ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3390

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В. Ефимов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1967.

P2 - 3390

Г.В. Ефимов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в "Communications in Mathematical Physics"

1. Введение

Среди основных постулатов локальной квантовой теории поля существенное место занимает предположение о характере обобщенных функций, каковыми являются коэффициентные функции в разложении S -матрицы по нормальным произведениям операторов поля /1/ или функции Вайтмана в его аксиоматическом подходе /2/. Это предположение связано с определением локальных свойств обобщенных функций. Нам кажется, что важное пространство обобщенных функций умеренного роста, ставшее традиционным при рассмотрении квантовой теории поля, было выбрано потому, что здесь понятие локальности обобщенной функции вводится наиболее простым и естественным образом. Однако за последнее время становится все более ясным, что это пространство не всегда является адекватным аппаратом. Оказалось, что класс локальных обобщенных функций может быть значительно расширен. Наиболее существенные результаты в этой области были получены Мейманом /3/ и Джаффе /4/. Существенно, что в работах этих авторов главное место занимает определение самих понятий микропричинности у Меймана и строгой локальности у Джаффе. В зависимости от вводимых определений эти авторы получают различные классы основных и обобщенных функций. Идея Меймана и Джаффе состоит в том, чтобы выбрать "минимальное" пространство основных функций. Это означает следующее. Если вводится какое-то определение локальности, то на "минимальном" пространстве основных функций должны быть определены только такие обобщенные функции, которые удовлетворяют введенному определению. Другие же обобщенные функции не должны быть определены на всем пространстве основных функций. Требование "минимальности" позволяет получить из этого чисто математического требования, вытекающего лишь из определения локальных свойств обобщенных функций, важные физические следствия (CPT – теорема, теорема о локальной коммутативности, характере поведения амплитуд на бесконечности по энергии и т.д.).

Выбор "минимального" пространства основных функций целиком оправдан, если мы придерживаемся аксиоматического подхода в квантовой теории поля и хотим из самых общих требований вывести ряд физических следствий.

Если же мы придерживаемся динамической картины в квантовой теории поля (здесь имеется в виду, например, построение ряда теории возмущений для S -матрицы по заданному лагранжиану взаимодействия), то из самого динамического описания взаимодействия должно вытекать, какое пространство основных и обобщенных функций должно быть выбрано для корректного описания картины взаимодействия.

При этом взаимодействие может и не быть локальным. Однако в настоящее время нет хорошего определения релятивистски-инвариантной нелокальной связи между операторами квантовой теории поля. В данной работе мы попытаемся дать такое определение. Для этого мы выясним пространственно-временные свойства релятивистски-инвариантных обобщенных функций вида

$$K(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \Box^n \delta^{(4)}(x-x'), \tag{1.1}$$

где $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, для различных последовательностей $\{c_n\}$. Будем различать возможности

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{1.2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \ell^2 < \infty, \tag{1.3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_n}{(2n)!}\right|^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{1.4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_n}{(2n)!}\right|^{\frac{1}{n}} = a^2 < \infty. \tag{1.5}$$

В § 2 мы опишем основной класс функций и дадим определение носителя обобщенных функций; в §§ 3-5 будут рассмотрены обобщенные функции вида (1.1) для последовательностей $\{c_n\}$, удовлетворяющих условиям (1.2-5).

2. Основной класс функций

В качестве класса основных функций выберем пространство Ξ всех целых функций $f(z) \equiv f(z_0, z_1, z_2, z_3)$ от 4 переменных $z \equiv (z_0, z_1, z_2, z_3) \equiv (z_0, \vec{z})$. В пространстве Ξ определим систему норм по формулам

$$\| f \|_m = \max_{|z_j| < m} | f(z) | . \tag{2.1}$$

Будем говорить, что последовательность функций $f_1(z), \dots, f_n(z), \dots$ где $f_j(z) \in \Xi$, правильно сходится, если она сходится равномерно в любой конечной области вещественных значений аргументов (x_0, x_1, x_2, x_3). Для нас будет важна

Лемма

<u>Если последовательность $f_n(z) \in \Xi$ ограничена по норме $\| f_n \|_m$ постоянной M и правильно сходится, то ее предел $f(z)$ также принадлежит пространству Ξ и имеет норму, не превосходящую M.</u>

Эта лемма является иной формулировкой теоремы Витали о сходимости последовательности аналитических функций (см., например,[5]).

Поэтому введенные нормы согласованы, а пространство Ξ полное и совершенное.

Дадим еще одно

Определение

<u>Последовательность $f_n(z) \in \Xi$ сходится в области $G \subset C^4$, если она сходится равномерно в замкнутой области G.</u>

Пространство Ξ незамкнуто относительно этого определения сходимости. Однако с его помощью мы дадим ниже другое определение понятия носителя функционала на пространстве Ξ.

Пространство всех линейных непрерывных функционалов, определенных на пространстве основных функций Ξ, обозначим через Ξ'. Явный вид такого функционала может быть найден согласно обычной процедуре[6,7]

$$(F, f) = \int f(z)\, d\mu_F(z), \tag{2.2}$$

где $\mu_F(z)$ –комплексная вполне аддитивная мера в области $|z_j| < m$. Эта формула при всевозможных m дает общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $\mathfrak{Z}$.

