ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3330

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М. Барбашов

S - МАТРИЦА В ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

1967.

P2 - 3330

5088/2 пр.

Б.М. Барбашов

S - МАТРИЦА В ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

Направлено в ЖЭТФ

§ 1. Введение

Скалярное нелинейное поле Борна-Инфельда [2] в двухмерном пространстве (x , t) описывается следующим образом [1]. Лагранжиан системы имеет вид:

$$\mathcal{L} = \kappa^2 \{ 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa^2} (\phi_x^2 - \phi_t^2)} \} , \tag{1}$$

κ – характеристическая константа нелинейной теории, играющая роль абсолютного масштаба градиентов поля. В дальнейшем нам будет удобно иметь дело с обратной величиной $\rho = \frac{1}{\kappa}$. Уравнение поля, следующее из (1), относится к классу квазилинейных уравнений и при определенных условиях на начальные данные (см. [1]) оно гиперболического типа:

$$(1 - \rho^2 \phi_t^2)\phi_{xx} + \rho^2 \phi_x \phi_t \phi_{xt} - (1 + \rho^2 \phi_x^2) \phi_{tt} = 0 . \tag{2}$$

При $\rho = 0$ ($\kappa = \infty$) (1) и (2) переходят соответственно в лагранжиан свободного линейного поля $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_x^2)$ и уравнение Даламбера $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$.

В работе [1] была решена задача рассеяния двух плоских волн в этой теории. Именно, было найдено решение $\phi (u , v)$ уравнения (2), которое в переменных

$$u = x - t; \qquad v = x + t$$

имеет вид:

$$(1+2g^2\phi_u\,\phi_v)\,\phi_{uv} - g^2\phi_v^2\,\phi_{uu} - g^2\phi_u^2\,\phi_{vv} = 0\,. \tag{3}$$

Найденное решение удовлетворяет следующим асимптотическим условиям:

$$\lim_{v\to-\infty}\phi(u,v)=\psi_1(u)\,; \qquad \lim_{u\to\infty}\phi(u,v)=\psi_2(v)\,. \tag{4}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 –две произвольные функции, достаточно хорошо убывающие на бесконечности. $\psi_1(u)$ –волна произвольной формы, движущаяся в положительном направлении по x, $\psi_2(v)$ –волна, движущаяся в противоположном направлении по x. Решение такой задачи было получено в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
&\phi(u,v)=\psi_1(u+\mu(u,v))+\psi_2(v+\nu(u,v))\,,\\
&\mu(u,v) = g^2\int_{-\infty}^{v} dy\,\psi_2'^2(y+\nu(u,v))\,,\\
&\nu(u,v) = -g^2\int_{u}^{\infty} dy\,\psi_1'^2(y+\mu(u,v)).
\end{aligned} \tag{5}$$

Из решения (5) видно, что когда $v\to-\infty$, то $\psi_2(-\infty)=0$, $\mu=0$ и $\phi=\psi_1(u)$ (считаем, что интегралы в бесконечных пределах от $\psi_1'^2(x)$ и $\psi_2'^2(x)$ ограничены. Это и есть условия убывания $\psi'_{1,2}$ на бесконечности, а от $\psi_{1,2}$ требуется, чтобы $\psi_1(\pm\infty)=0$ и $\psi_2(\pm\infty)=0$. Далее, когда $u\to\infty$, то $\psi_1(\infty)=0$, $\nu=0$, $\phi=\psi_2(v)$.

Таким образом, наше решение переходит при $t\to-\infty$ ($t=\frac{v-u}{2}$, в обоих случаях $t\to-\infty$) в две плоские волны.

Рассеянные волны мы получим, устремив $u\to-\infty$, а $v\to\infty$. В обоих случаях $t=\frac{v-u}{2}\to\infty$. Когда $u\to-\infty$, то из (5) следует, что $\psi_1(-\infty)=0$, $\nu=-g^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1'^2(y)dy$, и мы имеем

$$\phi_{u\to-\infty}=\psi_2(v-g^2 I_1)\,, \tag{6}$$

где

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^2(y)\,dy .$$

Когда $v \to \infty$, то $\psi_2(\infty) = 0$, $\mu = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^2(y)\,dy$ и мы получим

$$\phi_{v \to \infty} = \psi_1 (u + g^2 H_2),$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^2(y)\,dy . \qquad (7)$$

Таким образом, две плоские волны $\psi_1(u)$, $\psi_2(v)$ из $t=-\infty$ переходят при $t=\infty$ в результате взаимодействия в две плоские волны той же формы, но со сдвинутыми аргументами. Величины H_1 и H_2, на которые происходит сдвиг, равны соответственно энергиям первой и второй волн.

