ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3334

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов

ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ДЛЯ ГРУППЫ O(n)

1967.

Р2 - 3334

А.В. Николов

ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ДЛЯ ГРУППЫ O(n)

Хорошо известно значение инвариантных операторов (операторов Казимира) для теории групп и ее применений. В частности, важно иметь явные выражения для собственных значений таких операторов. В [2] развит способ нахождения собственных значений операторов Казимира произвольного порядка для групп $U(n)$ и $SU(n)$, а в [3] – для групп $O(n)$ и $Sp(2n)$.

В настоящей работе предлагается другой способ в случае группы $O(n)$, причем используются данные в [1] формулы, задающие неприводимые представления $O(n)$. Он отличается существенно от способа, развитого в [2,3]. Дело в том, что в [2,3] используется экстремный (точнее, старший) вектор соответствующего представления, а в базисе, с помощью которого задаются упомянутые формулы работы [1], такой вектор не участвует (за исключением тривиального случая, когда $n \leq 3$ – см. Приложение к настоящей работе); кроме того, система генераторов, введенная в [1] и используемая здесь, не совпадает с используемой в [3] системой генераторов (при применении именно последних генераторов к экстремному вектору проявляются его характерные свойства, на которых основываются все выкладки в [2,3]). Однако, как мы покажем, в указанном базисе участвует некоторый вектор ξ со свойствами, которые дадут нам возможность легко вычислить – применяя к ξ генераторы, введенные в [1] – собственные значения операторов Казимира любого порядка для группы $O(n)$. Тем самым будет показано, что использование экстремного (старшего или младшего) вектора необязательно; иными словами, не следует считать, что только старшие и младшие векторы обладают замечательными свойствами. Конечно, вектор ξ также является экстремным, но уже в другом смысле: экстремный характер имеет теперь схема Гельфанда-Цетлина, которая "нумерует" ξ (см. § 2).

Отметим также, что полученные здесь формулы, задающие собственные значения операторов Казимира для группы $O(n)$, более эффективны. Прежде всего, благодаря подходящему определению указанных операторов, те из них, у которых порядок нечетен, оказываются равными нулю (см. сноску на стр. 5 где этот вопрос обсуждается несколько более подробно; заметим, кстати, что аналогичное определение в схеме, предложенной в /3/, привело бы к большим осложнениям). Что же касается операторов Казимира четного порядка k, то вычисление собственного значения любого из них для данного неприводимого представления $O(n)$ сводится, как и в /3/, к возведению некоторой матрицы в соответствующую степень, причем в /3/ степень равна k, а порядок самой матрицы равен n, в то время как здесь получается соответственно $\frac{k}{2}-1$ и $[\frac{n}{2}]$ (матрицы, конечно, разные), т.е. здесь результат намного проще.

Все это оправдывает, на наш взгляд, появление настоящей работы, несмотря на то, что до нее уже появилась другая работа, в которой решаются те же самые вопросы.

§ 1. Определение операторов Казимира

Мы будем пользоваться обозначениями работы /1/, где генераторы I_{ij} группы $O(n)$ выбраны так, что (ср. /4/)

$$[I_{ij}, I_{kh}] = \delta_{kj} I_{ih} - \delta_{ih} I_{kj} - \delta_{ki} I_{jh} + \delta_{jh} I_{ki}, \tag{1.1}$$

$$I_{ji} = -I_{ij} . \tag{1.2}$$

Определим операторы I^N_{ij} индуктивно:

$$I^1_{ij} = I_{ij} , \tag{1.3}$$

$$I_{ij}^{N+1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} I_{ik}^{N} I_{kj} + (-1)^{N+1}\sum_{k=1}^{n} I_{jk}^{N} I_{ki}\right], \quad N \geq 1. \tag{1.4}$$

Из (1.2–4) вытекает, что

$$I_{ji}^{N} = (-1)^{N} I_{ij}^{N}; \tag{1.5}$$

следовательно,

$$I_{ii}^{N} = 0, \quad \text{если } N \quad \text{нечетно}. \tag{1.6}$$

Кроме того, на основании (1.1) и (1.4) нетрудно доказать (индукцией по N), что

$$[I_{ij}, I_{kh}^{N}] = \delta_{kj} I_{ih}^{N} - \delta_{ih} I_{kj}^{N} - \delta_{ki} I_{jh}^{N} + \delta_{jh} I_{ki}^{N}. \tag{1.7}$$

