ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-3333

В.П. Шелест

ЛЕКЦИИ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ ОДНОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

P2-3333

В.П. Шелест

ЛЕКЦИИ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ ОДНОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Исследование одночастичных состояний представляет собой необходимый этап в построении адекватного аппарата при изучении элементарных частиц и их взаимодействий. Действительно, одночастичные состояния являются объектом изучения при разработке кварковых моделей (как нерелятивистских, так и релятивистских); одночастичными же промежуточными состояниями приходится практически ограничиваться при применении алгебры токов, либо дисперсионных правил сумм к различным физическим задачам.

Поэтому представляется целесообразным напомнить некоторые свойства одночастичных состояний элементарных частиц, которые могут оказаться полезными при рассмотрении конкретных задач. В частности, целью настоящих лекций является краткое изложение релятивистской кинематики одночастичных состояний. Особое внимание будет уделено разработке практически удобного (хотя, может быть, и теряющего в общности) аппарата для лоренц-преобразований над векторами одночастичных состояний. Такие преобразования между различными системами отсчета, предпочтительными из тех или иных физических соображений, представляют интерес при исследовании конкретных задач. В качестве примера подобного преобразования будет рассмотрен переход от системы $P_z \to \infty$ к брейтовской системе отсчета.

§1. Обозначения и нормировка

Введем следующие обозначения для векторов состояний, которые мы будем рассматривать:

$$| p, \ell). \tag{1.1}$$

Здесь p - импульсы состояний, а ℓ - квантовые числа, включающие угловой момент, его проекцию и т.д.

Нетрудно видеть, что состояния типа (1.1) могут описывать как одночастичные, так и многочастичные состояния. Поэтому мы ограничим себя только одночастичными состояниями, определив их следующим образом: состояние типа (1.1) является одночастичным, если в системе центра масс ($\vec{p} = 0$) спектр состояний соответствующей системы является дискретным. Пользуясь этим определением, мы будем, например, считать атом водорода одночастичным состоянием до тех пор, пока он не ионизован. Состояния (1.1) определяются как собственные для оператора энергии-импульса P_a :

$$P_a | p, \ell) = p_a | p, \ell). \tag{1.2}$$

Определим нормировку состояний (1.1) следующим образом:

$$(p', \ell' | p, \ell) = \delta (\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\ell\ell'} . \tag{1.3}$$

Здесь $\delta_{\ell\ell'}$ с учетом нашего определения одночастичности есть просто кронекеровский символ.

Для состояний с одинаковой массой соотношение (1.3) справедливо в любой системе отсчета, однако, имеет лоренц-нековариантный вид. Поэтому мы введем другую, релятивистски-инвариантную нормировку и свяжем ее с нормировкой (1.3).

Заметим, что инвариант $\delta(p - p')$ можно записать как

$$\begin{aligned} \delta(p' - p) &= \delta (\vec{p}' - \vec{p}) \delta (p_0' - p_0) = 2 p_0 \delta (\vec{p}' - \vec{p}) \delta (p_0'^2 - p_0^2) = \\ &= 2 p_0 \delta (\vec{p}' - \vec{p}) \delta (p'^2 - p^2) . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из (1.4) заключаем, что в области, где

$$p'^2 = p^2, \tag{1.5}$$

величина $2p_0\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})$ является инвариантом. Условие (1.5) предполагает, естественно, $\delta_{\ell\ell'}=1$. Запишем теперь вместо (1.3) следующее выражение для нормировки:

$$\langle p', \ell' | p, \ell \rangle = 2p_0\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})\delta_{\ell\ell'} . \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что старые состояния $|p,\ell)$ выражаются через новые состояния $|p,\ell\rangle$ как

$$|p,\ell) = \frac{1}{\sqrt{2p_0}}|p,\ell\rangle . \tag{1.7}$$

Отметим теперь, что если система состояний (1.1) является полной, то произвольное состояние $|\Phi)$ можно разложить по этим базисным состояниям:

$$|\Phi) = \sum_{\ell'} \int |p',\ell')C_{p'\ell'}\, d\vec{p}\,' , \tag{1.8}$$

где

$$C_{p,\ell} = (p,\ell|\Phi) . \tag{1.9}$$

Если выберем

$$|\Phi) = B|p,\ell), \tag{1.10}$$

где B – некоторый оператор, то

$$A|\Phi) = \sum_{\ell''} \int A|p'',\ell'')(p'',\ell''|B|p,\ell)d\vec{p}\,'' \tag{1.11}$$

и

$$(p',\ell'|AB|p,\ell) = \sum_{\ell''} \int (p',\ell'|A|p'',\ell'')(p'',\ell''|B|p,\ell)\,d\vec{p}\,''. \quad (1.12)$$

Заметим в заключение этого параграфа, что с учетом нормировки (1.7) можно записать:

$$(p',\ell'|A|p,\ell) = \frac{1}{\sqrt{4p_0' p_0}} < p',\ell'|A|p,\ell>, \quad (1.13)$$

где A – некоторый оператор.

§2. Унитарные представления группы Лоренца и их генераторы

Как было показано Вигнером /1/, неоднородная группа Лоренца обладает только четырьмя существенно различными классами унитарных представлений; в настоящих лекциях мы ограничимся преобразованиями, сохраняющими временную подобность ($p^2 > 0$) и имеющими детерминант, равный +1.

Лоренц-преобразования указанного типа $\mathfrak{L}$ действуют на координаты следующим образом:

$$x_\nu' = \sum_{\mu=0}^{3} \mathfrak{L}_{\nu\mu}\, x_\mu + a_\nu = \mathfrak{L}x + a. \quad (2.1)$$

Определим скалярное произведение как

$$(x,y) = x_0 y_0 - \vec{x}\,\vec{y} = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} x_\nu y_\nu. \quad (2.2)$$

Здесь метрический тензор выбран диагональным с сигнатурой (+ – – –).