§ 2. Квантование и асимптотические решения операторного уравнения (2)

Обратимся к квантовой формулировке поля, подчиняющегося уравнению (2). Будем, следуя Янгу, Фельдману [3] и Челену [4], рассматривать $\phi_{in}(u,v)$ как оператор падающей волны, удовлетворяющий свободному уравнению Даламбера

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \phi_{in}(u,v) = 0. \qquad (8)$$

Из (8) следует фурье-представление для оператора ϕ_{in}.

$$\phi_{in}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \{ a^+(k)\, e^{-ikx + i|k|t} + a^-(k)\, e^{ikx - i|k|t} \} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ a^+(k)\, e^{-iku} + a^-(k)\, e^{iku} \} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ a^+(k)\, e^{ikv} + a^-(-k)\, e^{-ikv} \},$$

где операторы $a^{\pm}$ удовлетворяют перестановкам

$$[a^+(k), a^+(p)]=[a^-(k), a^-(p)]=0; \qquad [a^-(k), a^+(p)]=\delta(k-p). \tag{9}$$

Введем операторы по аналогии с классической задачей (4)

$$\psi_1(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}}\{a^+(k)e^{-iku}+a^-(k)e^{iku}\},$$

$$\psi_2(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}}\{a^+(-k)e^{ikv}+a^-(-k)e^{-ikv}\}. \tag{10}$$

$\psi_1(u)$ –оператор падающей волны в положительном направлении x, $\psi_2(v)$ – оператор падающей волны в противоположном направлении по x.

$$\phi_{in}(u,v)=\psi_1(u)+\psi_2(v). \tag{11}$$

Из (10) следуют коммутационные соотношения для ψ_{in}, ψ_1 и ψ_2. Поскольку $\psi_1(u)$ содержит $a^+(k)$ и $a^-(k)$ только с положительными значениями импульса k, а оператор $\psi_2(v)$ содержит $a^{\pm}(-k)$ только с отрицательными значениями $-k$, то $[\psi_1(u), \psi_2(v)]=0$. Далее имеем:

$$[\psi_1(u), \psi_1(u')]=\frac{1}{i}\mathfrak{D}_1(u-u')=\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dk}{k}\sin k(u-u')=\frac{i}{4}\epsilon(u-u'),$$

$$[\psi_2(v), \psi_2(v')]=\frac{1}{i}\mathfrak{D}_2(v-v')=-\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dk}{k}\sin k(v-v')=-\frac{i}{4}\epsilon(v-v'), \tag{12}$$

$$\epsilon(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}.$$

Поэтому для ϕ_{in}

$$[\phi_{in}(u,v), \phi_{in}(u',v')]=\frac{1}{i}\mathfrak{D}(u-u', v-v')=\frac{i}{4}(\epsilon(u-u')-\epsilon(v-v')). \tag{13}$$

В дальнейшем нам еще потребуется знание коммутаторов для операторов ψ_1, ψ_2 и их производных $\psi_1'(u)$, $\psi_2'(v)$. Дифференцируя (12) и (13), получаем

$$[\psi_1(u),\ \psi_1'(u')] = -\frac{i}{2}\delta(u-u'),$$
$$[\psi_1(v),\psi_2'(v')] = \frac{i}{2}\delta(v-v'). \tag{14}$$

Теперь перепишем уравнение (3) для операторов поля с помощью запаздывающей функции Грина уравнения (8)

$$\mathfrak{I}^{ret}(u-u',\ v-v') = \theta[(v-v')-(u-u')]\ \frac{\epsilon(v-v')-\epsilon(u-u')}{4}, \tag{15}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

в следующем виде:

$$\phi(u,v) = \phi_{in}(u,v) + g^2\int_{-\infty}^{\infty} du' \int_{-\infty}^{\infty} dv'\,\mathfrak{I}^{ret}(u-u',\ v-v')(\phi^2_{u'}\,\phi_{v'v'} -$$
$$-2\phi_{u'}\phi_{v'}\phi_{u'v'} + \phi^2_{v'}\,\phi_{u'u'}).$$

Подставляя (11) и (15), получаем окончательно уравнение

$$\phi(u,v) = \psi_1(u) + \psi_2(v) - g^2\int_u^{\infty} du' \int_{-\infty}^{v} dv'(\phi^2_{u'}\,\phi_{v'v'} - 2\phi_{u'}\phi_{v'}\phi_{u'v'} + \phi^2_{v'}\,\phi_{u'u'}). \tag{16}$$

Перенесение метода решения /1/ классического уравнения (3) на квантовое (16) чрезвычайно трудно, поскольку мы теперь имеем дело с некоммутирующими операторами. Ограничимся поэтому задачей решения (16) методом итераций и отыскания асимптотических решений уравнений (16) при $v\to\infty$ и при $u\to-\infty$, т.е. отыскания out -оператора $\phi_{out}(u,v)$. Покажем, что решение итерациями интегрального уравнения (16) дает то же выражение для ϕ_{out} в виде ряда по константе g^2, что и разложение по g^2 асимптотических значений ϕ_{out} в классическом решении (6) и (7).