Оператор Казимира N -го порядка определим формулой [x/]

[x/] Может показаться, что это определение, связанное с (1.4), излишне замысловато. Однако эта замысловатость только кажущаяся; она оправдывается тем, что именно при таком определении собственные значения операторов Казимира группы $O(n)$ имеют, как мы увидим, довольно простой вид. Намного сложнее вид собственных значений, если вместо (1.4) использовать, например, следующую, казалось бы (по аналогии с /2/) более простую, формулу:

$$I_{ij}^{N+1} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik}^{N} I_{kj}.$$

Впрочем, качества вышеприведенного определения выявляются еще в (1.9). Можно показать, что (при любом определении) операторы Казимира группы $O(n)$ нечетного порядка выражаются посредством операторов Казимира низших (четных) порядков; здесь эта зависимость проявляется в самом простом виде: $C_N = 0$, если N нечетно (ср. с подстрочным примечанием [1/] в /2/, сделанным по аналогичному поводу, т.е. по поводу выбора определения инвариантных операторов).

$$C_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_{ii}^{N} ; \tag{1.8}$$

в частности, согласно (1.6),

$$C_N = 0, \quad \text{если} \quad N \quad \text{нечетно.} \tag{1.9}$$

В силу (1.7-8) имеем

$$[I_{ij}, C_N] = 0, \tag{1.10}$$

т.е. операторы (1.8) коммутируют со всеми генераторами группы $O(n)$, так что они действительно являются инвариантами любого неприводимого представления $O(n)$. Иными словами, коммутационные соотношения (1.7) и (1.10) выявляют тензорную природу операторов I_{ij}^N и C_N соответственно; точнее, I_{ij}^N образуют (операторный) тензор второго ранга, а C_N является тензором нулевого ранга (инвариантом).

Отметим еще следующее. Нетрудно показать с помощью (1.4-5) и (1.7), что

$$I_{ij}^{N+1} = \frac{1}{2} \Big[\sum_{k=1}^{n} I_{ik} I_{kj}^{N} + (-1)^{N+1} \sum_{k=1}^{n} I_{jk} I_{ki}^{N} \Big], \quad N \geq 1. \tag{1.11}$$

Таким образом, мы получили новое определение операторов I_{ij}^N, эквивалентное первоначальному. Примем теперь во внимание, что операторы I_{ij} косоэрмитовы /1/ x/, т.е. $I_{ij}^{+} = -I_{ij}$, или, согласно (1,2),

---

x/ В/1/ вместо (1.12) ошибочно написано $I_{ij}^{+} = -I_{ji}$ т.е. ошибочно считается, что эти операторы эрмитовы. Впрочем, это мы отмечаем только ради точности, так как для наших целей знак правой части (1.12) несущественен; те же самые результаты мы получили бы (конечно, mutatis mutandis) и при изменении этого знака.

$$I^{+}_{ij} = I_{ji} \ . \qquad (1.12)$$

На основе (1.4) и (1.11-12) можно доказать индуктивно, что

$$(I^{N}_{ij})^{+} = I^{N}_{ji} \ . \qquad (1.13)$$

§ 2. Фундаментальный вектор

Ясно, что единственное собственное значение оператора C_N для данного неприводимого представления $O(n)$ можно вычислить, подействовав оператором C_N на любой вектор пространства этого представления. Каждое такое представление задается набором $\nu = [\frac{n}{2}]$ x/ чисел $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ (удовлетворяющих некоторым условиям), причем каждый вектор базиса в соответствующем пространстве "занумерован" набором xx/ чисел m_{ij}, $j = 1,2,\ldots,[\frac{i+1}{2}]$, $i = 1,2,\ldots, n-2$ (также удовлетворяющих некоторым условиям).[1] Нетрудно убедиться в том, что числа

$$m_{ij} = m_j, \ j = 1,2,\ldots,[\frac{i+1}{2}], \ i = 1,2,\ldots, n-2 \qquad (2.1)$$

образуют один из "нумерующих" наборов. Обозначим через ξ соответствующий вектор базиса. Кроме того, в силу (1.1) имеем

$$I_{i+\Delta,i} = [I_{i+\Delta,i+1}, I_{i+1,i}], \ \Delta > 1. \qquad (2.2)$$

Нетрудно доказать индуктивно с помощью (2.1-2) и на основании формул для генераторов $I_{i+1,i}$, данных в [1], что

x/ Как обычно, если x -произвольное число, то через $[x]$ будем обозначать ближайшее снизу к x целое число.