Так как скалярное произведение является лоренц-инвариантным, можно записать:

$$(\mathfrak{L}x, \mathfrak{L}y) = (x, y), \quad (2.3)$$

откуда следуют полезные соотношения

$$(\mathcal{L}x, y) = (x, \mathcal{L}^{-1}y) \qquad (2.4)$$

$$(x, \mathcal{L}y) = (\mathcal{L}^{-1}x, y). \qquad (2.5)$$

Лоренц-преобразованиям $\mathcal{L}$ ставятся в соответствие унитарные представления $U_{\mathcal{L}}$, действующие на состояния $|p, \ell>$

$$\overset{+}{U}_{\mathcal{L}} U_{\mathcal{L}} = 1 \qquad (2.6)$$

$$\overset{+}{U}_{\mathcal{L}} = U_{\mathcal{L}}^{-1} \equiv U_{\mathcal{L}^{-1}} . \qquad (2.7)$$

Если A_ν - некоторый оператор, преобразующийся как компонента вектора, то

$$\overset{+}{U}_{\mathcal{L}} A_\nu U_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}A)_\nu = \mathcal{L}_{\nu\mu} A_\mu \qquad (2.8)$$

$$U_{\mathcal{L}} A_\nu \overset{+}{U}_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}^{-1}A)_\nu = \mathcal{L}^{-1}_{\nu\mu} A_\mu . \qquad (2.9)$$

Преобразование же тензора может быть записано как

$$\overset{+}{U}_{\mathcal{L}} T_{\mu\nu} U_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\mu\mu'} \mathcal{L}_{\nu\nu'} T_{\mu'\nu'} = \mathcal{L}^{(1)}\mathcal{L}^{(2)}T , \qquad (2.10)$$

где над $\mathcal{L}^{(i)}$ мы понимаем лоренц-преобразование, осуществляемое над i -й компонентой тензора. Инфинитезимальные представления десятипараметрической группы $U_{\mathcal{L},a}$ могут быть представлены в форме

$$U_{\mathcal{L},a} = 1 + i a_\mu P_\mu - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \dots , \qquad (2.11)$$

где a_μ и $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ являются инфинитезимальными величинами. Эрмитовы генераторы P_μ и $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям (см., например, /2/)

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \qquad (2.12)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\rho}) \quad (2.13)$$

$$[M_{\mu\nu}\ P_{\rho}] = i(g_{\nu\rho}P_{\mu} - g_{\mu\rho}P_{\nu}). \quad (2.14)$$

Коммутатор (2.14) указывает на определенное неудобство работы с оператором $M_{\mu\nu}$, который не является трансляционно-инвариантным.

Введем помимо операторов трансляции P_{μ} и вращения $M_{\mu\nu}$ новую величину - поляризационный оператор W_{μ}, определяемый следующим образом [2]:

$$W_{\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ g_{\nu\nu}\ g_{\rho\rho}\ g_{\sigma\sigma}\ P_{\nu}\ M_{\rho\sigma}. \quad (2.15)$$

Тензор $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ определяется как:

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, если среди μ, ν, ρ, σ есть пара одинаковых индексов;

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$ при нечетных перестановках μ, ν, ρ, σ;

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -1$ при четных перестановках μ, ν, ρ, σ.

Поляризационный оператор W_{μ} в системе покоя ($\vec{p} = 0$, $p_0 = m$) имеет простой физический смысл [3]:

$$(W_0)_R = 0; \quad (W_i)_R = -m(s_i)_R, \quad (2.16)$$

где s_i - компонента спина рассматриваемого состояния.

Можно проверить, что величины

$$P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 \quad \text{и} \quad W^2 = W_0^2 - \vec{W}^2 \quad (2.17)$$

коммутируют со всеми P_{μ} и $M_{\mu\nu}$ и являются, таким образом, операторами Казимира для $\mathfrak{L}$. Заметим также, что .

$$P^2\,|p, \ell) = p^2\,|p, \ell) = m^2\,|p, \ell). \quad (2.18)$$

Получим некоторые полезные соотношения для W_{μ}. Прежде всего из (2.14) следует, что W_{μ} может быть записан не только в виде (2.15), но и как

$$W_\mu = \frac{1}{2}\sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ g_{\nu\nu}\, g_{\rho\rho}\ g_{\sigma\sigma}\ M_{\rho\sigma}\ P_\nu . \qquad (2.19)$$

Тогда имеем с учетом (2.19) и (2.14):

$$P_\alpha W_\mu - W_\mu P_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ g_{\nu\nu}\, g_{\rho\rho}\ g_{\sigma\sigma} [P_\alpha , M_{\rho\sigma}] P_\nu = 0 . \qquad (2.20)$$

Таким образом, поляризационный оператор W_μ является трансляционно-инвариантным.

Учитывая (2.20), можно также записать:

$$W_{\mu'} W_\mu = \frac{1}{4}\sum_{\substack{\nu'\rho'\sigma' \\ \nu\rho\sigma}} \epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ g_{\nu'\nu'}\ g_{\rho'\rho'}\ g_{\sigma'\sigma'}\ g_{\nu\nu}\ g_{\rho\rho}\ g_{\sigma\sigma} M_{\rho'\sigma'} M_{\rho\sigma} P_{\nu'} P_\nu .$$

Наконец, отметим, что вектор W_μ ортогонален к P_μ, что с очевидностью следует из его структуры:

$$(W , P) = 0 . \qquad (2.22)$$

§3. Связь поляризационного оператора с оператором углового момента

Рассмотрим модифицированный поляризационный оператор $\tilde{\tilde{W}}_\mu$, определенный формулой:

$$\tilde{\tilde{W}}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ g_{\nu\nu}\ g_{\rho\rho}\ g_{\sigma\sigma}\ p_\nu\ M_{\rho\sigma} , \qquad (3.1)$$

где p_ν – собственное значение оператора P_ν. Таким образом,

$$\tilde{\tilde{W}}_\mu \,|\, p , \ell > = W_\mu \,|\, p , \ell > . \qquad (3.2)$$

Используя формулу (2.21), получаем также, что

$$W_{\mu'} W_\mu \,|\, p , \ell > = \tilde{\tilde{W}}_{\mu'} \tilde{\tilde{W}}_\mu \,|\, p , \ell > \qquad (3.3)$$

и, в частности,

$$W^2 \mid p, \ell > = \tilde{\tilde{W}}^2 \mid p, \ell > . \tag{3.4}$$

Аналогичные соотношения можно получить, действуя оператором W_μ на состояния $| p, \ell >$ неограниченное число раз. Таким образом, на состояниях $| p, \ell >$ оператор W_μ совпадает с $\tilde{\tilde{W}}_\mu$. Нетрудно видеть, что вектор $\tilde{\tilde{W}}_\mu$ перпендикулярен к p_μ

$$(\tilde{\tilde{W}}, p) = 0 . \tag{3.5}$$

Кроме того, из (3.2) заключаем, что если $| p, \ell >$ является собственной функцией для P , то и $W | p, \ell >$ также является собственной функцией с тем же собственным значением

$$P W \mid p, \ell > = p W \mid p, \ell > . \tag{3.6}$$

Для удобства работы в дальнейшем введем релятивистскую тетраду в виде

$$n^{(0)} = (1,0,0,0)$$
$$n^{(1)} = (0,1,0,0)$$
$$n^{(2)} = (0,0,1,0)$$
$$n^{(3)} = (0,0,0,1)$$