Предположим, что операторы $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ и все их производные $\psi_i^{(n)}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{u\to-\infty} \psi_1^{(n)}(u) = 0\ ; \qquad \lim_{v\to\infty} \psi_2^{(n)}(v) = 0 \tag{17}$$

(сильные пределы операторов[x/]), аналогичные классическим условиям (4)). Можно легко из (16) получить следующие выражения для ϕ_n в разложении

$$\phi(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n}\phi_n(u,v),$$

$$\phi_0(u,v) = \psi_1(u) + \psi_2(v),$$

$$\phi_1(u,v) = \phi_1'(u)\int_{-\infty}^{v} \psi_2'^2(v_1)\,dv_1 + \psi_2'(v)\int_u^{\infty}\psi_1'^2(u_1)\,du_1 ,$$

$$\phi_2(u,v) = \psi_1''(u)\int_{-\infty}^{v}\psi_2'^2(v_1)\int_{-\infty}^{v_1}\psi_2'^2(v_2)\,dv_1\,dv_2 +$$

$$+\psi_2''(v)\int_u^{\infty}du_1\,\psi_1'^2(u_1)\int_{u_1}^{\infty}\psi'^2(u_2)\,du_2 - \tag{18}$$

$$-\psi_1'(u)\,\psi_2'^2(v)\int_u^{\infty}\psi_1'^2(u_1)\,du_1 - \psi_2'(v)\,\psi_1'^2(u)\int_{-\infty}^{v}\psi_2'^2(v_1)\,dv_1$$

$$\phi_n(u,v) = \psi_1^{(n)}(u)\int_{-\infty}^{v}dv_1\int_{-\infty}^{v_1}dv_2\ldots\int_{-\infty}^{v_{n-1}}dv_r\,\psi_2'^2(v_1)\ldots\psi_2^2(v_r) +$$

$$+(-)^n\psi_2^{(n)}(v)\int_u^{\infty}du_1\int_{u_1}^{\infty}du_2\ldots\int_{u_{n-1}}^{\infty}du_n\,\psi_1'^2(u_1)\ldots\psi_1'^2(u_n) + Q_n(u,v).$$

[x/] По-видимому, последующие результаты можно получить, предполагая вместо (17) существование лишь слабых пределов для этих операторов.

Здесь операторы $Q_n(u, v) \to 0$ при $v \to \infty$ или $u \to -\infty$ из-за условия (17).

Поэтому для out -операторов ϕ_n получаем

$$\lim_{v \to \infty} \phi_n(u, v) = \psi_1^{(n)}(u)\, T_{+v_1} \frac{1}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^{\,2}(v_1)\, d v_1 \right)^n,$$

$$\lim_{u \to -\infty} \phi_n(u, v) = (-)^n \psi_2^{(n)}(v) \frac{1}{n!}\, T_{-u_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^{\,2}(u_1)\, du_1 \right)^n. \tag{19}$$

T_+ -оператор расставлявает $\psi_2'^{\,2}(v)$ по убывающим значениям аргумента v_1, а оператор T_--расставлявает $\psi_1'^{\,2}(u_1)$ по возрастающим значениям аргумента u_1. Теперь видно, что полный оператор $\phi(u, v)$ имеет следующие асимптотические значения:

$$\lim_{v \to \infty} \phi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_1^{(n)}(u) \frac{g^{2n}}{n!} T_{+v_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^{\,2}(v_1)\, d v_1 \right)^n = \psi_1\left(u + g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^{\,2}(v_1)\, d v_1 \right) +$$

$$\lim_{u \to -\infty} \phi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_2^{(n)}(v)\, g^{2n} \frac{(-)^n}{n!} T_{-u_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^{\,2}(u_1)\, du_1 \right)^n = \psi_2\left(v - g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^{\,2}(u_1)\, du_1 \right). \tag{20}$$

Смысл стоящих в (20) операторов, в аргументе которых стоят другие операторы, становится ясным, если заметить, что операторы энергии падающих волн $H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^{\,2}(u')\, d v'$ и $H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^{\,2}(v)\, d v$ коммутируют между собой и H_1 – с оператором ψ_2, а H_2 – с оператором ψ_1. Действительно, из (10) и (14) имеем:

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^{\,2}(u)\, du = \int_0^{\infty} dk\; k\, a^+(k)\, a^-(k);$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^{\,2}(v)\, dv = \int_0^{\infty} dk\; k\, a^+(-k)\, a^-(-k);$$

$$[H_1, H_2] = [H_1, \psi_2] = [H_2, \psi_1] = 0 ;$$

$$[H_2, \psi_2(v)] = -i\,\psi_2'(v); \qquad [H_1, \psi_1(u)] = i\psi_1'(u); \tag{21}$$