x/ Эти последние наборы принято называть схемами Гельфанда-Цетлина.

$$I_{2k,2k-1}\,\xi = i m_k \xi, \tag{2.3}$$

$$I_{2k,2h-1}\,\xi = i I_{2k,2h}\,\xi, \quad I_{2k-1,2h-1}\,\xi = i I_{2k-1,2h}\,\xi, \; k>h. \tag{2.4}$$

Как мы увидим, из (2.4) вытекает, что

$$I^N_{2k,2h-1}\,\xi = i I^N_{2k,2h}\,\xi, \quad I^N_{2k-1,2h-1}\,\xi = i I^N_{2k-1,2h}\,\xi, \; k>h. \tag{2.5}$$

Эти замечательные свойства вектора ξ дадут нам возможность легко вычислить собственные значения операторов Казимира произвольного порядка для рассматриваемого неприводимого представления $O(n)$. Будем называть ξ фундаментальным вектором (см. Приложение).

§ 3. Доказательство формул (2.5)

В силу (1.3) при $N = 1$ формулы (2.5) переходят в (2.4), т.е. при $N = 1$ они справедливы. Поэтому мы продолжим доказательство по индукции. Остается установить, что если (2.5) имеет место при некотором N', то имеют место и соотношения, которые получаются из (2.5) заменой $N \to N+1$. Чтобы не перегружать изложения, мы докажем только часть из последних соотношений, а именно:

$$I^{N+1}_{2k,2h-1}\,\xi - i I^{N+1}_{2k,2h}\,\xi = 0; \tag{3.1}$$

остальные доказываются аналогично.

Заметим сначала, что, согласно (1.7),

$$[I^N_{2k,2j-1}, I_{2h-1,2j}] = 0, \; [I_{2h-1,2j}, I^N_{2k,2j}] = I^N_{2k,2h-1}, \; k>h>j .$$

Следовательно, согласно (2.4-5), при $k>h$ имеем

$$\sum_{j=1}^{h-1} I^N_{2k,2j-1} I_{2h-1,2j-1} \xi = \sum_{j=1}^{h-1} (i I_{2h-1,2j} I^N_{2k,2j-1} \xi + i [I^N_{2k,2j-1}, I_{2h-1,2j}] \xi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{h-1} (i^2 I^N_{2k,2j}, I_{2h-1,2j} \xi + i^2 [I_{2h-1,2j}, I^N_{2k,2j}] \xi) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{h-1} I^N_{2k,2j} I_{2h-1,2j} \xi - (h-1) I^N_{2k,2h-1} \xi ,$$

так что, с учетом (1.2),

$$\sum_{j=1}^{2h-2} I^N_{2k,j} I_{j,2h-1} \xi = -\sum_{j=1}^{h-1} I^N_{2k,2j-1} I_{2h-1,2j-1} \xi - \sum_{j=1}^{h-1} I^N_{2k,2j} I_{2h-1,2j} \xi =$$

$$= (h-1) I^N_{2k,2h-1} \xi, \; k>h .$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} I^N_{2k,j} I_{j,2h-1} \xi = (h-1) I^N_{2k,2h-1} \xi + I^N_{2k,2h-1} I_{2h-1,2h-1} \xi +$$

$$+ I^N_{2k,2h} I_{2h,2h-1} \xi + \sum_{j>2h} I^N_{2k,j} I_{j,2h-1} \xi, \; k>h$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} I_{2k,j} I_{j,2h-1} \xi = h I^N_{2k,2h-1} \xi + I_{2h,2h-1} I^N_{2k,2h} \xi + \sum_{j>2h} I^N_{2k,j} I_{j,2h-1} \xi, \; k>h, \qquad (3.2)$$

так как в силу (1.2) $I_{2h-1,2h-1}=0$, а в силу (1.7)

$$I^N_{2k,2h} I_{2h,2h-1} = I_{2h,2h-1} I^N_{2k,2h} + [I^N_{2k,2h}, I_{2h,2h-1}] = I_{2h,2h-1} I^N_{2k,2h} + I^N_{2k,2h-1}, k>h.$$

