta) e^{is\xi} + b^-_s u^*_s(\theta) de^{-is\xi}] . \tag{41}$$

Здесь положено $u_s = u_{|s|}$.

Заметим еще, что вектор состояния (40) представится в виде функционала Фока /1/, если положить $|0> = 1$, $b^+_s = b_s$, $b^-_s = \frac{\partial}{\partial b_s}$.

§ 5. Перестановочная функция

Формула (36) позволяет найти перестановочную функцию:

$$D(\theta_1, \xi_1; \theta_2, \xi_2) = i[\, \hat{\phi}(\theta_1, \xi_1),\ \hat{\phi}(\theta_2, \xi_2)] . \tag{42}$$

Учитывая (37), находим:

$$D = \frac{1}{2} \Lambda_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \Lambda_s \operatorname{Cos} s(\xi_1 - \xi_2) , \tag{43}$$

где

$$\Lambda_s = \frac{i}{2\pi} \begin{vmatrix} u^-_s(\theta_1) & u^-_s(\theta_2) \\ u^+_s(\theta_1) & u^+_s(\theta_2) \end{vmatrix}$$

Очевидно, разность $\xi_0 = \xi_1 - \xi_2$ меняется в пределах от $-\pi$ до π. В тех же пределах меняется и разность $\theta_0 = \theta_1 - \theta_2$.

Можно показать, что

$$\Delta_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} P_{-\rho}(\gamma) \operatorname{Cos} s\,\xi_0 \, d\xi_0 \,, \tag{44}$$

где $P_{-\rho}(\gamma) = F(\rho, 1-\rho; 1; \frac{1-\gamma}{2})$ — функция Лежандра,

$$\gamma = \operatorname{Ch} \Gamma = \frac{\operatorname{Cos}\xi_0 - \operatorname{Sin}\theta_1 \operatorname{Sin}\theta_2}{\operatorname{Cos}\theta_1 \operatorname{Cos}\theta_2} \,. \tag{45}$$

Γ – геодезическое расстояние между точками (θ_1, ξ_1) и (θ_2, ξ_2). Для этого достаточно убедиться, что интеграл (40) как функция от θ_1 удовлетворяет тому же уравнению и тем же начальным данным, что и Δ_s, то есть уравнению (19) и условиям $\Delta_s|_{\theta_1=\theta_2} = 0$, $\frac{\partial \Delta_s}{\partial \Delta_1}|_{\theta_1=\theta_2} = \frac{1}{\pi}$. При дифференцировании интеграла (44) по θ надо воспользоваться равенствами:

$$(\gamma^2 - 1) \frac{d^2 P_{-\rho}}{d\gamma^2} + 2\gamma \frac{dP_{-\rho}}{d\gamma} + m^2 P_{-\rho} = 0 \,, \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi_0^2} = \frac{2\gamma}{\operatorname{Cos}^2 \theta_1} \,, \quad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_0}\right)^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\operatorname{Cos}^2 \theta_1} \,, \tag{47}$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_0}\right)_{\xi_0 = \theta_0} = 0 \,. \tag{48}$$

Из (44) следует, что тригонометрический ряд (39) является рядом Фурье функции

$$D(\theta_1, \xi_1; \theta_2, \xi_2) = \frac{1}{2} \epsilon(\theta_0, \xi_0) P_{-\rho}(\gamma) \,, \tag{49}$$

где

$$\epsilon(\theta_0, \xi_0) = \begin{cases} 1, \text{ если } & |\theta_0| > |\xi_0| \quad \theta_0 > 0; \\ -1, \text{ если } & |\theta_0| > |\xi_0| \quad \theta_0 < 0; \\ 0, \text{ если } & |\theta_0| < |\xi_0| \,. \end{cases}$$

Отметим, что $P_{-\rho}(\gamma)$ является функцией Римана уравнения (5). Перестановочная функция в виде (49) была получена в работе /4/ для произвольного двумерного псевдориманова пространства.

§ 6. Сохраняющиеся величины

Представление Фока, введенное в предыдущем параграфе, характеризуется произвольными константами λ_s , $|\lambda_s|<1$. В частности, этими константами характеризуется состояние вакуумного типа $|0>$. Этот произвол можно в значительной степени устранить, потребовав выполнения условий:

$$P_{(ab)}\,|0> = 0\,, \tag{50}$$

где $P_{(ab)}$ –операторы сохраняющихся величин.