Заметим здесь, что можно, таким образом, характеризовать систему отсчета величинами $n^{(0)}, \vec{p}$. По построению

$$(n^{(\alpha)}, n^{(\beta)}) = g_{\alpha\beta} . \tag{3.8}$$

Совершим лоренц-преобразование от системы, связанной с покоящейся, к системе, связанной с движущейся частицей. Тогда базисная тетрада (3.7) преобразуется следующим образом:

$$s^{(\alpha)} = \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} \, n^{(\alpha)} . \tag{3.9}$$

В частности, получаем

$$s^{(0)} = \frac{p}{m} . \tag{3.10}$$

Несколько отвлекаясь, заметим здесь, что, используя обозначение (3.9), можно записать, что

$$\tilde{\tilde{W}}_i = \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} s_i \, . \tag{2.16'}$$

Так как условие (3.8) должно быть лоренц-инвариантным, имеем

$$(s^{(\alpha)} , s^{(\beta)}) = g_{\alpha\beta} \tag{3.11}$$

и $\qquad (s^{(j)})^2 = -1 \quad ; \quad j = 1,2,3 \, .$

Учитывая, что $\tilde{\tilde{W}}$ ортогонально к $s^{(0)}$ (что следует из (3.5) и (3.10)), можем следующим образом разложить $\tilde{\tilde{W}}$ по ортам новой системы отсчета:

$$\tilde{\tilde{W}} = - \sum_{j=1}^{3} s^{(j)} (\tilde{\tilde{W}} \, s^{(j)}) \, . \tag{3.12}$$

Кроме того,

$$\tilde{\tilde{W}}^2 = - \sum_{j=1}^{3} (\tilde{\tilde{W}} \, s^{(j)})^2 \, . \tag{3.13}$$

Положим теперь, по определению,

$$(\tilde{\tilde{W}} \, s^{(j)}) = J_j \, m \quad ; \quad j = 1,2,3 \, , \tag{3.14}$$

где J_j – некоторый вектор, свойства которого нам надлежит выяснить.

Перепишем определение для J_j :

$$J_j = \frac{1}{m} (\tilde{\tilde{W}} \, s^{(j)}) = \frac{1}{m} (\tilde{\tilde{W}} \, \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(j)}) = \frac{1}{m} (\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}} \, n^{(j)}) \, . \tag{3.15}$$

Будем теперь совершать необходимое лоренц-преобразование над $\tilde{\tilde{W}}$.

$$\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}}_\mu = \frac{1}{2} \Lambda^{(1)} \sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, g_{\nu\nu} \, g_{\rho\rho} \, g_{\sigma\sigma} \, p_\nu \, M_{\rho\sigma} \, . \tag{3.16}$$

Так как одновременное лоренц-преобразование всех компонент полностью антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ не должно менять его, имеем

$$\Lambda^{(1)}{}_{\epsilon} = \Lambda^{(2)-1} \Lambda^{(3)-1} \Lambda^{(4)-1}{}_{\epsilon} \,. \qquad (3.17)$$

Тогда из (3.16) получаем

$$\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{\nu\nu}\, g_{\rho\rho}\, g_{\sigma\sigma}\, \Lambda\, p_{\nu}\, \Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)} M_{\rho\sigma} \,. \qquad (3.18)$$

Но

$$\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}}\, p = m\, n^{(0)} \qquad (3.19)$$

и

$$\Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)} M_{\rho\sigma} = \overset{+}{U}\, \Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}}\, M_{\rho\sigma}\, U \Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}} = M'_{\rho\sigma} \,, \qquad (3.20)$$

где $M'_{\rho\sigma}$ – оператор вращения в новой системе отсчета.

Таким образом, имеем:

$$\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}}_j = \frac{m}{2} \sum_{\rho\sigma} \epsilon_{j\rho\sigma}\, M'_{\rho\sigma} \,, \qquad (3.21)$$

где трехмерный тензор $\epsilon_{j\rho\sigma}$ определяется как

$$\epsilon_{j\rho\sigma} = - \epsilon_{0j\rho\sigma} \qquad (3.22)$$

и

$$\epsilon_{1,2,3} = 1 \,. \qquad (3.23)$$

Итак, мы получили

$$J_j = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \epsilon_{j\rho\sigma}\, M'_{\rho\sigma} \,. \qquad (3.24)$$

Учитывая, что между $M'_{\alpha\beta}$ имеют место те же перестановочные соотношения, что и между $M_{\alpha\beta}$, можем теперь записать

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma . \tag{3.25}$$

Оператор J, определенный перестановочными соотношениями (3.25), мы идентифицируем с оператором углового момента, действие которого на состояния $|p,\ell>$ нам известно.

Тогда, учитывая, что

$$\tilde{W}^2 = -\vec{J}^2 m^2 , \tag{3.26}$$

имеем

$$W^2 | p, \ell > = -\vec{J}^2 m^2 | p, \ell > = -m^2 j(j+1) | p, \ell > . \tag{3.27}$$

Целесообразно теперь раскрыть индекс ℓ в обозначении $| p, \ell >$

$$\ell = j, \lambda, N ,$$

где j – полный угловой момент, λ – его прекция на выбранную ось (например, на третью) и N – прочие квантовые числа рассматриваемого одночастичного состояния.

Дополним, наконец, формулу (3.27) определением

$$J_3 | p, j, \lambda, N > = \frac{1}{m} (W s^{(3)}) | p, j, \lambda, N > = \lambda | p, j, \lambda, N > . \tag{3.28}$$

После того как мы ввели соотношение (3.28) и, следовательно, определили J_3 как диагональную матрицу вида

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & & \\ & \ddots & \\ & & -j \end{pmatrix} , \tag{3.29}$$

остальные две матрицы $J_{1,2}$ легко определятся с помощью (3.25).

§4. Преобразования Лоренца одночастичных состояний

Рассмотрим действие лоренц-вращения на одночастичное состояние, выбрав в некоторой системе отсчета ось z и спроецировав на эту ось угловой момент состояния. Тогда, поскольку j является инвариантом, мы можем записать действие представления $U_{\mathfrak{L}}$ на состояние $|p, \ell>$ следующим образом:

$$U_{\mathfrak{L}} | p, \lambda, j, N > = \sum_{\lambda'} (S_{\mathfrak{L}})_{\lambda\lambda'} | \mathfrak{L}p, \lambda', j, N > \equiv \tag{4.1}$$

$$\equiv S_{\mathfrak{L}} | \mathfrak{L}p, \lambda, j, N > .$$

Заметим, что подробности вывода (4.1) можно найти в работах [1,4,5]. Нашей задачей является определение явного вида оператора $S_{\mathfrak{L}}$. Перепишем уравнение (3.28) и подействуем на обе части этого уравнения оператором $U_{\mathfrak{L}}$.