Аналогично находим

$$\sum_{j=1}^{n} I^N_{2k,j} I_{j,2h}\,\xi = h\, I^N_{2k,2h}\,\xi - I_{2h,2h-1} I^N_{2k,2h-1}\,\xi + \sum_{j>2h} I^N_{2k,j} I_{j,2h}\,\xi,\ k>h. \tag{3.3}$$

Из (3,2-3) вытекает, что при $k>h$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} I^N_{2k,j} I_{j,2h-1} - i\sum_{j=1}^{n} I^N_{2k,j} I_{j,2h}\Big)\xi =$$

$$=(h+i I_{2h,2h-1})(I^N_{2k,2h-1}\,\xi - i I^N_{2k,2h}\,\xi) + \sum_{j>2h} I^N_{2k,j}(I_{j,2h-1}\,\xi - i I_{j,2h}\,\xi) = 0,$$

поскольку оба слагаемые равны нулю- первое в силу (2.5), так как по условию $k>h$, а второе в силу (2.4), так как $j>2h$. Аналогично, учитывая и (1,5), получаем

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} I^N_{2h-1,j} I_{j,2k} - i\sum_{j=1}^{n} I^N_{2h,j} I_{j,2k}\Big)\xi = 0.$$

Комбинируя эти результаты с (1.4), получаем (3.1). Этим доказательство закончено.

§ 4. Следствия формул (2.5)

Рассуждая так же, как при выводе (3.2-3), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} I^N_{2k,j} I_{j,2k-1}\,\xi = (k-1) I^N_{2k,2k-1}\,\xi + I^N_{2k,2k} I_{2k,2k-1}\,\xi + \sum_{j>2k} I^N_{2k,j} I_{j,2k-1}\,\xi, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} I^{N}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\,\xi = (k-1)\, I^{N}_{2k-1,2k}\,\xi - I^{N}_{2k-1,2k-1}\, I_{2k,2k-1}\,\xi + \sum_{j>2k} I^{N}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\,\xi, \qquad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} I^{N}_{2k,j}\, I_{j,2k}\,\xi = -\sum_{j<k} \left(I^{N}_{2j,2j} + i\, I^{N}_{2j,2j-1} \right)\xi +$$

$$+ (k-1)\, I^{N}_{2k,2k}\,\xi - I^{N}_{2k,2k-1}\, I_{2k,2k-1}\,\xi - i \sum_{j>2k} I^{N}_{2k,j}\, I_{j,2k-1}\,\xi, \qquad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} I^{N}_{2k-1,j}\, I_{j,2k-1}\,\xi = -\sum_{j<k} \left(I^{N}_{2j,2j} + i\, I^{N}_{2j,2j-1} \right)\xi +$$

$$+ (k-1)\, I^{N}_{2k-1,2k-1}\,\xi + I^{N}_{2k-1,2k}\, I_{2k,2k-1}\,\xi + i \sum_{j>2k} I^{N}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\,\xi. \qquad (4.4)$$

Кроме того, аналогичным образом получаем

$$\sum_{j>2k} I^{N}_{2k,j}\, I_{j,2k-1}\,\xi - \sum_{j>2k} I^{N}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\,\xi =$$

$$= -i \sum_{j>2k} I^{N}_{jj}\,\xi + i\,(n-2k)\left(I^{N}_{2k,2k} + i\, I^{N}_{2k-1,2k} \right)\xi. \qquad (4.5)$$

Принимая во внимание (I.4-6), (2,3) и (4.5), на основании (4.I-2) находим

$$I^{2N+1}_{2k,2k-1}\,\xi = \frac{i}{2}\, m_k \left(I^{2N}_{2k,2k}\,\xi + I^{2N}_{2k-1,2k-1}\,\xi \right) - \frac{i}{2} \sum_{j>2k} I^{2N}_{jj}\,\xi + \frac{i}{2}\,(n-2k)\left(I^{2N}_{2k,2k}\,\xi + i\, I^{2N}_{2k-1,2k}\,\xi \right), \qquad (4.6)$$

$$I^{2N+2}_{2k,2k-1}\,\xi = \frac{1}{2}\left(\sum_{j>2k} I^{2N+1}_{2k,j}\, I_{j,2k-1}\,\xi + \sum_{j>2k} I^{2N+1}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\,\xi \right), \qquad (4.7)$$