Для дальнейшего нам будет существенно ввести понятие носителя функционала F. Мы дадим следующее /8,9/

Определение

Область $G \subset C^4$, называется носителем функционала $F \in \mathfrak{Z}'$, если этот функционал F может быть непрерывно расширен на пространство функций $\mathfrak{Z}(G)$, аналитических в замкнутой области G. Если область G является произвольно малой окрестностью какой-либо точки $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, то функционал называется локальным.

Из данных определений следует, что если носитель функционала F сосредоточен в области G, то для любой последовательности $f_n(z) \in \mathfrak{Z}$, сходящейся к нулю в G, последовательность чисел (F, f_n) также сходится к нулю.

3. Локальные обобщенные функции

Рассмотрим обобщенные функции (1.1), где коэффициенты c_n удовлетворяют предельному соотношению (1.2).

Рассмотрим функционал

$$(K, f)(x) = \int d^4 x' K(x - x') f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \Box^n f(x) . \qquad (3.1)$$

Воспользуемся следующим интегральным представлением для оператора $\Box$:

$$\Box^n = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}\right)^n = a_n \int d^4 \rho \left(i \rho_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \vec{\rho} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^{2n}; \qquad (3.2)$$

$$a_n = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \cdot \frac{n!(n+2)!}{(2n)!}; \quad \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 . \qquad (3.3)$$

Интегрирование в (3.2) проводится по евклидову четырехмерному шару $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = \vec{\rho}^{\,2} + \rho_4^2 \leq 1$.

Введем далее функцию комплексного переменного ξ :

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n a_n}{\xi^{2n+1}} . \tag{3.4}$$

Из условий (1.2) и (3.3) следует, что $W(\xi)$ имеет существенную особенность при $\xi = 0$. Других особенностей в плоскости комплексного переменного ξ она не имеет. Поэтому

$$c_n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi\, \xi^{2n} W(\xi), \tag{3.5}$$

где интегрирование проводится по любому замкнутому контуру, охватывающему точку $\xi = 0$. Используя представления (3.2) и (3.5), функционал (3.1) можно переписать в виде

$$(K,f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi \xi^{2n}\, W(\xi) \int\limits_{\rho^2 \leq 1} d^4\rho \left(i\rho_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \vec{\rho} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^{2n} f(x) = \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi\, W(\xi) \int\limits_{\rho^2 \leq 1} d^4\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(i\rho_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \vec{\rho} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^n f(x_0, \vec{x}) .$$

В последнем равенстве суммирование проводится по всем n, поскольку интеграл по ρ от нечетных степеней $\left(i\rho_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \vec{\rho} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)$ тождественно равен нулю. Замечая далее, что в (3.6) стоит оператор сдвига по аргументам $(x_0, \vec{x})$, а функция $f(x_0, \vec{x}) \in \mathfrak{Z}$, получим

$$(K,f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi\, W(\xi) \int\limits_{\rho^2 \leq 1} d^4\rho\, f(x_0 + i\rho_4 \xi, \vec{x} + \vec{\rho}\xi) . \tag{3.7}$$

Полученное выражение хорошо определено, поскольку $f \in \mathfrak{Z}$.

Так как $W(\xi)$ имеет особенность лишь в точке $\xi = 0$, интегрирование по ξ можно проводить по контуру с произвольным радиусом. Поэтому функционал (3.7) может быть непрерывно расширен на пространство основных функций, аналитических в точке $x = (x_0, \vec{x})$. Отсюда следует, что обобщенные функции вида (1.1) с условием (1.2), согласно нашему определению, являются локальными.

Преобразование Фурье обобщенной функции (1.1) записывается в виде

$$\tilde{K}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (p^2)^n. \tag{3.8}$$

Функция $\tilde{K}(p^2)$ является целой аналитической функцией порядка $\gamma < \frac{1}{2}$ в плоскости комплексного переменного p^2, т.е.

$$|\tilde{K}(p^2)| < e^{\epsilon\sqrt{|p^2|}} \tag{3.9}$$

для произвольных $\epsilon > 0$. Из теории целых функций (см., например,/6/) известно, что для таких функций не существует ни одного направления в комплексной плоскости p^2, вдоль которого они могли бы убывать. Это означает, что эти функции не могут играть роль функций обрезания при построении теории возмущений для S-матрицы, если мы хотим как-то использовать квазилокальный произвол, при построении коэффициентных функций в разложении S-матрицы по нормальным произведениям асимптотических полей.

"Минимальным" пространством основных функций, на котором определены лишь квазилокальные обобщенные функции типа (1.1) с условием (1.2), будет пространство $\mathfrak{Z}^0$ функций, аналитических по каждому своему аргументу $z_j = x_j + i y_j$ в некоторой полосе $|y_j| \leq d_j$, где d_j зависят от функции f и могут быть произвольными величинами. Не существует никакой фиксированной полосы $|y_j| \leq d_0$, где были бы аналитичны все $f \in \mathfrak{Z}^0$. Мы получили, таким образом, релятивистское обобщение класса Меймана C_0/3/.

4. Нелокальные обобщенные функции

Рассмотрим теперь обобщенные функции (1.1), где коэффициенты c_n удовлетворяют предельному соотношению (1.3), где ℓ -некоторый параметр.

