ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3353

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С.П. Кулешов

# К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ МАСС МЕЗОНОВ В МОДЕЛИ КВАРКОВ

1967.

P2 - 3353

С.П. Кулешов

# К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ МАСС МЕЗОНОВ В МОДЕЛИ КВАРКОВ

## § 1.

В работе П.Н.Боголюбова[1] была рассмотрена динамическая модель мезонов, в которой мезоны рассматриваются как связанные состояния кварка и антикварка. В этой работе на основе уравнения типа Бете–Солпитера в пределе сверхтяжелых кварков при отсутствии внешних полей было получено уравнение, описывающее связанные состояния кварка и антикварка:

$$\{-\hat{\Delta} + U(y^2) + \frac{1}{4}\Box_x\}\Psi(x,y) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \sum_{a=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)^2$$

$$\Box_x = \sum_{a=0}^{3} g_{aa}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)^2, \quad g_{aa} = 1, -1, -1, -1.$$

При замене

$$\Psi(x,y) = \psi(y)\,\Phi(x), \tag{1.2}$$

где $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Box_x + m^2)\,\Phi(x) = 0, \tag{1.3}$$

уравнение (1.1) принимает вид

$$\{-\Delta + U(y^2) - \frac{m^2}{4}\}\ \psi(y) = 0. \tag{1.4}$$

В настоящей работе мы найдем спектр масс для динамической составной модели мезонов на базе уравнения ( 1.4 ) с потенциалом

$$U(y^2) = \omega^2 y^2 = \omega^2(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \tag{1.5}$$

§ 2.

Отыщем собственные функции и собственные значения для уравнения (1.4) с потенциалом (1.5):

$$\Big\{ \sum_{\alpha=0}^{3} \Big( \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \Big)^2 - \omega^2 \sum_{\alpha=0}^{3} (y_{\alpha})^2 + \frac{m^2}{4} \Big\} \psi(y) = 0 . \tag{2.1}$$

Учитывая, что решениями уравнения

$$\Big( \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y_0} - \omega^2 y_0^2 + \lambda \Big) \psi(y_0) = 0 \tag{2.2}$$

являются функции

$$\psi_n(y_0) = C_n\, e^{-\frac{y_0^2}{2}} H_n(y_0), \tag{2.3}$$

где

$$\lambda = (2n+1)\omega , \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$H_n(y_0) = (-1)^n e^{y_0^2} \frac{d^n e^{-y_0^2}}{d y_0^n},$$

сделаем в уравнении (2.1) замену

$$\psi(y) = e^{-\frac{y_0^2}{2}} H_n(y_0) f(y_1, y_2, y_3). \tag{2.4}$$

Тогда при переходе к сферическим координатам уравнение (2.1) примет вид:

$$\Big(\nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla^2_{\theta,\phi}\Big) f + k^2 f = 0, \tag{2.5}$$

где

$$k^2 = \frac{m^2}{4} - \omega^2 r^2 - (2n+1)\omega$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Big( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Big)$$

$$\nabla^2_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \Big( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Big) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} .$$

Используя метод разделения переменных в уравнении ( 2.5 ), для радиальной части волновой функции получим уравнение:

$$\nabla_r^2 R - \Big\{ \omega^2 r^2 + (2n+1)\omega - \frac{m^2}{4} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Big\} R = 0. \tag{2.6}$$

Ищем решение уравнения ( 2.6 ) для радиальной волновой функции $R$, обращающееся в нуль на бесконечности:

$$\{ R(r) \underset{r \to \infty}{\to} 0 \tag{2.7}$$

Сделав подстановку $\chi = rR$, получаем из ( 2.6 ):

$$\Big\{ \frac{d^2}{dr^2} - \omega^2 r^2 - (2n+1)\omega + \frac{m^2}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Big\} \chi = 0. \tag{2.8}$$