Тогда имеем

$$\frac{1}{m}(U_{\mathfrak{L}} W \overset{+}{U}_{\mathfrak{L}} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(3)}) U_{\mathfrak{L}} | p, \lambda, j, N > = \lambda U_{\mathfrak{L}} | p, \lambda, j, N >, \tag{4.2}$$

что (с учетом (4.1)) принимает вид:

$$\frac{1}{m}(U_{\mathfrak{L}} W \overset{+}{U}_{\mathfrak{L}} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(3)}) S_{\mathfrak{L}} | \mathfrak{L}p, \lambda, j, N > = \lambda S_{\mathfrak{L}} | \mathfrak{L}p, \lambda, j\ N >. \tag{4.3}$$

Левая часть соотношения (4.3) может быть преобразована следующим образом:

$$(U_{\mathfrak{L}} W \overset{+}{U}_{\mathfrak{L}} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(3)}) = (\mathfrak{L}^{-1} W \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(3)}) =$$
$$= (W \mathfrak{L} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n^{(3)}) = (W \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{\mathfrak{L}p}{m}} \mathfrak{R} n^{(3)}), \tag{4.4}$$

где мы ввели новое обозначение:

$$\mathfrak{R} = \Lambda^{-1}_{n^{(0)} \to \frac{\mathfrak{L}p}{m}} \mathfrak{L} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} . \tag{4.5}$$

Легко убедиться, что $\mathfrak{R}$ является оператором пространственного вращения, т.е. оставляет инвариантной временную ось. Действительно,

$$\mathfrak{R} n^{(0)} = \Lambda^{-1}_{n^{(0)} \to \frac{\mathfrak{L}p}{m}} \mathfrak{L} \frac{p}{m} = \Lambda_{\frac{\mathfrak{L}p}{m} \to n^{(0)}} \frac{\mathfrak{L}p}{m} = n^{(0)} . \tag{4.6}$$

Отметим, что состояния

$$S_{\mathfrak{L}} \mid \mathfrak{L}p, \lambda', j, N >$$

являются собственными для P_a ; на этих состояниях вместо P_a можно писать $\mathfrak{L}p_a$ и можно ввести модифицированный поляризованный оператор $\tilde{\tilde{W}}_{\mathfrak{L}}$, в котором вместо p_a стоит $\mathfrak{L}p_a$.

Теперь J_j для собственного состояния $P = \mathfrak{L}p$ запишется

$$J_j = \frac{1}{m} (\Lambda_{\frac{\mathfrak{L}p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}}_{\mathfrak{L}} n^{(j)}) . \tag{4.7}$$

Тогда можно переписать (4.3) следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda S_{\mathfrak{L}} \mid \mathfrak{L}p, \lambda, j, N > &= \frac{1}{m} (\Lambda_{\frac{\mathfrak{L}p}{m} \to n^{(0)}} \tilde{\tilde{W}}_{\mathfrak{L}} \mathfrak{R} n^{(3)}) S_{\mathfrak{L}} \mid \mathfrak{L}p, \lambda, j, N > = \\ &= \sum_{j=1}^{3} J_j (\mathfrak{R} n^{(3)})_j S_{\mathfrak{L}} \mid \mathfrak{L}p, \lambda, j, N > = (\overrightarrow{\mathfrak{R}^{-1} J} \vec{n}^{(3)}) S_{\mathfrak{L}} \mid \mathfrak{L}p, \lambda, j, N >. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Конкретизируем поворот, описываемый оператором $\mathfrak{R}$.

Пусть осью поворота $\vec{e}$ будет ось $n^{(2)}$, и угол отсчитывается в положительном направлении против часовой стрелки. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R} n)_1 &= n^{(1)} \cos\phi - n^{(3)} \sin\phi \\ (\mathfrak{R} n)_3 &= n^{(3)} \cos\phi + n^{(1)} \sin\phi . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Введем новые величины $J_j(\phi)$ /16/, определяемые соотношениями

$$e^{i\phi J_2} J_{1,3} e^{-i\phi J_2} = J_{1,3}(\phi) \tag{4.10}$$

$$J_2(\phi) = J_2. \tag{4.11}$$

Дифференцируя (4.10) и (4.11) по ϕ , получим

$$\frac{d J_1(\phi)}{d\phi} = J_3(\phi) \tag{4.12}$$

$$\frac{d J_3(\phi)}{d\phi} = -J_1(\phi). \tag{4.13}$$

Откуда следует

$$J_1(\phi) = J_1 \cos\phi + J_3 \sin\phi = (\Re^{-1} J)_1 \tag{4.14}$$

$$J_3(\phi) = J_3 \cos\phi - J_1 \sin\phi = (\Re^{-1} J)_3. \tag{4.15}$$

Таким образом,

$$\Re^{-1} J = e^{i\phi J_2} J e^{-i\phi J_2} \tag{4.16}$$

либо при повороте вокруг произвольной оси $\vec{e}$

$$\Re^{-1} J = e^{i\phi(\vec{J}\vec{e})} J e^{-i\phi(\vec{J}\vec{e})}. \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в (4.8), получим:

$$e^{i\phi(\vec{J}\,\vec{e})}\, J_3\, e^{-i\phi(\vec{J}\,\vec{e})}\, S_{\mathfrak{L}} |\, \mathfrak{L}p,\lambda,j,N> = \lambda S_{\mathfrak{L}} |\mathfrak{L}p,\lambda,j,N>. \qquad (4.18)$$

Из формулы (4.18), наконец, заключаем:

$$S_{\mathfrak{L}} = e^{i\phi(\vec{J}\,\vec{e})}. \qquad (4.19)$$

Таким образом,

$$U_{\mathfrak{L}} |\, p,\lambda,j,N> = \sum_{\lambda'=1}^{3} \{ e^{i\phi(\vec{J}\,\vec{e})} \}_{\lambda\lambda'} |\mathfrak{L}p,\lambda',j,N>. \qquad (4.20)$$

Мы можем несколько обобщить результат (4.20). Именно, рассмотрим состояние с уже повернутым относительно какой-либо оси $\vec{\epsilon}$ спином:

$$e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})} |\, p,\lambda,j,N>. \qquad (4.21)$$