Рассмотрим функционал $(K,f)(x)$, для него справедлива формула (3.1). Воспользуемся интегральным представлением (3.2) и введем функцию $W_\ell(\xi)$ комплексного переменного ξ по формуле (3.4). В рассматриваемом случае из условий (1.3) и (3.3) следует, что функция $W_\ell(\xi)$ аналитична в плоскости комплексного ξ вне круга $|\xi| = \ell$, а внутри этого круга она имеет какие-то особенности, положение которых зависит от конкретного вида коэффициентов c_n, поэтому

$$c_n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|>\ell} d\xi\, \xi^{2n}\, W_\ell(\xi). \tag{4.1}$$

Повторяя выкладки предыдущего параграфа, получим для функционала (1.1) с условием (1.3) представление

$$(K,f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|>\ell} d\xi\, W_\ell(\xi) \int_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\, f(x_0 + i\rho_4\, \xi, \vec{x} + \vec{\rho}\,\xi). \tag{4.2}$$

Полученное выражение хорошо определено на классе основных функций Σ.

Покажем, что представление (4.2) релятивистски-ковариантно на Σ. Нам необходимо показать, что интеграл в (4.2) по четырехмерному евклидову пространству ковариантен при преобразовании координат из однородной группы Лоренца, т.е.

$$\int_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\, (\Lambda_{0j}(x_j + \rho_j\,\xi),\quad \Lambda_{\beta j}(x_j + \rho_j\,\xi)) = \tag{4.3}$$

$$= \int_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\, f(\Lambda_{0j}\, x_j + \rho_0\,\xi,\ \Lambda_{\beta j}\, x_j + \rho_\beta\,\xi),$$

где Λ -представление однородной группы Лоренца L. Суммирование проводится по $j = (0,1,2,3)$, и принято обозначение $\rho_0 = i\rho_4$, а $\beta=1,2,3$.

Любое $\Lambda \in L$ может быть представлено в виде $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$, где Λ_1 и Λ_3-обычные вращения, а Λ_2-чистое преобразование Лоренца вдоль три-оси. Интеграл в (4,3), очевидно, ковариантен относительно вращений в трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому нам достаточно показать ковариантность представления (4.2) при чистом преобразовании Лоренца Λ_2. Тогда соотношение (4.3) перепишется следующим образом:

$$\int\limits_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\ f((x_0+i\rho_4\xi)\,\mathrm{ch}\,\theta+(x_3+\rho_3\xi)\,\mathrm{sh}\,\theta,\ x_1+\rho_1\xi,\ x_2+\rho_2\xi,\ (x_0+i\rho_4\xi)\,\mathrm{sh}\,\theta+(x_3+\rho_3\xi)\,\mathrm{ch}\,\theta)= \tag{4.4}$$

$$=\int\limits_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\ f(x_0\,\mathrm{ch}\,\theta+x_3\,\mathrm{sh}\,\theta+i\rho_4\xi,\ x_1+\rho_1\xi,\ x_2+\rho_2\xi,\ x_0\,\mathrm{sh}\,\theta+x_3\,\mathrm{ch}\,\theta+\rho_3\xi),$$

где $\mathrm{th}\,\theta=\frac{v}{c}$, $\ell<|\xi|<\ell+\epsilon$. В плоскости (ρ_4,ρ_3) перейдем к полярным координатам $\rho_4=r\cos\phi$, $\rho_3=r\sin\phi$, тогда для левой части соотношения (4.4) получим

$$\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^1 dr\,r\iint\limits_{\rho_1^2+\rho_2^2\leq 1-r^2} d\rho_1 d\rho_2\ f(x_0'+ir\xi\cos(\phi+i\theta),\ x_1+\rho_1\xi,\ x_2+\rho_2\xi,\ x_3'+r\xi\sin(\phi+i\theta)), \tag{4.5}$$

где

$$x_0'=x_0\,\mathrm{ch}\,\theta+x_3\,\mathrm{sh}\,\theta,\quad x_3'=x_0\,\mathrm{sh}\,\theta+x_3\,\mathrm{ch}\,\theta.$$

Поскольку функция $f(z_0,z_1,z_2,z_3)$ — целая по аргументам z, то она будет целой по комплексному аргументу ϕ. При этом подинтегральная функция периодична вдоль вещественной оси в плоскости комплексного ϕ с периодом 2π. Поэтому в интеграле (4.5) контур интегрирования по ϕ от 0 до 2π может быть сдвинут на любое чисто мнимое число, т.е.

$$\int_0^{2\pi} d\phi\,A(\phi)=\int_{i\theta}^{i\theta+2\pi} d\phi\,A(\phi)=\int_0^{2\pi} d\phi\,A(\phi-i\theta), \tag{4.6}$$

где через $A(\phi)$ обозначена подинтегральная функция в (4.5). Значит, правая часть в (4.4) равна левой части, и наше утверждение доказано.