При переходе к новой переменной $z = r^2$ уравнение ( 2.8 ) преобразуется следующим образом:

$$\left\{ 4z^2\frac{d^2}{dz^2} + 2z\frac{d}{dz} - \omega^2 z^2 - (2n+1)\omega z + \frac{m^2}{4} z - \ell(\ell+1) \right\}\chi = 0. \qquad (2.9)$$

Введем новую функцию $W(z)$ , определяемую соотношением

$$\chi(z) = \exp\left(-\frac{\omega z}{2}\right) z^s W(z), \qquad (2.10)$$

где

$$s = \frac{\ell + 1}{2}. \qquad (2.11)$$

Тогда из (2.9) получаем уравнение для $W(z)$ :

$$\left\{ z\frac{d^2}{dz^2} + \left(2s + \frac{1}{2} - \omega z\right)\frac{d}{dz} + \frac{\frac{m^2}{4} - 2\omega(2s+n+1)}{4} \right\} W = 0. \qquad (2.12)$$

Делая замену

$$z = \frac{\xi}{\omega},$$

преобразуем уравнение (2.12) к виду

$$\left\{ \xi\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(2s + \frac{1}{2} - \xi\right)\frac{d}{d\xi} + \frac{\frac{m^2}{4} - 2\omega(2s+n+1)}{4\omega} \right\} W = 0. \qquad (2.13)$$

Уравнение ( 2.13 ) совпадает с уравнением для вырожденной гипергеометрической функции. Следовательно,

$$W = F\left(-q, 2s + \frac{1}{2}; \xi\right), \qquad (2.14)$$

где

$$F(a, c, \xi) = 1 + \frac{a}{c}\frac{\xi}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{\xi^2}{2!} + \dots .$$

$$q = \frac{\frac{m^2}{4} - 2\omega(2s+n+1)}{4\omega} \qquad (2.15)$$

Для того чтобы удовлетворялось граничное условие ( 2.7 ), необходимо, чтобы ряд (2.14) оборвался, что осуществляется при $q = 0, 1, 2, \dots$
Из формулы (2.11) и (2.15) получим

$$m^2 = 8\omega(\ell + 2q + n + 2), \qquad (2.16)$$

где

$$q \ , n = 0,1,2...$$

## § 3.

Интересной особенностью формулы (2.16) является линейная зависимость квадрата масс мезонов от орбитального момента $\ell$ . Как известно /3/, подобную зависимость квадрата массы от полного углового момента можно ожидать в теории редже-полюсов. В нашем случае, однако, в отличие от теории Редже, для фиксированных значений квантовых чисел $q$ и $n$ мы будем иметь прямую в плоскости $\ell$ и $m^2$ , на которой эквидистантно располагаются мезоны с различными значениями пространственной и зарядовой четности. Подобная зависимость наблюдается, по-видимому, в эксперименте /4/. Например, мезоны $\pi$, $B$ (1220) и $\rho$, $A_2$ (1310) можно расположить попарно на двух параллельных траекториях при $q = n = 0$, расщепление между которыми обусловлено спиновым взаимодействием между кварками. В случае ненулевых значений $q$ и $n$ , как видно из формулы ( 2.16) , мы будем иметь несколько мезонов с вырожденными массами и различными значениями момента и чётности.

В заключение, пользуясь случаем, хочу принести горячую благодарность академику Н.Н.Боголюбову за предложенную тему работы и указания к ней. Хочу выразить искреннюю признательность А.Н.Тавхелидзе и В.А.Матвееву, а также участникам семинара отдела теории поля за обсуждение работы и ценные замечания.

## Литература

1. П.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Р-2098, Дубна 1965.
2. Н.Н.Боголюбов, Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянов, Б.В.Струминский, А.Н.Тавхелидзе, В.П.Шелест. Препринт ОИЯИ Д-2075, Дубна 1965.
3. Дж. Чу, М.Гелл-Манн, А.Розенфельд. Репринт ОИЯИ R-1631, Дубна 1964.
4. Richard C.Arnold, Physical Review Letters, Vol. 14 , N 16 , 657 , 1965.
5. А.С.Давыдов. Квантовая механика. Физматгиз, Москва 1963 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая 1967 года.