Теперь мы должны проецировать на третью ось уже повернутый спин. Таким образом, вместо (3.28) имеем

$$(\mathfrak{R}'^{-1} J_3)\, e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})} |\, p,\lambda,j,N> = \lambda\, e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})} |\, p,\lambda,j,N>, \qquad (4.22)$$

где

$$(\mathfrak{R}'^{-1} J_3) = e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})}\, J_3\, e^{-i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})}. \qquad (4.23)$$

Тогда, учитывая результаты предыдущего рассмотрения, можно записать:

$$(\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{R}'^{-1} J_3) S_{\mathfrak{L}}\, e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})} |\, p,\lambda,j,N> = \lambda S_{\mathfrak{L}}\, e^{i\theta(\vec{J}\,\vec{\epsilon})} |\, p,\lambda,j,N>, \qquad (4.24)$$

причем

$$\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}'^{-1} J_3 = e^{i\phi(\vec{J}\vec{e})} e^{i\theta(\vec{J}\vec{\epsilon})} J_3 e^{-i\theta(\vec{J}\vec{\epsilon})} e^{-i\phi(\vec{J}\vec{e})} . \tag{4.25}$$

Теперь легко видеть, что оператор $S_{\mathfrak{L}}$, определенный на новых состояниях (4.21), имеет тот же вид, что и раньше, а именно:

$$S_{\mathfrak{L}} = e^{i\phi(\vec{J}\vec{e})} . \tag{4.26}$$

И, следовательно,

$$U_{\mathfrak{L}} e^{i\theta(\vec{J}\vec{\epsilon})} | p, \lambda, j, N > = e^{i\phi(\vec{J}\vec{e})} e^{i\theta(\vec{J}\vec{\epsilon})} | p, \lambda, j, N > . \tag{4.27}$$

Таким образом, задача о лоренцовом преобразовании одночастичных состояний сводится к нахождению угла поворота ϕ вокруг соответствующей оси. В следующем параграфе мы проделаем вычисление угла ϕ для случая преобразования от системы $P_z \to \infty$ к брейтовской системе и увидим, что угол ϕ является, вообще говоря, функцией передачи импульса и масс начального и конечного состояний.

§5. Переход от системы $P_z \to \infty$ к брейтовской системе

Пусть мы имеем два одночастичных состояния, которые можно соответственно рассматривать как начальное и конечное для некоторого процесса. Нашей задачей будет переход от пары состояний

$$\begin{gathered} | -\frac{k}{2}, 0, P_z, p_0, \lambda, j, N > \\ | \frac{k}{2}, 0, P_z, \tilde{p}_0, \lambda', j', N' > \end{gathered} \tag{5.1}$$

к паре состояний

$$| -\frac{q}{2}, 0, 0, p_0, \lambda, j, N >$$

$$| \frac{q}{2}, 0, 0, \tilde{\tilde{p}}_0, \lambda', j', N' > . \tag{5.2}$$

Здесь $P_z \to \infty$, а p_0 и $\tilde{\tilde{p}}_0$ определяются формулами:

$$p_0 = \sqrt{M^2 + P_z^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}, \tag{5.3}$$

$$\tilde{\tilde{p}}_0 = \sqrt{M'^2 + P_z^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}. \tag{5.4}$$

Мы будем последовательно преобразовывать пару состояний (5.1) в пару состояний

$$| -\frac{k}{2}, 0, -\frac{\ell_z}{2}, p_0, \lambda, j, N >$$

$$| \frac{k}{2}, 0, \frac{\ell_z}{2}, \tilde{\tilde{p}}_0, \lambda', j', N' > \tag{5.5}$$

путем поворота в плоскости (0,3), а затем, делая чисто пространственный поворот (1,3), получим из (5.5) состояния (5.2).

Совершая лоренц-поворот в плоскости (0,3) на угол α, получим

$$p_3' = p_3 \operatorname{ch} \alpha - p_0 \operatorname{sh} \alpha$$

$$\tilde{\tilde{p}}_3' = p_3 \operatorname{ch} \alpha - \tilde{\tilde{p}}_0 \operatorname{sh} \alpha, \tag{5.6}$$

причем из (5.5) видно, что должно выполняться условие

$$p_3' + \tilde{\tilde{p}}_3' = 0 . \tag{5.7}$$

Отсюда имеем:

$$2 p_3 \operatorname{ch} \alpha = (p_0 + \tilde{\tilde{p}}_0) \operatorname{sh} \alpha , \tag{5.8}$$

откуда, в частности, получаем

$$p_3 \operatorname{ch} \alpha - p_0 \operatorname{sh} \alpha = \frac{\tilde{\tilde{p}}_0 - p_0}{2} \operatorname{sh} \alpha . \tag{5.9}$$

Возводя (5.8) в квадрат, и устремляя P_z к бесконечности, получаем важное соотношение

$$\lim_{P_z \to \infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{P_z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} . \tag{5.10}$$

Заметим здесь, что правая часть формулы (5.10) может быть выражена через энергии одночастичных состояний в брейтовской системе (5.2).

Действительно, вводя брейтовские энергии

$$\epsilon_q = \sqrt{M^2 + q^2/4} \tag{5.11}$$

$$\epsilon_{q'} = \sqrt{M'^2 + q^2/4} \tag{5.12}$$

после несложных выкладок получим (в пределе $P_z \to \infty$):

$$\lim_{P_z \to \infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{P_z} = \frac{2}{\epsilon_q + \epsilon_{q'}} . \tag{5.13}$$

Определим теперь величину $\left(- \frac{\ell_z}{2} \right)$ из соотношения (5.5). Имеем

$$- \frac{\ell_z}{2} = \frac{\tilde{P}_0 - P_0}{2} \operatorname{sh} \alpha = \frac{M'^2 - M^2}{+\sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} . \tag{5.14}$$

Наконец, импульс в брейтовской системе q определится с учетом (5.14) следующей формулой

$$q^2 = \frac{(M^2 - M'^2)^2 + 4k^2 \left(\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4} \right)}{4 \left(\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4} \right)} . \tag{5.15}$$

Для дальнейших выкладок нам потребуются выражения, описывающие преобразования ортов некоторого базиса под действием лоренц-преобразования $\Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}}$. Имеем

$$\Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}} n = n'' \tag{5.16}$$

$$n_0' = \frac{p_0}{m} n_0 - \frac{\vec{p}\,\vec{n}}{m} . \qquad (5.17)$$

Пространственные орты $\vec{n}$ удобно разложить на части – параллельную и перпендикулярную к пространственной части импульса преобразования

$$\vec{n} = \vec{n}_\perp + \frac{\vec{p}\,(\vec{p}\,\vec{n})}{\vec{p}^{\,2}} , \qquad (5.18)$$

где

$$(\vec{n}_\perp \vec{p}) = 0 . \qquad (5.19)$$

Тогда

$$\vec{n}' = \vec{n} + \left(\frac{p_0}{m} - 1 \right) \frac{\vec{p}}{\vec{p}^{\,2}} (\vec{p}\,\vec{n}) + \frac{\vec{p}}{m} n_0 . \qquad (5.20)$$

Заменой $\vec{p}$ на $-\vec{p}$ мы можем получить из (5.18) и (5.20) преобразование $\Lambda_{\frac{p}{m} \to n^{(0)}}$.