Обратимся теперь к пространственно-временным свойствам обобщенной функции $K(x-x')$ в (4.2). Функционал (4.2) может быть расширен с сохранением релятивистской ковариантности на пространство функций $\mathfrak{Z}(G_\ell(x))$, аналитичных в замкнутой области $G_\ell(x)$, где $z'\in G_\ell(x)$, если

$$|(z'-x)^2| \leq \ell^2 \quad , \tag{4.7}$$

где $(z'-x)^2 = (z_0'-x_0)^2 - (\vec{z}\,'-\vec{x}\,)^2$. Пересечение области $G_\ell(x)$ с действительным пространством R^4 является гиперболоидом

$$-\ell^2 \leq (x_0'-x_0)^2 - (\vec{x}\,'-\vec{x}\,)^2 \leq \ell^2. \tag{4.8}$$

Эта область в пространстве R^4 бесконечна и имеет бесконечный 4-объем.

Функционал (4.2) можно расширить на еще более широкий класс функций. Заметим, что мы показали, что на классе $f \in \mathcal{Z}(G_\ell(x))$ представление (4.2) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$(K, f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|>\ell} d\xi\, W_\ell(\xi) \int\limits_{\rho^2\leq 1} d^4\rho\, f(x + \Lambda\rho\xi), \tag{4.9}$$

где $\Lambda = \Lambda(\theta, \phi, \psi)$ – некоторое представление однородной группы Лоренца, θ -лоренцовский угол, ϕ и ψ – евклидовы углы. Если мы зададимся каким-либо определенным представлением с фиксированными параметрами θ , ϕ и ψ , то для данного $\Lambda(\theta, \phi, \psi)$ функционал (4.9) может быть расширен на класс функций f , аналитических в области

$$G_\ell(\theta, \phi, \psi\,; x) \subset G_\ell(x). \tag{4.10}$$

Точка z' принадлежит области $G_\ell(\theta, \phi, \psi\,; x)$ при $\theta = \phi = \psi = 0$, если

$$|z_0'-x_0|^2 + |\vec{z}\,'-\vec{x}\,|^2 \leq \ell^2 . \tag{4.11}$$

В случае произвольных θ , ϕ и ψ область $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x)$ получается из области (4.11) преобразованием Лоренца. Иными словами, область $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x)$ представляет собой в случае $\theta = \phi = \psi = 0$ шар, а при произвольных

θ , ϕ и ψ-эллипсод который целиком лежит внутри гиперболоида G_ℓ (4.6). Обратим внимание на то, что область $G_\ell(\theta, \phi, \psi; x)$ для каждых θ , ϕ и ψ ограничена, причем 4-объем всех областей $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x)$ одинаков, ограничен и пропорционален ℓ^4 .

Итак, для каждого отдельного представления Λ функционал (4.9) расширяется на пространство основных функций $\Xi(G_\ell(\theta,\phi,\psi;x)) \supset \Xi(G_\ell(x)) \supset \Xi$. Следовательно, носителем функционала (1.1) с условием (1.3) является некоторая ограниченная область $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x) \subset G_\ell(x)$.

Мы могли бы поступить несколько иначе. Выбрав последовательность $f_n(z) \in \Xi$, сходящуюся к нулю в $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x)$, легко получить, что $\lim\limits_{n\to\infty}(K,f_n)(x) = 0$, т.е. носителем обобщенной функции $K(x-x')$ является область $G_\ell(\theta,\phi,\psi;x) \subset G_\ell(x)$.

Другими словами, рассматриваемые обобщенные функции обладают следующим свойством. Любую функцию $f(x)$, отличную от нуля в какой-либо ограниченной области пространства-времени $G_f \subset R^4$, они переводят в функцию $F(x) = (K, f)(x)$, которая отлична от нуля лишь в несколько бóльшей ограниченной области пространства-времени $G_F = G_f + \delta G_f$, причем область δG_f ограничена и целиком лежит внутри области $G_{f\ell}$, такой, что $x \in G_{f\ell}$, если $-\ell^2 \le (x-y)^2 \le \ell^2$, где $y \in G_f$. При этом форма этой "размазанной" области G_F зависит только от характера поведения функции $f(x)$ в G_f .

Физически это означает следующее. Пусть имеется некоторое поле $\Phi(x)$, которое возникает и затем исчезает в какой-то ограниченной области пространства G_f . Тогда влияние этого импульса поля, благодаря "функции распространения" $K(x-x')$ скажется лишь в некоторой ограниченной области, четырехмерный объем которой конечен и которая целиком лежит внутри области $G_{f\ell}$. Форма области влияния зависит только от "микроформы" импульса поля $\Phi(x)$.

Преобразование Фурье обобщенной функции (1.1) с условием (1.3), которое записывается в виде (3.8), является целой аналитической функцией порядка $\frac{1}{2}$ и типа ℓ в плоскости комплексного переменного p^2 , т.е.

$$|\tilde{\tilde{K}}(p^2)| < e^{(\ell+\epsilon)\sqrt{|p^2|}} \tag{4.12}$$

для любого $\epsilon > 0$. Для таких функций может существовать лишь одно направление в комплексной плоскости p^2, вдоль которого они убывают. Поэтому они могут играть роль функций обрезания при построении теории возмущений для S-матрицы /10/.