Как известно, интеграл по пространственно-подобной гиперповерхности Σ вида

$$P = \int_{\Sigma} \zeta^{\mu}\, T_{\mu\nu}\, d\sigma^{\nu}\,, \tag{51}$$

где $T_{\mu\nu}$ –тензор энергии-импульса, а ζ^{μ} –векторное поле Киллинга, не зависит от выбора Σ и называется сохраняющейся величиной. Векторное поле Киллинга порождает бесконечно малое движение пространства и задает инфинитезимальный оператор группы движений $X = \zeta^{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. В двумерном пространстве де Ситтера имеется три линейно независимых оператора $X_{(ab)} = -X_{(ba)}$ $(a, b = 0,1,2)$, отвечающих вращениям в плоскостях ab объемлющего пространства Минковского, а именно:

$$\begin{aligned}
X_{(01)} &= \cos\theta \cos\xi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta \sin\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\,,\\
X_{(02)} &= \cos\theta \sin\xi \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta \cos\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\,,\\
X_{(21)} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\,.
\end{aligned} \tag{52}$$

В качестве Σ можно выбрать кривую $\theta = 0$. Тензор энергии-импульса скалярного поля равен:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^{\nu}} - \wp\, g_{\mu\nu}, \tag{53}$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{ g^{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^{\beta}} - m^2 \hat{\phi}^2 \}.$$

После несложных выкладок находим, что оператор $P_{(21)}$ не зависит явно от λ_s и равен:

$$P_{(21)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} s\, b_s^{+} b_s^{-}. \tag{54}$$

Здесь надо отметить следующее обстоятельство. Строго говоря, мы должны были бы снабдить λ_s верхним индексом σ. Тогда условие $P_{(21)}|0> = 0$ привело бы к равенству $\overset{1}{\lambda}_s = \overset{2}{\lambda}_s$. Более того, как показано в /3/, в выборе решений вакуумного типа имеется еще больший произвол. Но то же условие $P_{(21)}|0> = 0$ снимает этот дополнительный произвол и приводит к методу разделения переменных, использованному здесь при решении уравнения (8).

Условие $P_{(01)}|0> = 0$, как нетрудно показать, дает $\lambda_s = (-1)^s \lambda_0$. При этом

$$P_{(01)} + i P_{(02)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + s(s+1)}\; b_s^{+} b_{s+1}^{-},$$
$$P_{(01)} - i P_{(02)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2 + s(s+1)}\; b_{s+1}^{+} b_s^{-}. \tag{55}$$

Легко убедиться, что оператор д'Аламбера в двумерном пространстве де Ситтера можно записать в виде:

$$\Box = \cos^2\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \right) = X_{(01)}^2 + X_{(02)}^2 - X_{(12)}^2. \tag{56}$$

Поэтому оператор

$$P^2 = P^2_{(01)} + P^2_{(02)} - P^2_{(12)}, \tag{57}$$

естественно назвать оператором квадрата массы. Он коммутирует со всеми $P_{(ab)}$. Нетрудно показать, что

$$P^2 = :P^2: + m^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} b^+_s b^-_s , \tag{58}$$

где двоеточия, как обычно, означают нормальное произведение. Очевидно, выполняются важные равенства

$$P^2 |0> = 0, \quad P^2 b^+_s |0> = m^2 b^+_s |0>. \tag{59}$$

Вследствие условия $P_{(01)} | 0 > = 0$ мы получили

$$\lambda_s = (-1)^s \lambda_0 . \tag{60}$$

Произвол в выборе константы λ_0 можно значительно уменьшить, если учесть, что пространство де Ситтера наряду с непрерывными изометрическими преобразованиями допускает дискретные. При пространственных отражениях $\overset{2}{q}_s \to \overset{2}{q}_s$, $\overset{1}{q}_s \to -\overset{1}{q}_s$, поэтому шредингеровский вектор состояния Π_0 не меняется. При отражении времени потребуем, чтобы выполнялось $\Pi^*_0(-\theta) = \Pi_0(\theta)$. Это дает $\lambda^*_s = \lambda_s$. С учетом этого требования λ_0 –действительное число, заключенное в пределах

$$-1 < \lambda_0 < 1. \tag{61}$$

Обратим внимание на то, что при условиях (60), (61) функции u_s, u^*_s так же, как и u^+_s, u^-_s, обладают свойствами 1–8, перечисленными в § 3.

§ 7. Обсуждение результатов

Итак, мы получили состояния вакуумного типа $|0>$, одночастичного типа $b^+_s|0>$, двухчастичного типа $b^+_{s_1} b^+_{s_2}|0>$ и т.д. Мы удовлетворили формальным требованиям, которые предъявляются к вакууму и n –частичным состояниям, и построили квантовую теорию свободного скалярного поля в двумерном пространстве де Ситтера. Наличие кривизны и неевклидовой топологии не нарушает основных принципов квантовой теории поля. Несмотря на нестационарность метрики, рассмотренные здесь частицы не рождаются и не уничтожаются. Вследствие того, что пространство $\theta = \text{const}$ компактно, множество линейно независимых операторов рождения частиц счетно.

Интересно то обстоятельство, что формальным требованиям квантовой теории поля мы удовлетворили, не фиксируя значение константы λ_0. Приведем некоторые соображения в пользу того, что λ_0 следует положить равной нулю.