а на основании (4.3-4) –

$$I^{2N+2}_{2k-1,2k-1}\xi + I^{2N+2}_{2k,2k}\xi = -2i\sum_{j<k} I^{2N+1}_{2j,2j-1}\xi - 2i\left(\frac{n}{2}+m_k-k\right)I^{2N+1}_{2k,2k-1}\xi, \tag{4.8}$$

$$I^{2N+2}_{2k-1,2k-1}\xi - I^{2N+2}_{2k,2k}\xi = i\left(\sum_{j>2k} I^{2N+1}_{2k,j}\, I_{j,2k-1}\xi + \sum_{j>2k} I^{2N+1}_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\xi\right). \tag{4.9}$$

Далее, согласно (1.13),

$$(\xi, I^{N}_{ij}\, I_{kh}\xi) = (I^{N}_{ji}\xi, I_{kh}\xi), \tag{4.10}$$

где скобки (,) обозначают скалярное произведение. Из (2.5) и (4.10) вытекает, что

$$(\xi, \sum_{j>2k} I^{N}_{2k,j}\, I_{j,2k-1}\xi) = \sum_{j>2k}(I^{N}_{j,2k}\xi, I_{j,2k-1}\xi) = \sum_{j>2k}(-iI^{N}_{j,2k-1}\xi, iI_{j,2k}\xi) =$$

$$= i^2\sum_{j>2k}(I_{j,2k-1}\xi, I_{j,2k}\xi) = -(\xi, I_{2k-1,j}\, I_{j,2k}\xi).$$

Следовательно, согласно (4.7) и (4.9),

$$(\xi, I^{2N+2}_{2k-1,2k}\xi) = (\xi, I^{2N+2}_{2k,2k-1}\xi) = 0, \tag{4.11}$$

$$(\xi, I^{2N+2}_{2k-1,2k-1}\xi) = (\xi, I^{2N+2}_{2k,2k}\xi); \tag{4.12}$$

первое из равенств (4.11) является следствием (1.15). Положим:

$$p = n - 2\nu = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ четно} \\ 1, \text{ если } n \text{ нечетно} \end{cases}, \tag{4.13}$$

где опять $\nu = [\frac{n}{2}]$. Заменяя в (4.11–12) N на N–1 и комбинируя полученные таким образом выражения с (4.6) и (4.13), находим

$$(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1}\xi) = i(\frac{n}{2} + m_k - k)(\xi, I^{2N}_{2k,2k}\xi) - i\sum_{j=k+1}^{\nu}(\xi, I^{2N}_{2j,2j}\xi) - \frac{i}{2}p(\xi, I^{2N}_{nn}\xi);$$

аналогично, комбинируя (4.11 –12) с (4.8), находим

$$(\xi, I^{2N+2}_{2k,2k}\xi) = -i(\frac{n}{2} + m_k - k)(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1}\xi) - i\sum_{j=1}^{k-1}(\xi, I^{2N+1}_{2j,2j-1}\xi).$$

Последние два равенства можно записать соответственно в виде

$$(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1}\xi) = i\sum_{j=1}^{\nu} b_{kj}(\xi, I^{2N}_{2j,2j}\xi) - \frac{i}{2}p(\xi, I^{2N}_{nn}\xi), \tag{4.14}$$

$$(\xi, I^{2N+2}_{2k,2k}\xi) = -i\sum_{j=1}^{\nu} a_{kj}(\xi, I^{2N+1}_{2j,2j-1}\xi), \tag{4.15}$$

где

$$a_{kh} = (\frac{n}{2} + m_k - k)\delta_{kh} + \theta_{kh}, \quad b_{kh} = (\frac{n}{2} + m_k - k)\delta_{kh} - \theta_{hk}, \quad \theta_{kh} = \begin{cases} 1, & k > h \\ 0, & k \le h \end{cases}, \tag{4.16}$$

а δ_{kh} –символ Кронекера (ясно, что всюду $1 \le k, h \le \nu$).