"Минимальным" пространством основных функций, на котором определены лишь нелокальные обобщенные функции типа (1.1) с условием (1.3), будет пространство $\mathfrak{Z}^{\ell}$ функций, аналитических в области Γ_ℓ, где $z \in \Gamma_\ell$, если

$$
-\ell^2 \le y_0^2 - \vec{y}^2 \le \ell^2 . \tag{4.13}
$$

5. Существенно нелокальные обобщенные функции

Обратимся теперь к последовательностям $\{c_n\}$, удовлетворяющим условию (1.4). Мы ограничимся исследованием только таких последовательностей, для которых коэффициенты c_n вещественны и являются решениями следующей проблемы моментов:

$$
a_n c_n = \int_0^\infty u^{2n} \, d\sigma(u) , \tag{5.1}
$$

где коэффициенты a_n определяются формулой (3.3), а $\sigma(u)$ -вещественная монотонно возрастающая функция. Можно показать, что в этом случае коэффициенты c_n всегда удовлетворяют (1.4).

Воспользовавшись формулой (5.1) и проводя выкладки, как это было сделано ранее, можно для функционала $(K, f)(x)$ формально написать представление

$$
(K, f)(x) = \int_0^\infty d\sigma(u) \int_{\rho^2 \le 1} d^4\rho \; f(x_0 + i\rho_4 u, \vec{x} + \vec{\rho} u) = \tag{5.2}
$$

$$
= \int d^4\rho \; V(\rho^2) f(x_0 + i\rho_4, \vec{x} + \vec{\rho}) ,
$$

где

$$V(\rho^2) = \int\limits_{\sqrt{\rho^2}}^{\infty} \frac{d\,\sigma(u)}{u^4} \quad . \tag{5.3}$$

По условию $V(\rho^2)$ отлично от нуля всюду. Ясно, что этот функционал, вообще говоря, не определен на нашем пространстве основных функций $\mathcal{Z}$. Необходимо согласовать скорость убывания функции $V(\rho^2)$ и порядок роста $f(z) \in \mathcal{Z}$ при $|z| \to \infty$ так, чтобы интеграл в (5.2) сходился. Пусть мы выбрали такое пространство $\mathcal{Z}_V$, что функционал (5.2) существует. Тогда, очевидно, этот функционал является существенно нелокальным, т.е. он эквивалентен интегральному оператору с ядром, отличным от нуля во всем пространстве-времени.

Однако можно говорить, что функционал (5.2) характеризуется некоторой "элементарной длиной ℓ " в некотором приближенном смысле. Мы имеем в виду следующее. Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля в некоторой области $G_f \subset R^4$. Тогда функционал $(K, f)(x)$ в (5.2) отличен от нуля во всем пространстве R^4. Однако, если функция $V(\rho^2)$, являющаяся ядром интегрального оператора в (5.2), убывает при $\rho^2 \to \infty$ "достаточно быстро", а область, где $V(\rho^2)$ "заметно" отлично от нуля, характеризуется некоторой эффективной длиной ℓ, то можно говорить, что обобщенная функция $K(x - x')$ переводит область G_f, где $f(x) \neq 0$ в более широкую область $G_{f\ell}$, где функционал $(K, f)(x)$ заметно отличен от нуля, а в остальных точках R^4 он приблизительно равен нулю, т.е. мы будем в каком-то смысле иметь случай, рассмотренный нами в предыдущем параграфе. Возникает вопрос, что такое "достаточно быстрое" убывание функции $V(\rho^2)$? Как математически сформулировать приближенное понятие "элементарной длины ℓ " ?

В физике принято считать, что "достаточно быстрым" убыванием является экспоненциальное убывание, т.е. функция $V(\rho^2)$ убывает достаточно быстро, если она удовлетворяет предельному соотношению:

$$\lim_{\rho^2 \to \infty} V(\rho^2)\, e^{a(\sqrt{\rho^2})^N} = 0 \tag{5.4}$$

при некоторых $a > 0$ и $N > 0$. Обычно считается, что при $N = 1$ убывание достаточно хорошее.

Мы рассмотрим классы таких функционалов (5.2), для которых функция $V(\rho^2)$ удовлетворяет (5.4) при некотором $N \geq 1$ и произвольных $a > 0$.

Определим пространство основных функций $\mathfrak{Z}_N$. Будем говорить, что функция $f(z_0, z_1, z_2, z_3)$ принадлежит пространству $\mathfrak{Z}_N \subset \mathfrak{Z}$, если она является целой аналитической функцией по каждому аргументу z_j $(j = 0,1,2,3)$ порядка роста меньше N, т.е.

$$\lim_{|z_j| \to \infty} \frac{\ln |f(z_0, z_1, z_2, z_3)|}{|z_j|^N} = 0. \tag{5.5}$$

Выделим еще пространство $\mathfrak{Z}_\infty = \bigcup_N \mathfrak{Z}_N$ всех целых функций конечного порядка роста. Для каждой $f(z) \in \mathfrak{Z}_\infty$ всегда найдется такое $N > 0$, что выполнено предельное соотношение (5.5).

Все те целые функции $f(z)$, которые удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| \leq C \exp\left\{ \sum_{j=0}^{3} \left[-\left|\frac{x_j}{\lambda_j}\right|^b + \left|\frac{y_j}{\beta_j}\right|^b \right] \right\} \tag{5.6}$$

при некоторых положительных b, C, λ_j и β_j, по определению принадлежат классу Z_b^b (см. /8/). Класс Z_b^b является подпространством пространства $\mathfrak{Z}_N$ при $b \leq N$. Класс Z_b^b нетривиален при $b > 1$.