Пользуясь соотношениями (5.18) и (5.20), совершим преобразование пространственного орта $(\vec{n}\ ,\ n_0 = 0)$ типа

$$\Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}}\, n ,$$

где компоненты p заданы первым состоянием (5.1). Тогда (опять в пределе $P_z \to \infty$) получим

$$\begin{aligned}
n_0' &= \frac{1}{M} \left(n_3 P_z - \frac{k}{2} n_1 \right) \\
n_1' &= n_1 - \frac{k}{2M} n_3 \\
n_2' &= n_2 \\
n_3' &= n_3 + \left(\frac{p_0}{M} - 1 \right) \frac{\left(n_3 P_z - \frac{k}{2} n_1 \right) P_z}{P_z^2 + \frac{k^2}{4}} .
\end{aligned} \qquad (5.21)$$

Преобразуем теперь орты n' лоренц-поворотом в плоскости (0,3), задаваемым (5.6). Тогда получим

$$n'' = \mathfrak{L} n' = \mathfrak{L}\,\Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}}\, n \tag{5.22}$$

$$n_0'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} \left\{ \left(\frac{M'^2 - M^2 + k^2}{4M} \right) n_3 - \frac{k}{2} n_1 \right\}$$

$$n_1'' = n_1 - \frac{k}{2M} n_3$$

$$n_2'' = n_2 \tag{5.23}$$

$$n_3'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} \left\{ \left(\frac{M}{2} + \frac{M'^2 + M^2}{4M} \right) n_3 + \frac{k}{2} n_1 \right\}.$$

И, наконец, совершим последний поворот в плоскости (1,3):

$$x_3' = x_3 \cos\theta + x_1 \sin\theta$$

$$x_1' = x_1 \cos\theta - x_3 \sin\theta\,. \tag{5.24}$$

В соответствии с (5.2) получаем:

$$\left(\mathfrak{L}_{1,3} \mathfrak{L}_{0,3} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}}\, n \right)_3 = -\frac{\ell_z}{2} \cos\theta - \frac{k}{2} \sin\theta = 0$$

$$\left(\mathfrak{L}_{1,3} \mathfrak{L}_{0,3} \Lambda_{n^{(0)} \to \frac{p}{m}}\, n \right)_1 = -\frac{k}{2} \cos\theta + \frac{\ell_z}{2} \sin\theta = -\frac{q}{2}\,. \tag{5.25}$$

Теперь можем записать

$$n_3''' = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} \left\{ \left(\frac{M}{2} + \frac{M'^2 + M^2}{4M} \right) n_3 + \frac{k}{2} n_1 \right\} + \tag{5.26}$$

$$+ \sin\theta \left(n_1 - \frac{k}{2M} n_3 \right),$$

где

$$\sin\theta = \frac{-\ell_z}{\sqrt{\ell_z^2 + k^2}} \tag{5.27}$$

$$\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{\ell_z^2 + k^2}}\,. \tag{5.28}$$

Найдем теперь результирующий угол поворота от n к n'''. Резюмируя ранее проделанные преобразования, получим

$$n_3''' = n_3 \cos\phi + n_1 \sin\phi \tag{5.29}$$

$$n_3''' = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2+M'^2}{2} + \frac{k^2}{4}}} \left\{ \frac{n_1}{q}\left(\frac{k^2}{2} - \frac{M^2-M'^2}{2}\right) + \frac{n_3 k}{q}\left(\frac{M}{2} + \frac{M'^2+M^2}{4M} + \frac{M^2-M'^2}{4M}\right)\right\}. \tag{5.30}$$

Из (5.30), наконец, мы находим

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{M'^2 - M^2 + k^2}{2kM}. \tag{5.31}$$

Из (5.31) можно заключить, что

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{M'-M}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{k}{M'+M}. \tag{5.32}$$

Действительно, разбивая формально ϕ на два последовательных поворота $\phi = \Phi + \theta$, получим

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\Phi\,\operatorname{tg}\theta} = \frac{M'^2 - M^2 + k^2}{2Mk}, \tag{5.33}$$

что совпадает с (5.31).

Заметим в заключение, что поворот на угол ϕ, определенный (5.32), совершается при преобразовании первого из состояний (5.1); второе же состояние будет поворачиваться на угол

$$\phi' = \operatorname{arc\,tg}\frac{M'-M}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{k}{M'+M}. \tag{5.34}$$

§6. Преобразования матричных элементов операторов, взятых на состояниях с $P_z \to \infty$.

Рассмотрим матричный элемент нулевой компоненты некоторого векторного оператора

$$< p,' \lambda,' j,' N' \mid A_\mu (x) \mid p, \lambda, j, N > . \tag{6.1}$$

Вследствие трансляционной инвариантности можно записать

$$< p,' \lambda,' j,' N' \mid A_\mu (x) \mid p, \lambda, j, N > = e^{-i(p-p')x} < p,' \lambda,' j,' N' \mid A_\mu (0) \mid p, \lambda, j, N > \tag{6.2}$$

Беря же в обкладки выражения типа фурье-компонент зарядовых плотностей

$$\int A_\mu (0, \vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d\vec{x} , \tag{6.3}$$

получаем

$$< p,' \lambda,' j,' N' \mid \int A_\mu (0, \vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d\vec{x} \mid p, \lambda, j, N > = \delta(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{q}) < p,' \lambda,' j,' N' \mid A_\mu (0) \mid p, \lambda, j, N > . \tag{6.4}$$

Таким образом, для наших целей можно ограничиться рассмотрением матричных элементов компонент с нулевым импульсом $A_\mu (0)$.