поэтому в (20) мы можем опустить знак T -произведения и записать оператор уходящих волн просто:

$$\phi_{out}(u, v) = \psi_1(u + g^2 H_2) + \psi_2(v - g^2 H_1). \tag{22}$$

ϕ_{out} также удовлетворяет свободному уравнению (8) и представим поэтому, как и оператор ϕ_{in}, в форме

$$\phi_{out}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ A^+(k,g^2)\, e^{-iku} + A^-(k,g^2)\, e^{iku} \} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}} \{ A^+(-k,g^2)\, e^{ikv} + A^-(-k, g^2)\, e^{-ikv} \}, \tag{23}$$

где операторы $A^{\pm}(k,g^2)$ и $A^{\pm}(-k,g^2)$ определены следующим образом:

$$A^{\pm}(k,g^2) = a^{\pm}(k)\, e^{\mp ikg^2 H_2},$$

$$A^{\pm}(-k,g^2) = a^{\pm}(-k)\, e^{\mp ikg^2 H_1}. \tag{24}$$

Далее можно показать, что $A^{\pm}(\pm k)$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (9), что и $a^{\pm}(\pm k)$. Это будет следовать из факта существования унитарного преобразования $S^{+} a^{\pm} S = A^{\pm}$, т.е. из существования S-матрицы, связывающей ϕ_{in} и ϕ_{out}.

В заключение этого раздела отметим, что получить решение для гайзенбергова оператора $\phi(u, v)$ на основе итерационного решения (18) не удается в замкнутом виде, как было сделано в классическом случае (5). Это, по-видимому, связано с тем, что если бы решение операторного уравнения имело форму (5), то возникло бы затруднение в интерпретации его, поскольку в аргументах операторов ψ_1 и ψ_2 стояли бы некоммутирующие с ними операторы $\mu(u, v)$ и $\nu(u, v)$.

§ 3. S – матрица

Попытаемся отыскать S-матрицу, определяемую уравнением

$$S^{+}\phi_{in}(u, v)\, S = \phi_{out}(u, v)\,. \tag{25}$$

Это уравнение с учетом (11) и (22) распадается на два:

$$S^{+}\psi_1(u)\, S = \psi_1(u + g^2 H_2)\,,$$

$$S^{+}\psi_2(v)\, S = \psi_2(v - g^2 H_1)\,. \tag{26}$$

Покажем, что

$$S = e^{ig^2 H_1 H_2} \tag{27}$$

удовлетворяет уравнениям (26). Заметим сразу, что поскольку операторы H_1 и H_2 коммутируют, см. (21), то нет трудности в интерпретации экспоненты с оператором $H_1 H_2$ в показателе.

Для доказательства равенств (26) продифференцируем

$\overset{+}{S}(g^2)\psi_1 S(g^2)$ и $\overset{+}{S}(g^2)\psi_2 S$ по g^2 и с учетом коммутационных соотношений (14) будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial g^2}\overset{+}{S}\psi_1(u)S = \overset{+}{S}\, iH_2 \int [\psi_1(u),\ \psi_1'^2(u')]\, du' S =$$

$$= H_2 \overset{+}{S}\ \psi_1'(u) S = H_2 \frac{\partial}{\partial u}\ \overset{+}{S}\psi_1(u) S .$$

Решая это уравнение с условием $\overset{+}{S}\psi_1(u) S /_{g^2=0} = \psi_1(u)$, находим :

$$\overset{+}{S}\psi_1(u)S = \psi_1(u + g^2 H_2).$$

Так же получаем второе равенство (26). Дифференцируя

$$\frac{\partial}{\partial g^2}\overset{+}{S}\psi_2(v) S = \overset{+}{S}\, iH_1 \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_2(v),\ \psi_2'^2(v')]\, dv' S =$$

$$= -H_1 \overset{+}{S}\psi_2'(v) S = -H_1 \frac{\partial}{\partial v}\ \overset{+}{S}\psi_2(v)\ S ,$$

решаем с условием $\overset{+}{S}\psi_2(v)\ S /_{g^2=0} = \psi_2(v)$, получим

$$\overset{+}{S}\psi_2(v) S = \psi_2(v - g^2 H_1).$$

S -матрица определяется уравнениями (26) однозначно с точностью до фазового множителя, так как системы in и out операторов (10) и (23) образует неприводимые наборы операторов[/5/] в двухмерном пространстве x,t, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (9).