Прежде всего, скалярное произведение

$$< 0 | b^-_s \hat{\phi} | 0 > = \frac{u_s(\theta)\, e^{is\xi}}{2\sqrt{\pi}} \tag{62}$$

удовлетворяет уравнению (5). Оно, очевидно, должно играть роль волновой функции частицы с моментом s. Общая волновая функция частицы выразится в виде:

$$\phi^+(\theta, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_s(\theta)\, e^{is\xi}\, b^+_s , \tag{63}$$

если b^+_s рассматривать как c –числа. Норма волновой функции (63) определяется оператором числа частиц $N = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} b^+_s b^-_s$, если b^+_s и b^-_s считать комплексно сопряженными c –числами. Оператор числа частиц можно записать как интеграл

$$N = (\phi^+, \phi^+) = i \int_0^{2\pi} \left\{ \phi^+ \frac{\partial \phi^-}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi^+}{\partial \theta} \phi^- \right\} d\xi ,$$

или, в более общем виде,

$$N = (\phi^+, \phi^+) = \int_\Sigma j^\alpha_\alpha d\sigma^\alpha \; , \; j_\alpha = i \{ \phi^+ \frac{\partial \phi^-}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \phi^+}{\partial x^\alpha} \phi^- \} .$$

j_α –вектор тока, ϕ^- –эрмитовски сопряженный с ϕ^+ оператор. Эти выражения дают квадрат нормы волновой функции (63), если ϕ^+ и ϕ^- считать комплексно сопряженными c –числами. В частности, норма волновой функции (62) равна единице и две такие функции с различными s ортогональны. Скалярное произведение определяется скалярным квадратом по общему правилу и равняется

$$(\phi^+_1, \phi^+_2) = i \int_\Sigma \{ \phi^+_1 \frac{\partial \phi^-_2}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \phi^+_1}{\partial x^\alpha} \phi^- \} d\sigma^\alpha .$$

Потребуем, чтобы волновая функция (62) описывала движение частицы в "будущее". Известно, что понимается под этим в классической механике: импульс частицы p_α должен быть направлен в "верхнюю" половину светового конуса, т.е. $p_0 > 0$, $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = m^2 > 0$. При больших значениях квантового числа движение частицы становится квазиклассическим и фаза волновой функции (62) должна перейти в функцию Гамильтона–Якоби σ. Производные $\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}$ составляют классический импульс частицы p_α. Таким образом, при больших s фаза волновой функции (62) должна удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} > 0 \; , \quad \mathrm{Cos}^2 \theta [(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta})^2 - (\frac{\partial \sigma}{\partial \xi})^2] = m^2 . \tag{64}$$

Докажем, что это выполняется только, если $\lambda_s \to 0$ при $|s| \to \infty$. Имеем:

$$\sigma = \frac{1}{2i} \ln \frac{u}{u^*} + s\xi ,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \mathrm{Re}\; a = \frac{1}{|u|^2} , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = s .$$

Очевидно, первое из условий (64) выполняется при любых λ_s, по модулю меньших единицы. Из (20б) следует, что в квазиклассическом приближении

$$u_s^{\pm}(\theta) = \frac{e^{\pm i|s|\theta}}{\sqrt{|s|}},$$

и, значит,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = |s| \frac{1 - |\lambda_s|^2}{1 + |\lambda_s|^2 + 2|\lambda_s| \operatorname{Cos}(2|s|\theta - \mu_s)},$$

где
$$\lambda_s = \lambda_{-s}^{*}, \lambda_s = |\lambda_s| e^{i\mu_s} .$$

Согласно второму из условий (64) при всех θ должно выполняться

$$\frac{1 - |\lambda_s|^2}{1 + |\lambda_s|^2 + 2|\lambda_s| \operatorname{Cos}(2|s|\theta - \mu_s)} \geq 1,$$

что возможно только в случае $\lambda_s = 0$.

Мы доказали, что $\lim\limits_{|s|\to\infty} \lambda_s = 0$. Согласно (60) отсюда следует, что все $\lambda_s = 0$. Отметим, что этот результат мы получили не предполагая заранее, что λ_0 вещественна.

Убедимся теперь, что условия (64) выполняются при $\lambda_s = 0$. Следующие члены асимптотического разложения по $\frac{1}{s}$ дают

$$u_s^{\pm}(\theta) = \frac{e^{\pm i|s|\theta}}{\sqrt{|s|}} [\, 1 \pm \frac{i m^2}{2|s|} \operatorname{tg}\theta - \frac{m^2}{4s^2 \operatorname{Cos}^2\theta} - \frac{m^4 \operatorname{tg}^2\theta}{8s^2} \,],$$

и, значит, в том же порядке разложения

$$|u_s^{+}|^2 = \frac{1}{|s|} [\, 1 - \frac{m^2}{2s^2 \operatorname{Cos}^2\theta} \,].$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{1}{|u^+|^4} = s^2 [\, 1 + \frac{m^2}{s^2 \operatorname{Cos}^2\theta} \,] = s^2 + \frac{m^2}{\operatorname{Cos}^2\theta},$$

в чем и следовало убедиться.

Литература

1. В.А. Фок. Работы по квантовой теории поля. Изд. ЛГУ, 1957.
2. И.И. Гольдман, В.Д. Кривченков. Сб. задач по квантовой механике. ГИТТЛ, М., 1957.
3. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ, Р2-3223, Дубна, 1967.
4. Э.А. Тагиров, Н.А. Черников. ДАН СССР, 160, 1049, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июня 1967 г.