Рассмотрим теперь матричный элемент $A_0 (0)$, взятый между состояниями (5.1).

$$\begin{aligned} &< \frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda', j', N', p_0 \mid A_0 (0) \mid -\frac{k}{2}, 0, P_z, j, \lambda, N, \tilde{p}_0 > \equiv N_0 = \\ &= < \frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda', j', N', p_0 \mid U^\dagger_{\mathfrak{L}} U_{\mathfrak{L}} A_0 (0) U^\dagger_{\mathfrak{L}} U_{\mathfrak{L}} \mid -\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda, j, N, \tilde{p}_0 > , \end{aligned} \tag{6.5}$$

где

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{1,3} \mathfrak{L}_{0,3} \tag{6.6}$$

и

$$\begin{aligned} &U_{\mathfrak{L}} \mid -\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda, j, N, p_0 > = e^{i\phi J y} \mid -\frac{q}{2}, 0, 0, \lambda, j, N, p_0' > \\ &U_{\mathfrak{L}} \mid \frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda', j', N', \tilde{p}_0 > = e^{i\phi' J y} \mid \frac{q}{2}, 0, 0, \lambda', j', N', \tilde{p}' > . \end{aligned} \tag{6.7}$$

В формулах (6.7) углы ϕ и ϕ' определяются через выражения (5.32) и (5.34) соответственно.

Напомним, кроме того, что

$$U_{\mathfrak{L}} A_0(0) \overset{+}{U}_{\mathfrak{L}} = (\mathfrak{L}^{-1} A)_0 = (\mathfrak{L}^{-1}_{0,3}\, \mathfrak{L}^{-1}_{1,3}\, A)_0 . \tag{6.8}$$

Теперь можно записать с учетом нормировки §1:

$$\left(\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda', j', N', p_0 \,\middle|\, A_0(0) \,\middle|\, -\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda, j, N, \tilde{\tilde{p}}_0\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{M^2 + q^2/4}\ \sqrt[4]{M'^2 + q^2/4}}{\sqrt[4]{M^2 + P_z^2 + k^2/4}\ \sqrt[4]{M'^2 + P_z^2 + k^2/4}} \times \tag{6.9}$$

$$\times \left(\frac{q}{2}, 0, 0, \lambda', j', N', p_0' \,\middle|\, e^{-i\phi' J_y} \{\mathfrak{L}^{-1}_{0,3}\, \mathfrak{L}^{-1}_{1,3}\, A\}_0\, e^{i\phi J_y} \,\middle|\, -\frac{q}{2}, 0, 0, \lambda, j, N, \tilde{\tilde{p}}_0'\right)$$

Выпишем преобразование $(\mathfrak{L}^{-1} A)_0$:

$$(\mathfrak{L}^{-1}_{0,3}\, \mathfrak{L}^{-1}_{1,3}\, A)_0 = A_0 \operatorname{ch} a + (A_3 \cos\theta - A_1 \sin\theta) \operatorname{sh} a . \tag{6.10}$$

Так как $\operatorname{sh} a \approx P_z$ (что видно из (5.10)), то получаем

$$\lim_{P_z \to \infty} \operatorname{ch} a = \operatorname{sh} a . \tag{6.11}$$

Таким образом,

$$\lim_{P_z \to \infty} \left(\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda', j', N', p_0 \,\middle|\, A_0(0) \,\middle|\, -\frac{k}{2}, 0, P_z, \lambda, j, N, \tilde{\tilde{p}}_0\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{M^2 + q^2/4}\ \sqrt[4]{M'^2 + q^2/4}}{\sqrt{\dfrac{M^2 + M'^2}{2} + k^2/4}} \left(\frac{q}{2}; 0, 0, \lambda', j', N', p_0' \,\middle|\, e^{-i\phi' J_y} \times \right. \tag{6.12}$$

$$\left. \times \{A_0(0) + A_3 \cos\theta - A_1 \sin\theta\}\, e^{i\phi J_y} \,\middle|\, -\frac{q}{2}, 0, 0, \lambda, j, N, \tilde{\tilde{p}}_0'\right).$$

Заметим, что

$$(\mathfrak{L}^{-1}_{0,3}\, \mathfrak{L}^{-1}_{1,3}\, A)_3 = (A_3 \cos\theta - A_1 \sin\theta) \operatorname{ch} a + A_0 \operatorname{sh} a . \tag{6.13}$$

Учитывая (6.11), без труда получим теперь:

$$\lim_{P_z\to\infty}\left(\frac{k}{2},0,P_z,\lambda',j',N',p_0\,\middle|\,A_0(0)\,\middle|\,-\frac{k}{2},0,P_z,\lambda,j,N,\tilde{\tilde{p}}_0\right)= \tag{6.14}$$

$$=\lim_{P_z\to\infty}\left(\frac{k}{2},0,P_z,\lambda',j',N',p_0\,\middle|\,A_3(0)\,\middle|\,-\frac{k}{2},0,P_z,\lambda,j,N,\tilde{\tilde{p}}_0\right).$$

В то же время компоненты $A_1(0)$, $A_2(0)$, не преобразующиеся поворотом (0,3), не будут давать фактора $\mathrm{sh}\,\alpha$ либо $\mathrm{ch}\,\alpha$, и, таким образом, будут обращаться в нуль при $P_z\to\infty$.

$$\left(\frac{k}{2},0,P_z,\lambda',j',N'm,p_0\,\middle|\,A_{1,2}(0)\,\middle|\,-\frac{k}{2},0,P_z,\lambda,j,N,\tilde{p}_0\right)\approx\frac{1}{P_z}. \tag{6.15}$$

Аналогичное поведение будет иметь место для скалярных и псевдоскалярных величин.

§7. Операции пространственного и временного отражений одночастичных состояний

Прежде чем переходить к нахождению вида операторов пространственного и временного отражений, сделаем ряд замечаний относительно преобразований, рассмотренных в §5. Мы проделывали там преобразования от состояний типа

$$\left\langle -\frac{k}{2},0,P_z\right| \qquad \text{и} \qquad \left\langle \frac{k}{2},0,P_z\right| \tag{7.1}$$

(где опущены для простоты все индексы, кроме пространственных компонент импульса) к состояниям в брейтовской системе

$$\left\langle -\frac{q}{2},0,0\right| \qquad \text{и} \qquad \left\langle \frac{q}{2},0,0\right|. \tag{7.2}$$

Заметим, однако, что состояния (7.1) могут быть, в свою очередь, преобразованы путем бесконечно малого (при $P_z\to\infty$) поворота в плоскости (1,3) к состояниям вида

$$< -\frac{k}{2} + \kappa\ , 0\ , P_z\ | \quad \text{и} \qquad < \frac{k}{2} + \kappa\ , 0\ , P_z\ | . \tag{7.3}$$

Далее, бесконечно малым поворотом в плоскости (2,3) можно преобразовать (7.3) к состояниям с ненулевой y – компонентой импульса

$$< -\frac{k}{2} + \kappa\ , \chi\ , P_z\ | \qquad \text{и} \qquad < \frac{k}{2} + \kappa\ , \chi\ , P_z\ | . \tag{7.4}$$

Таким образом, мы можем проделывать цепь преобразований не только от (7.1) к (7.2), но также от гораздо более общих состояний (7.4) к (7.1).