Т е о р е м а а п п р о к с и м а ц и и. Пусть $\phi(x)$ -кусочно-непрерывная, ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на R^4. Для любого $\epsilon > 0$ функцию $\phi(x)$ можно равномерно с точностью до ϵ аппроксимировать функцией $f(x) \in \mathfrak{Z}_N$ $(N > 1)$.

Выберем такую $f(z) \in Z_b^b \subset \mathfrak{Z}_N$, которая вещественна при $x \in R^4$ и нормирована следующим образом:

$$\int d^4x\, f(x) = 1.$$

Построим последовательность функций

$$f_\nu(x - x') = \frac{1}{\nu^4} f\left(\frac{x - x'}{\nu}\right), \tag{5.7}$$

где ν-некоторый положительный параметр. Каждой $\phi(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, поставим в соответствие функцию

$$\phi_\nu(x) = \int d^4 x' f_\nu(x - x') \phi(x'). \tag{5.8}$$

Используя далее обычные методы математического анализа (см., например,[11]), легко показать, что $\phi_\nu(z) \in \Xi_N$ и для любого $\epsilon > 0$ всегда найдется такое ν_0, что для $\nu < \nu_0$ выполнено

$$|\phi(x) - \phi_\nu(x)| < \epsilon \tag{5.9}$$

равномерно во всех точках непрерывности функции $\phi(x)$, а в точках разрыва

$$\left| \frac{\phi(x-0) + \phi(x+0)}{2} - \phi_\nu(x) \right| < \epsilon . \tag{5.9a}$$

Этим теорема полностью доказывается.

На пространстве Ξ_N определены функционалы K в (5.2), для которых соответствующие функции $V(\rho^2)$ убывают не медленнее экспоненты порядка N, т.е. всегда найдется такое число $A > 0$, что

$$\lim_{\rho^2 \to \infty} V(\rho^2) e^{A(\sqrt{\rho^2})^N} = 0 . \tag{5.10}$$

Получим ограничение на рост коэффициентов c_n (5.1). Из (5.10) следует, что существуют такие числа $C > 0$ и $a > 0$, что

$$V(u^2) \leq C e^{-au^N}. \tag{5.11}$$

Тогда для коэффициентов c_n получим оценку при достаточно больших n:

$$|c_n| = \left| \int_0^\infty u^{2n} d\sigma(u) \right| = \left| \int_0^\infty du (2n+4) u^{2n+3} V(u^2) \right| \leq \tag{5.12}$$

$$\leq (2n+4) C \int_0^\infty du\, u^{2n+3} e^{-au^N} = \frac{(2n+4)C}{N a^{\frac{2n+4}{N}}} \Gamma\left(\frac{2n+4}{N}\right).$$

Здесь мы проинтегрировали один раз по частям. Это соотношение можно записать иначе:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_n|^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{2}{N}}} < \infty . \qquad (5.13)$$

На пространстве $\mathcal{Z}_\infty$ будут определены лишь те функционалы, для кото= рых функция $V(\rho^2)$ убывает быстрее любой экспоненты конечного порядка, т.е.

$$\lim_{\rho^2\to\infty} V(\rho^2)\, e^{(\sqrt{\rho^2})^N} = 0 \qquad (5.14)$$

для любого N. Например, $V(\rho^2)=\exp\{-e^{\rho^2}\}$. Условие на коэффициенты c_n запишется тогда в виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_n|^{\frac{1}{n}}}{n^{\epsilon}} = 0 \qquad (5.15)$$

для произвольного $\epsilon > 0$.

Каковы свойства функции $V(\rho^2)$? Дадим

Определение

Будем говорить, что функция $V(\rho^2)$ приблизительно сосредоточена в области $\rho^2 \le \ell^2$ с точностью ϵ, если она достаточно быстро убывает при $\rho^2\to\infty$ и

$$\int d^4\rho\, V(\rho^2) = 1 ,$$

$$\Big| \int_{\rho^2>\ell^2} d^4\rho\, V(\rho^2) \Big| < \epsilon . \qquad (5.16)$$

Параметр ℓ имеет смысл размера области, вне которой функция $V(\rho^2)$ приблизительно равна нулю. Введем обозначение

$$V_\ell(\rho^2) = \begin{cases} V(\rho^2) & \text{при } \rho^2 \le \ell^2 , \\ 0 & \text{при } \rho^2 > \ell^2 . \end{cases}$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, можно ли в функционалах

(5.2) заменить функцию $V(\rho^2)$ на $V_\ell(\rho^2)$, т.е. можно ли считать рассматриваемые функционалы в каком-то приближении нелокальными с элементарной длиной ℓ, как это было исследовано в параграфе 4.