Доказать равенства (26) с S -матрицей (27) можно также легко и в k -пространстве. Для этого надо показать, что

$$\overset{+}{A}{}^{-}(\pm k, g^2) = e^{-ig^2 H_1 H_2}\, \overset{+}{a}{}^{-}(\pm k)\, e^{ig^2 H_1 H_2} . \qquad (28)$$

Учитывая коммутационные соотношения

$$[\overset{+}{a}{}^{-}(k), H_1] = \mp k\, \overset{+}{a}{}^{-}(k); \qquad [\overset{+}{a}{}^{-}(-k), H_2] = \mp k \overset{+}{a}{}^{-}(-k),$$

$$k > 0,$$

легко получить равенства (24). Из (28) следует, что $\overset{+}{A}{}^{-}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и $a^{\pm}$.

Далее заметим, что оператор числа частиц $N_{in} = \int\limits_0^\infty dk\, a^+(k)\, a^-(k) + \int\limits_0^\infty dk\, a^+(-k)\, a^-(-k)$ коммутирует с S -матрицей (27), поэтому

$$N_{in} = N_{out} = \int\limits_0^\infty dk\, A^+(k)\, A^-(k) + \int\limits_0^\infty dk\, A^+(-k)\, A^-(-k),$$

т.е. в процессе рассеяния не происходит рождения частиц. К этому же выводу ведет рассмотрение матричных элементов S -матрицы.

Приведем S - матрицу (27) к нормальной форме относительно операторов $\overset{+}{a}{}^{-}(\pm k)$. Для этой цели полезно следующее интегральное представление /7/:

$$e^{ig^2 H_1 H_2} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta\, e^{-i(\alpha^2-\beta^2)}\, e^{-i(\alpha+\beta)gH_1 - i(\alpha-\beta)gH_2} . \qquad (29)$$

Для того, чтобы перейти к нормальному произведению по $\overset{+}{a}{}^{-}(\pm k)$ в (27),(29), где временной зависимости операторов уже нет, будем понимать $S_1 = e^{-i(\alpha+i\beta)gH_1}$ и $S_2 = e^{-i(\alpha-i\beta)gH_2}$ как решение операторных уравнений

$$i\frac{\partial S_1}{\partial g} = (\alpha+\beta)\, H_1 S_1; \qquad i\frac{\partial S_2}{\partial g} = (\alpha-\beta)\, H_2 S_2 . \qquad (30)$$

Следуя Файнману[6], предположим, что операторы H_1 и H_2 в (30) зависят от g как от упорядочивающего параметра. Тогда решения уравнений (30) мы должны записать как T_g экспоненту[12]

$$S_1 = T_\lambda e^{-i(\alpha+\beta)\int_0^g d\lambda\, H_1(\lambda)} ,$$
$$S_2 = T_\lambda e^{-i(\alpha-\beta)\int_0^g d\lambda\, H_2(\lambda)} . \tag{31}$$

Далее прибегнем к представлению S_1 и S_2 через функциональные интегралы для того, чтобы перейти от квадратичной зависимости $a^+ a^-$ в (29) в показателе экспоненты к линейной[7]:

$$S_1 = T_\lambda e^{-i(\alpha+i\beta)\int_0^g d\lambda \int_0^\infty dk\, k\, a^+(k,\lambda)\, a^-(k,\lambda)} =$$
$$= C \iint \delta\nu_1\, \delta\nu_2\, e^{-i\int_0^g d\lambda \int_0^\infty dk\, \nu(k,\lambda)\nu^*(k,\lambda)} \times$$
$$\times\; T_\lambda e^{i\int_0^g d\lambda \int_0^\infty dk \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, (a^+(k,\lambda)\, \nu(k,\lambda) + a^-(k,\lambda)\, \nu^*(k,\lambda))} , \tag{32}$$

где $\nu(k,\lambda) = \nu_1(k,\lambda) + i\nu_2(k,\lambda)$,

$$C^{-1} = \iint \delta\nu_1\, \delta\nu_2\, e^{-i\int_0^g d\lambda \int_0^\infty dk\, \nu(k,\lambda)\nu^*(k,\lambda)} .$$

Для S_2 получаем такую же формулу только с заменой в (32)

$$\alpha+\beta \to \alpha-\beta , \qquad a^+(k),\ a^-(k) \to a^+(-k),\ a^-(-k).$$

По Хори[8] переход от T-произведения к N-произведению операторов бозевских полей осуществляется с помощью оператора e^{Λ}, $T \to N e^{\Lambda}$ (N –знак нормального произведения). Оператор Λ имеет вид:

$$\Lambda = \iint_0^{q} d\lambda_1 d\lambda_2 \iint_0^{\infty} dk_1 dk_2 \Lambda(k_1\lambda_1 | k_2\lambda_2) \frac{\delta^2}{\delta a^+(k_1\lambda_1)\,\delta a^-(k_2\lambda_2)} . \tag{33}$$