Кроме того, если число n нечетно, то $\frac{1}{2}(n+1)$ – целое число. Очевидно, при $k=\frac{1}{2}(n+1)$ вместо (4.4) будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} I_{nj}^{N} I_{jn}\,\xi = -\sum_{j=1}^{\nu} (I_{2j,2j}^{N} + i I_{2j,2j-1}^{N})\xi + \nu I_{nn}^{N}\,\xi$$

(мы учли, что теперь $k-1=\nu$ и $2k>n$). Следовательно, согласно (1.4), (1.6) и (4.13),

$$p(\xi, I_{nn}^{2N+2}\,\xi) = -i\,p\sum_{j=1}^{\nu} (\xi, I_{2j,2j-1}^{2N+1}\,\xi). \tag{4.17}$$

Заменяя здесь и в (4.15) N на $N-1$ и подставляя полученные таким образом выражения в (4.14), находим

$$(\xi, I_{2k,2k-1}^{2N+1}\,\xi) = \sum_{h=1}^{\nu} [\,(ba)_{kh} - \frac{1}{2}p](\xi, I_{2h,2h-1}^{2N-1}\xi) \tag{4.18}$$

(через a и b обозначены, разумеется, матрицы порядка ν с элементами соответственно a_{kh} и b_{kh}). Принимая во внимание, что в силу (4.16)

$$\theta_{kh} + \theta_{hk} + \delta_{kh} \equiv 1,$$

нетрудно показать на основании (4.13) и (4.16), что

$$(ba)_{kh} - \frac{1}{2}p = (BA - \frac{1}{4}p)_{kh}\;, \tag{4.19}$$

где

$$A = a + \frac{1}{2} p, \; B = b - \frac{1}{2} p \tag{4.20}$$

(конечно, в (4.19-20) подразумевается, что число p умножено на единичную матрицу). Согласно (4.19), мы можем переписать (4.18) в следующем виде:

$$(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1} \xi) = \sum_{h=1}^{\nu} (BA - \frac{1}{4} p)_{kh} \; (\xi, I^{2N-1}_{2h,2h-1} \xi).$$

Эта рекуррентная формула позволяет нам заключить, что

$$(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1} \xi) = \sum_{h=1}^{\nu} [(BA - \frac{1}{4} p)^{N}]_{kh} \; (\xi, I^{1}_{2h,2h-1} \xi)$$

или, с учетом (1.3) и (2.3),

$$(\xi, I^{2N+1}_{2k,2k-1} \xi) = i \sum_{h=1}^{\nu} [(BA - \frac{1}{4} p)^{N}]_{kh} \; m_h (\xi, \xi). \tag{4.21}$$

Наконец, из (4.15), (4.17) и (4.21) вытекает, что

$$(\xi, I^{2N+2}_{2k,2k} \xi) = \sum_{h=1}^{\nu} [a (BA - \frac{1}{4} p)^{N}]_{kh} \; m_h (\xi, \xi), \tag{4.22}$$

$$p (\xi, I^{2N+2}_{nn} \xi) = p \sum_{k,h=1}^{\nu} [(BA - \frac{1}{4} p)^{N}]_{kh} \; m_h (\xi, \xi). \tag{4.23}$$

§ 5. Собственные значения операторов Казимира

Согласно (1.8) и (4.13),

$$C_{2N+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} (I^{2N+2}_{2k-1,2k-1} + I^{2N+2}_{2k,2k}) + \frac{1}{2} p I^{2N+2}_{nn} .$$

Отсюда с помощью (4.12), (4.20) и (4.22-23) получаем

$$(\xi, C_{2N+2}\, \xi) = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi, I^{2N+2}_{2k,2k}\, \xi) + \frac{1}{2} p (\xi, I^{2N+2}_{nn}\, \xi) =$$

$$= \sum_{k,h=1}^{\nu} [(a + \frac{1}{2} p)(BA - \frac{1}{4} p)^N]_{kh}\, m_h (\xi, \xi) = \sum_{k,h=1}^{\nu} [A(BA - \frac{1}{4} p)^N]_{kh}\, m_h (\xi, \xi)$$

или (пользуясь тем, что, как мы уже доказали в § 1, C_{2N+2} является инвариантом !)

$$C_{2N+2} = \sum_{k,h=1}^{\nu} [A(BA - \frac{1}{4} p)^N]_{kh}\, m_h \tag{5.1}$$

Итак, собственные значения операторов Казимира (для группы $O(n)$) четного порядка задаются формулой (5.1), где в силу (4.13), (4.16) и (4.20) A и B – матрицы порядка ν с элементами соответственно

$$A_{kh} = (n - \nu + m_k - k)\delta_{kh} + \theta_{kh}, \quad B_{kh} = (\nu + m_k - k)\delta_{kh} - \theta_{hk}, \quad \theta_{kh} = \begin{cases} 1, & k > h \\ 0, & k \leq h \end{cases} . \tag{5.2}$$

Что же касается операторов Казимира нечетного порядка, то все их собственные значения, согласно (1.9), равны нулю.