Займемся теперь определением оператора пространственной четности одночастичных состояний. По определению

$$\hat{P}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > = \epsilon\ |\ -\vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > , \tag{7.5}$$

где ϵ – внутренняя четность рассматриваемого состояния.

Однако можно заметить, что в системе $P_z \to \infty$ имеем

$$|\ -\vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > = e^{-i\pi J_y}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > , \tag{7.6}$$

в чем легко убедиться, приняв во внимание возможность перехода в системе $P_z \to \infty$ от состояний (7.4) к состояниям (7.3).

Таким образом, получаем

$$\hat{P}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > = \epsilon\ e^{-i\pi J_y}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > . \tag{7.7}$$

Рассмотрим теперь временное отражение. Когда антиунитарный оператор временного отражения $\hat{T}$ действует на наше одночастичное состояние, он преобразует его к состоянию с той же спиральностью λ, но с импульсом P_z в обратном направлении /4,6/.

Тогда

$$\hat{T}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > = \tau\ e^{-i\pi J_y}\ |\ \vec{p}\ , p_0\ , \lambda\ , j\ , N\ > . \tag{7.8}$$

Действие же оператора внутренней временной четности можно записать следующим образом:

$$\tau \mid \vec{p}, p_0, \lambda, j, N > = (-1)^{j+\lambda} \mid p_0, -\vec{p}, -\lambda, j N >. \qquad (7.9)$$

Действительно, мы должны иметь $\tau^2 = \pm 1$ при действии на наши одночастичные состояния.

В самом деле,

$$\tau^2 \mid \vec{p}, p_0, \lambda, j, N > = \tau (-1)^{j+\lambda} \mid -\vec{p}, p_0, -\lambda, j, N > =$$

$$= (-1)^{2j} \mid \vec{p}, p_0, \lambda, j, N > = \pm \mid \vec{p}, p_0, \lambda, j, N >. \qquad (7.10)$$

Таким образом, получаем

$$\hat{T} \mid \vec{p}, p_0, \lambda, j, N > = (-1)^{j+\lambda} e^{-i\pi J_y} \mid p_0, -\vec{p}, -\lambda, j, N >. \qquad (7.11)$$

Отметим, наконец, в заключение, что наш выбор λ как проекции j на неподвижную третью ось приводит к тому, что в системе $P_z \to \infty$ наше λ совпадает со спиральностью, определенной в работах /6,7/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К задаче построения релятивистской теории элементарных частиц существует целый ряд подходов. Из них можно отметить весьма интенсивно развивавшееся в последнее время направление, стремившееся объединить группу Пуанкаре с внутренними симметриями, с тем, чтобы классифицировать затем элементарные частицы и резонансы по представлениями полученной группы (либо по одному лишь бесконечномерному представлению) /8-12/. Широко известны трудности, встретившиеся на пути осуществления такой программы.

Другим подходом является развитие кварковых моделей, когда из ограниченного числа фундаментальных частиц (или квазичастиц, если не настаивать на физичности свободных кварков) строятся связанные состояния, отождествляющиеся с барионами и мезонами. Множество привлекательных сторон этого подхода не может, однако, скрыть того обстоятельства, что большинство кварковых моделей являются в настоящее время весьма интуитивными и приближенными.

Можно, далее, работать в некоторой специальной системе отсчета, дающей ряд преимуществ как при проведении подсчетов, так и с принципиальной точки зрения.

С другой стороны, чтобы переходить к физически удобной системе отсчета, такой, как, например, система $p_z \to \infty$ /13-15/, необходимо иметь полную систему одночастичных состояний, и знать, как эти одночастичные состояния преобразуются при произвольных лоренц-поворотах и сдвигах. Отметим, что нахождение такой системы является, собственно говоря, целью также и ранее перечисленных подходов.

Аппарат, описанный в настоящих лекциях, оказывается полезным при решении этой задачи, оставляя, однако, ряд существенно важных вопросов незатронутыми. Так, например, для более строгой теории представляется необходимым установить закономерности лоренц-преобразований спиноров, являющихся решениями уравнений Дирака. Рассмотрению этой задачи будет посвящена следующая работа.

В заключение автор выражает глубокую признательность академику Н.Н.Боголюбову за постоянный интерес к работе и ценные консультации, а также А.В.Ефремову, В.Г.Кадышевскому, Р.М.Мурадяну, Нгуен Ван Хьеу, Л.Д.Соловьеву, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову, Б.В.Медведеву, и Ю.М.Широкову, за полезные обсуждения.

Литература

1. Wigner E.P., Ann. Math., 40, 149 (1939).
2. Wigner E.P., Bargmann V., Proc. of the Nat. Acad. of Sci. 34, 211 (1948)
3. R.Hagedorn, Relativistic Kinematics, 1962.
4. E.P.Wigner, Rev. Mod. Phys., 29, 255 (1957).
5. H.P.Stapp, Phys. Rev., 103, 425 (1956).
6. M.Jacob, G.C.Wick, Ann. Phys., 7, 404 (1959).

7. G.C.Wick, Ann. Phys., 18, 65 (1962).
8. R.Delbourgo, A.Salam, P.Strathdee, Proc, Roy. Soc., A284, 146 (1965).
9. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, Вопросы физики элементарных частиц, У, Ереван, 1966, стр.341.
10. R.Dashen, Y.Dothan, M.Gell-Mann, Y.Neeman, Вопросы физики элементарных частиц, У, Ереван, 1966, стр.377.
11. Д.Стоянов, Препринт ОИЯИ, Р-2443, 1965.
12. D.Stoyanov, I.Todorov, Ann. Phys., 41, n. 3 (1967).
13. S.Fubini, G. Furlan, Physics 4, 229 (1965).
14. R.Gatto, L.Maiani, G.Preparata, Phys. Rev. Let., 16, 377 (1966).
15. M.Gell-Mann, Lectures at Summer School "Ettore Majorana" Erice, Sicily, 1966.
16. А.С.Давыдов, Квантовая механика. 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1967 года.