Величина $\Lambda(k_1\lambda_1|k_2\lambda_2)$ определяет связь между

$$T_\lambda \{ a^+(k_1\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2) \} \quad \text{и} \quad N\{ a^+(k_1\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2) \} .$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} T_\lambda \{ a^+(k_1\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2) \} &= \theta(\lambda_2-\lambda_1)\, a^+(k_1\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2) + \\ &+ \theta(\lambda_2-\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2)\, a^+(k_1\lambda_1) = \\ &= a^+(k_1\lambda_1)\, a^-(k_2\lambda_2) + \theta(\lambda_2-\lambda_1)[\, a^-(k_2\lambda_2), a^+(k_1\lambda_1^-)] . \end{aligned} \tag{35}$$

Следовательно,

$$\Lambda(k_1\lambda_1 | k_2\lambda_2) = \theta(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta(k_2-k_1) .$$

где

$$\theta(\lambda_2-\lambda_1) = \begin{cases} 1 & \lambda_2 > \lambda_1 , \\ 0 & \lambda_2 \le \lambda_1 , \end{cases}$$

Теперь, действуя оператором e^{Λ} с учетом (34) и (35), переходим к N – произведению

$$S_1 = T_\lambda e^{\, i\int_0^q d\lambda \int_0^\infty dk \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, \{a^+(k,\lambda)\nu(k,\lambda) + a^-(k,\lambda)\nu^*(k,\lambda)\}} =$$

$$\begin{aligned} &= e^{-i\iint_0^q d\lambda_1 d\lambda_2 \iint_0^\infty dk_1 dk_2 (\alpha+\beta)\sqrt{k_1 k_2}\,\theta(\lambda_2-\lambda_1)\,\delta(k_2-k_1)} \\ &\cdot N\; e^{-i\int_0^q d\lambda \int dk \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, \{a^+(k,\lambda)\nu + a^-(k,\lambda)\nu^*\}} . \end{aligned} \tag{36}$$

Так же приводится к N-произведению S_2. Еще остается подставить (36) в (32) и выполнить функциональное интегрирование по ν_1 и ν_2. Поскольку подинтегральные выражения есть гауссовы функционалы по ν_1, ν_2, то интегралы вычисляются просто (см. приложение). Подставляя S_1 и S_2 после взятия функциональных интегралов в формулу (29), получаем S-матрицу в нормальной форме:

$$S = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha \, d\beta \, e^{-i(\alpha^2-\beta^2)} \cdot$$

$$N e^{\int_0^{\infty} dk \left[(e^{i\sigma(\alpha+\beta)k} - 1) a^+(k) a^-(k) + (e^{i\sigma(\alpha-\beta)k} - 1) a^+(-k) a^-(-k) \right]} . \qquad (37)$$

Легко показать, что S-матрица (37) диагональна в представлении физических частиц:

$$S | k_1, k_2 \ldots k_n, -p_1, -p_2 \ldots p_m \rangle = e^{\substack{i g^2 \sum_{i,j}^{n,m} k_i p_j \\ k_i p_j > 0}} | k_1 \ldots k_n, -p_1 \ldots -p_m \rangle . \qquad (38)$$

Таким образом, в этой двухмерной модели рассеяние может быть только упругим,x/ без рождения или поглощения частиц. В модели Тирринга /9,10/ рассеяние также сводится к изменению фазы плоских волн, но там в отличие от нашего случая это изменение не зависит от величины импульса сталкивающихся частиц, в этом смысле наша модель более реалистична.

Из формулы (38) следует, что частицы, движущиеся в одном направлении (все $p_i = 0$ или все $k_j = 0$) не взаимодействуют в смысле изменения фазы плоской волны:

$$S | -p_1 \ldots -p_m \rangle_{p_i > 0} = | -p_1, -p_2 \ldots -p_m \rangle .$$

---

x/ Амплитуда рассеяния $f(k_1 \ldots k_n, -p_1 \ldots -p_m) \approx (e^{i g^2 \sum_{i,j}^{n,m} k_i p_j} - 1)$.

Обсуждение результатов

Найденная нами S -матрица (27) обращает на себя внимание прежде всего тем, что по виду выражения, стоящего в показателе экспоненты, никак не связана с начальным лагранжианом системы (1). Если разложить лагранжиан (1) в переменных u, v по константе g^2

$$\mathcal{L} = g^{-2}(1-\sqrt{1+4g^2\phi_u\phi_v}) =$$
$$= -2\phi_u\phi_v + 2g^2\phi_u^2\phi_v^2 - 4g^4\phi_u^3\phi_v^3 + \dots , \tag{39}$$

то только второй член этого разложения $2g^2\phi_u^2\phi_v^2$ в представлении взаимодействия дает правильное выражение для S -матрицы (27) (свободный лагранжиан, дающий уравнение Даламбера (8) есть первый член разложения $-2\phi_u\phi_v = \mathcal{L}_0$). Учет остальных членов (39) резко искажает вид и свойства S -матрицы и делает ее, в частности, недиагональной по числу частиц, т.е. приводит к возможности неупругих процессов.