Прежде всего коснемся физического смысла исследуемых функционалов. Функции основного класса описывают некоторые распределения физических величин, например, поля или зарядов, или просто амплитуду некоторого физического состояния. Эти распределения задаются в вещественном пространстве-времени R^4 и описываются функциями, обычно ограниченными в R^4. Функционал, или обобщенная функция, имеет смысл оператора распространения, связанного с динамикой процесса. Нас интересуют пространственно-временные свойства функционала $K(x-x')$, поэтому нам следует выбрать некоторую функцию $\phi(x)$, отличную от нуля в некоторой области $G \subset R^4$ и посмотреть, где в пространстве R^4 будет отлична от нуля функция $\Phi(x) = (K,\phi)(x)$. Так как в наших пространствах основных функций отсутствуют финитные функции, мы выберем последовательность функций $\phi_\nu(x)$, принадлежащих нашему пространству и с заданной степенью точности аппроксимирующих $\phi(x)$. Применим к функциям $\phi_\nu(x)$ функционал K:

$$\Phi_\nu(x) = \int (K, f_\nu)(x-x')\phi(x')d^4x' = \int F_\nu(x-x')\phi(x')d^4x', \tag{5.18}$$

$$F_\nu(x) = (K, f_\nu)(x) = \int d^4\rho\, V(\rho^2) f_\nu(x_0 + i\rho_4, \vec{x} + \vec{\rho}). \tag{5.19}$$

Здесь $f_\nu(x)$ выбирается таким же образом, как и при доказательстве теоремы аппроксимации. Очевидно, нам достаточно исследовать свойства функций $F_\nu(x)$. Прежде всего отметим, что

$$\int d^4x' F_\nu(x-x') = \int d^4\rho\, V(\rho^2) = 1 \tag{5.20}$$

и не зависит от ν. Ограничимся рассмотрением пространства Ξ'_N. Оценим по модулю функцию $F_\nu(x)$, когда $f(x) \in Z^b_b$ $(b \le N)$:

$$|F_\nu(x)| = \left|\int d^4\rho\, V(\rho^2)\, f_\nu(x_0 + i\rho_4, \vec{x} + \vec{\rho})\right| \leq$$

$$\leq C \int d^4\rho \frac{1}{\nu^4} \exp\left\{ -\frac{(\rho_4^2 + \vec{\rho}^{\,2})^{\frac{N}{2}}}{\ell^N} - \left|\frac{x_0}{\nu\lambda_0}\right|^b + \left|\frac{\rho_4}{\nu\beta_0}\right|^b - \sum_{j=1}^{3}\left|\frac{x_j + \rho_j}{\nu\lambda_j}\right|^b \right\}. \tag{5.21}$$

Оценка наиболее просто получается, когда $N > 2$. Воспользовавшись неравенством $(\rho_4^2 + \vec{\rho}^{\,2})^{\frac{N}{2}} \geq |\rho_4|^N + |\rho_1|^N + |\rho_2|^N + |\rho_3|^N$, получим

$$|F_\nu(x)| \leq C \exp\left\{ -\left|\frac{x_0}{\nu\lambda_0}\right|^b \right\} A\left(\frac{\ell}{\nu}\right) B(\vec{x}), \tag{5.22}$$

$$A\left(\frac{\ell}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} d\rho_4 \exp\left\{ -\left|\frac{\rho_4}{\ell}\right|^N + \left|\frac{\rho}{\nu\beta_0}\right|^b \right\} = 2\frac{\ell}{\nu}\int_0^\infty dt \exp\left\{ -t^N + \left(\frac{\ell}{\nu\beta_0}\right)^b t^b \right\}, \tag{5.23}$$

$$B(\vec{x}) = \frac{1}{\nu^3}\int d\vec{\rho}\, \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{3}\left[\left|\frac{\rho_j}{\ell}\right|^N + \left|\frac{x_j + \rho_j}{\nu\lambda_j}\right|^b\right]\right\}. \tag{5.24}$$

Параметр ν имеет простой смысл. Если функция $f(x)$ приблизительно сосредоточена в области $|x_j| \lessapprox \lambda_j$ $(j = 0,1,2,3)$ в смысле определения (5.10), то функция $f_\nu(x)$ будет приблизительно сосредоточена в области $|x_j| \lessapprox \nu\lambda_j$.

Легко видеть, что функция $B(\vec{x})$ будет приблизительно сосредоточена в области $|x_j| \lessapprox \nu\lambda_j + \ell$, т.е. вполне можно считать функционал нелокальным и элементарной длиной ℓ.

Однако сложнее дело обстоит в случае временной координаты. Когда $\ell \lessapprox \nu\beta_0$, тогда $A\left(\frac{\ell}{\nu}\right) \approx 1$ и убывание по $|x_0|$ полностью определяется функцией $\exp\left\{-\left|\frac{x_0}{\nu\lambda_0}\right|^b\right\}$. Когда же $\ell > \nu\beta_0$, то $A\left(\frac{\ell}{\nu}\right) \approx$ $\approx \exp\left\{\mathrm{const}\left(\frac{\ell}{\nu}\right)^{\frac{Nb}{N-b}}\right\}$ и расстояние, на котором $F_\nu(x)$ заметно падает, будет порядка $|x_0| \approx \ell\left(\frac{\ell}{\nu}\right)^{\frac{b}{N-b}}$, т.е. при достаточно малых ν это расстояние будет достаточно большим. Получается следующая картина. Если "элементарная длина" ℓ не превосходит заметно $\nu\beta_0$, то функционал K вполне можно считать нелокальным с элементарной длиной ℓ, если же $\nu\beta_0$

заметно меньше ℓ, то область, где функцию $F_\nu(x)$ следует считать отличной от нуля, уже в основном определяется параметром ν, а не ℓ.