Заметим, что в силу (5.2)

$$\sum_{k=1}^{\nu} A_{kh} = m_h + n - 2h,$$

а это дает нам возможность представить (5.1) в виде

$$C_{2N+2} = \sum_{k,h=1}^{\nu} (M^N)_{kh} (m_k + n - 2k) m_h, \quad M = BA - \frac{1}{4} p . \tag{5.3}$$

Таким образом, вычисление оператора C_{2N+2} сведено к элементарной задаче возведения матрицы M в N -ю степень (ср. /2,3/).

В заключение рассмотрим два примера. При $N = 0$ на основании (5.3) находим (так как $(M^0)_{kh} = \delta_{kh}$)

$$C_2 = \sum_{k=1}^{\nu} m_k (m_k + n - 2k); \tag{5.4}$$

этот результат полностью согласуется с соответствующим результатом в /5/, где рассмотрен только случай оператора Казимира второго порядка (для произвольной полупростой группы). Пусть теперь $n = 3$, а N -любое. Так как в таком случае $\nu = 1$, то A и B вырождаются в числа. Точнее, согласно (5.2),

$$A = j + 1, \quad B = j ,$$

где $j = m_1$. Следовательно, в силу (4.13) и (5.3)

$$C_{2N+2} = j(j+1)[\, j(j+1) - \frac{1}{4}\,]^N . \tag{5.5}$$

Как частный случай из (5.4) (при $n = 3$, т.е. $\nu = 1$), либо из (5.5) (при $N = 0$) получается хорошо известное выражение для оператора Казимира второго порядка группы $O(3)$ (из вышесказанного ясно, что через j здесь, как обычно, обозначено то целое или полуцелое неотрицательное число, которое определяет соответствующее неприводимое представление этой группы).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Может показаться, что фундаментальный вектор ξ (см. § 2) является либо старшим, либо младшим вектором. Однако это неверно (при $n > 3$). Действительно, как нетрудно убедиться, связь между генераторами I_{ij} и X^i_j, используемыми соответственно здесь и в /3/, задается формулами

$$\left.\begin{aligned} X^{\eta h}_{\epsilon k} &= -\frac{1}{2}(I_{2k-1,2h-1}+\eta i I_{2k-1,2h})+\frac{1}{2}\epsilon i(I_{2k,2h-1}+\eta i I_{2k,2h}) \\ X^{\eta h}_{0} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(I_{n,2h-1}+\eta i I_{n,2h}),\quad X^{0}_{\epsilon k} = -X^{-\epsilon k}_{0},\quad X^0_0 = 0 \end{aligned}\right\} k,h=1,\dots,\nu,\epsilon,\eta=\pm 1$$

(ϵ и η принимают значения +1 и -1 независимо друг от друга; вторая формула возникает лишь тогда, когда n нечетно; во избежание недоразумений отметим еще, что через n в /3/ обозначается ν). Следовательно, в силу (2.4) имеем, например,

$$X^{h}_{\epsilon k}\,\xi = i(-I_{2k-1,2h}\,\xi + \epsilon i I_{2k,2h}\,\xi),\quad \nu \geq k > h \geq 1,\ \epsilon = \pm 1,$$

а из этого вытекает, как нетрудно убедиться, что

$$X^{h}_{\mp k}\,\xi \neq 0,\quad \pm[h-(\mp k)] > 0.$$

Остается заметить, что старший вектор ψ^+ и младший вектор ψ^- должны удовлетворять условиям (ср. /3/)

$$X^i_j\,\psi^{\pm} = 0 \qquad \text{при} \qquad \pm(i-j) > 0.$$

(Выше предполагалось, что $\nu > 1$, т.е. $n > 3$. Аналогичным образом можно показать, что при $n \leq 3$ ξ является младшим вектором. Очевидно, это исключение несущественно).

Литература

1. И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. ДАН СССР, 71, 1017 (1950).
2. А.М. Переломов, В.С. Попов. ЯФ, 3, 924 (1966).
3. А.М. Переломов, В.С. Попов, ЯФ, 3, 1127 (1966).
4. А.В. Николов. Дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли группы $O(p,q)$ Препринт ОИЯИ, Р5-3140, Дубна, 1967.
5. G.Racah. Group Theory and Spectroscopy. Lecture Notes, Princeton, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1967 г.