Аналогичную ситуацию мы наблюдаем в классическом поле, описываемом лагранжианом (8) и уравнением (2). Классическая S -матрица, т.е. оператор, переводящий падающую волну в уходящую, имеет вид:

$$S_{кл} = e^{-g^2 H_1\frac{\partial}{\partial u} + g^2 H_2 \frac{\partial}{\partial v}} . \tag{40}$$

$S_{кл}$ -оператор сдвига: $S_{кл}\psi_1(u) = \psi_1(u + g^2 H_2)$, $S_{кл}\,\psi_2(v) = \psi_2(v - g^2 H_1)$, причем вид этого оператора определяется по асимптотическим решениям уравнения (2).

В квантовом случае унитарное преобразование с помощью e^{iaH_1} и e^{ibH_2} есть также операция сдвига соответственно на a для оператора $\psi_1(u)$ и на b для $\psi_2(v)$, это следует из коммутационных соотношений (21), что мы и видели на примере действия S-матрицы (26). Отсюда, в частности, имеем

$$e^{i(t-t_0)(H_1+H_2)} \{\psi_1(u_0)+\psi_2(v_0)\} e^{-i(t-t_0)(H_1+H_2)} \tag{41}$$

$$= \psi_1(u) + \psi_2(v) ; \qquad u_0 = x - t_0 ; \quad u = x - t ; \qquad v_0 = x + t_0 \quad v = x + t$$

т.е., что $H_1 + H_2$ есть оператор энергии для свободных частиц, а $H_1 - H_2$ – оператор импульса. Поскольку при квантовом рассмотрении мы за основу приняли уравнение (16) на операторы поля ϕ, то прямая связь с лагранжианом (1) нами утеряна. Например, если выражение, стоящее в правой части (16) под интегралом, рассматривать как ток $j(u, v)$, то этот ток уже не есть вариационная производная от лагранжиана (1), так как $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ будет содержать корневые зависимости типа $\frac{1}{\sqrt{1+4g^2\phi_u \phi_v}}$, а в уравнении (16) этих факторов нет. Отсюда напрашивается вывод, что если уравнение движения получено из варьирования лагранжиана и при этом произведено сокращение каких-то общих множителей, как это имеет место при выводе уравнения (2) (произведено сокращение на множитель $(1+4g^2\phi_u\phi_v)^{3/2}$, то ток (нелинейная часть в уравнении (2)) не связан вариационной производной с $\mathcal{L}$, а, следовательно, с S-матрицей. Далее, если в разложенном по g^2 лагранжиане (39) мы выделим свободный лагранжиан $\mathcal{L}_0 = -2\phi_u\phi_v$, а остальные члены отнесем к $\mathcal{L}_{int}$, то варьирование $\mathcal{L}_{int}$ также не дает нам правой части (16), хотя бы потому, что $\frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi}$ будет содержать произвольно большие степени ϕ_u ϕ_v а наше исходное уравнение кубично по производным поля ϕ. Этими соображениями, по-видимому, и объясняется то, что S-матрица (27) не имеет прямой связи с лагранжианом (1).

Таким образом, для таких сложных лагранжианов, как (1), намечается два возможных подхода при рассмотрении квантовой теории. Либо мы принимаем за основу уравнения движения, по ним находим асимптотическое решение и S-матрицу. Либо мы исходим из лагранжиана, строим соответствующий гамильтониан и канонические переменные поля, а также уравнение Шредингера. Хотя, как известно /11/, на втором пути в теориях с производными во взаимодействии существуют дополнительные трудности при построении гамильтониана.

В заключение укажем на одну формальную возможность получить матрицу (27) исходя из лагранжиана (1). Рассмотрим функцию действия, соответствующую (1):

$$W = \iint dx\ dt \left(1 - g \sqrt{1 + 4g\,\phi_u \phi_v} \right) . \tag{42}$$

Подставим сюда ϕ_u и ϕ_v, взятые из решения (5),

$$\phi_u (u, v) = \frac{\psi_1' (u+\mu)}{1 - g^2 \psi_1'(u+\mu)\psi_2'(v+\nu)} ; \quad \phi_v = \frac{\psi_2'(v+\nu)}{1 - g^2 \psi_1'(u+\mu)\psi_2'(v+\nu)} .$$

Получим:

$$W = \tfrac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} du\, dv \left\{ -2 \frac{\psi_1'(u+\mu)\ \psi_2'(v+\nu) + g^2 \psi_1'^2(u+\mu)\,\psi_2'^2(v+\nu)}{1 - g^2 \psi_1'^2(u+\mu)\,\psi_2'^2(v+\nu)} \right\} . \tag{43}$$

Далее заметим, что детерминант преобразования от переменных интегрирования u, v к новым переменным $u' = u + \mu(u,v)$; $v' = v + \nu(v,u)$ равен