Можно дать следующее объяснение полученному результату. Пусть $\phi(x)$ описывает некоторое физическое распределение поля или зарядов, например. $K(x-x')$ имеет смысл функции распространения или функции влияния, связанной с нелокальностью взаимодействия. Пусть нелокальность характеризуется некоторой элементарной длиной ℓ. Тогда, по физическому смыслу, точность, с которой задано распределение $\phi(x)$ в пространстве-времени, не должно превышать элементарную длину ℓ. Поэтому, если в природе существует элементарная длина ℓ и физически невозможно различить расстояния, заметно меньшие ℓ, мы не должны делать никакого различия между физическими распределениями $\phi(x)$ и $\phi_\nu(x)$ для достаточно малых ν. А в этом случае можно утверждать, что рассматриваемые функционалы являются нелокальными с элементарной длиной ℓ.

Аналогичные оценки можно сделать и для пространства $\mathfrak{Z}'_\infty$. В этом случае положение оказывается более благоприятным, потому что расстояние, на котором функция $F_\nu(x)$ заметно падает, будет порядка $\approx \ell L(\frac{\ell}{\nu})$, где $L(u)$ – медленно меняющаяся функция типа $\ln u$ или $\ln \ln u$.

Преобразование Фурье обобщенной функции (1.1) с условием (1.4) является целой аналитической функцией любого порядка. Если $K \in \mathfrak{Z}'_N$, то при $1 < N < \infty$

$$|\tilde{K}(p^2)| \leq C \exp\{ a(\sqrt{|p^2|})^{\frac{N}{N-1}} \}. \tag{5.25}$$

Если $K \in \mathfrak{Z}'_\infty$, то

$$|\tilde{K}(p^2) \leq C \exp\{ a(\sqrt{|p^2|})^{1+\epsilon} \} \tag{5.26}$$

при произвольных $\epsilon > 0$. C и a –некоторые постоянные.

"Минимальным" пространством основных функций, на котором определены лишь обобщенные функции, для которых $V(\rho^2)$ убывает быстрее любой экспоненты конечного порядка, будет пространство целых функций $\mathfrak{Z}_\infty$, а в случае функций $V(\rho^2)$, убывающих как экспоненты порядка N, – пространство $\mathfrak{Z}_N$.

Наконец, рассмотрим последний случай, когда коэффициенты c_n обобщают функции (1.1), удовлетворяют условию (1.5). Пространством основных функций, на котором определены эти функционалы, будет $\mathcal{Z}_1$. Функция $V(\rho^2)$ в представлении функционала (5.2) убывает, как линейная экспонента по $\sqrt{\rho^2}$, т.е. $V(\rho^2) \approx e^{-a\sqrt{\rho^2}}$ при больших ρ^2. Преобразование Фурье функционала уже не будет целой функцией в плоскости p^2 из-за условия (1.5). $\tilde{K}(p^2)$ будет иметь какие-то особенности в комплексной плоскости p^2, например,

$$\tilde{K}(p^2) = \frac{\Lambda^4}{(p^2)^2 + \Lambda^4}, \tag{5.27}$$

где Λ-некоторый параметр. Обычно такие функции выбираются в качестве формфакторов при построении нелокальной теории поля [12]. С нашей точки зрения, это наихудший выбор формфактора, поскольку, с одной стороны, соответствующая функция $V(\rho^2)$ убывает наименее быстро, а, с другой стороны, особенности формфактора в комплексной плоскости p^2 приводят к нарушению унитарности S-матрицы теории, и необходимы специальные приемы, чтобы спасти унитарность.

Заключение

Нам кажется, что рассмотренные нелокальные обобщенные функции из пространств $\mathcal{Z}^{\ell'}$, $\mathcal{Z}'_\infty$ и $\mathcal{Z}'_N$ дают разумное представление для возможной нелокальной природы квантовой теории поля. Было бы интересно проверить, справедливы ли важные теоремы аксиоматики, такие, как теорема о CPT-инвариантности, локальной коммутативности и связи спина со статистикой в случае нелокальной квантовой теории поля в изложенном выше смысле.

Другими важным вопросом является возможность использования нелокальных обобщенных функций вида (1.1) для устранения ультрафиолетовых расходимостей в разложении S-матрицы по теории возмущений. Здесь главным вопросом является проблема определения произведения двух обобщенных функций. В случае пространства $\mathcal{Z}^{\ell'}$ такое произведение может быть однозначно определено [10].

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Д.И.Блохинцеву и И.Т. Тодорову за обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.
2. Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое. "Наука", Москва, 1966.
3. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964).
4. A.M.Jaffe, High Energy Behaviour of Local Quantum Fields, preprint SLAC–PUB–249, 250, 1967.
5. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, Москва, 1951.
6. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва, 1959.
7. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. Пространства основных и обобщенных функций, том II, Физматгиз, Москва, 1958.
8. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. УМН, 8, 3 (1953).
9. A.Martineau. Journal d'Analyse Math., 11, 1 (1963).
10. G.V.Efimov. Commun. math. Phys., 5, 42 (1967).
11. Н.И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, "Наука", Москва, 1965.
12. Д.А. Киржниц. УФН, 90, 129 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июня 1967 г.