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} = 1 - g^2 \psi_1'^2(u)\, \psi_2'^2(v) .$$

Поэтому после перехода к интегрированию по u', v' имеем

$$W = - \iint_{-\infty}^{\infty} du'\, dv' \left[\psi_1'(u)\, \psi_2'(v) + \psi_1'^2(u)\, \psi_2'^2(v) \right] . \tag{44}$$

Теперь видно, что первый член подинтегрального выражения точно совпадает с плотностью лагранжиана для свободного поля $\mathcal{L}_0$, а второй член может отнести к взаимодействию $\mathcal{L}_{int} = -\psi_1'^2(u)\psi_2'^2(v)$, причем именно того вида, какой нужен для получения S -матрицы (27). Следует отметить, во-первых, что эти соображения используют решения классического уравнения (5), каковы соответствующие решения квантового уравнения - неизвестно. Во-вторых, преобразование от (43) и (44) оказывается простым, если интегралы по u, v взяты в бесконечных пределах, в противном случае область интегрирования по u', v' будет зависеть от функций ψ_1 и ψ_2 и мы не получим простой интерпретации (44).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Д.И. Блохинцеву и Н.А. Черникову за постоянный интерес к работе и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим функциональный интеграл, который возникает при подстановке нормально-упорядоченного выражения (36) в (32):

$$I = C \iint \delta\nu_1 \delta\nu_2\, e^{-i\iint_0^g d\lambda_1 d\lambda_2 \int_0^\infty dk\, [\delta(\lambda_1-\lambda_2) - ik)(\alpha+\beta)\theta(\lambda_1-\lambda_2)]\nu\nu^*}$$

$$N\, e^{-i\int_0^g d\lambda \int_0^\infty dk \sqrt{k(\alpha+\beta)})[a^+(k)\nu(k,\lambda) + a^-(k)\nu^*(k,\lambda)]} \quad .$$

Произведем, как обычно (см. /6/), преобразование переменных $\nu = \nu + \bar{\nu}$, $\nu^* = \nu^* + \bar{\nu}^*$, диагонализующее квадратичную форму в показателе экспоненты, где $\bar{\nu}$ и $\bar{\nu}^*$ -функции, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\bar{\nu}(k,\lambda) - ik(\alpha+\beta)\int_\lambda^g \bar{\nu}(k,\lambda_1)\, d\lambda_1 + \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, a(k) = 0 \, .$$

Решая уравнение, находим $\bar{\nu}(k,\lambda) = \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, e^{ik(g-\lambda)}\, a(k)$

и

$$\bar{\nu}^*(k,\lambda) - ik(\alpha+\beta)\int_0^\lambda \bar{\nu}^*(k,\lambda_1)\, d\lambda_1 + \sqrt{k(\alpha+\beta)}\, a^+(k) = 0 \, ,$$

откуда

$$\bar{\nu}^*(k,\lambda) = -\sqrt{k(\alpha+\beta)}\, e^{ik\lambda}\, a^+(k) \, .$$

Производя это преобразование, получим

$$I = C \iint \delta\nu_1\, \delta\nu_2\, e^{-i\iint_0^g d\lambda_1 d\lambda_2 \int_0^\infty dk\, [\delta(\lambda_1-\lambda_2) - ik(\alpha+\beta)\theta(\lambda_1-\lambda_2)]\nu\nu^*} \, ,$$

$$N\, e^{\int_0^\infty dk (e^{ikg(\alpha+\beta)} - 1)\, a^+(k)\, a^-(k)} \, .$$

Оставшийся интеграл равен детерминанту Фредгольма, который, в свою очередь, равен 1. Действительно,

$$C \iint \delta\nu_1\, \delta\nu_2\, e^{-i\iint_0^g d\lambda_1 d\lambda_2 \int_0^\infty dk\, [\delta(\lambda_1-\lambda_2) - ik\,\theta(\lambda_1-\lambda_2)]\nu(k,\lambda_2)\nu^*(k,\lambda_2)}$$

$$= \mathrm{Det}\,[\delta(\lambda_1-\lambda_2) - ik(\alpha+\beta)\,\theta(\lambda_1-\lambda_2)] = 1 \, ,$$

так как этот детерминант имеет по диагонали 1, а выше диагонали - нули, потому что $\theta(0) = 0$.

Литература

1. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, 51, вып. (2) 8, стр. 658 (1966).
2. M.Born, L.Infeld. Proc. Roy. Soc., A144, 425 (1934).
3. C.N.Yang and D.Feldman. Phys. Rev., 79, 972 (1950).
4. G.Kallen. Ark. f. Phys., 2, 187, 371 (1950).
5. A.S.Wightman and Schweber. Phys. Rev., 98, 812 (1955).
6. R.P.Feynman. Phys. Rev., 84, 103 (1951).

7. Ф.А. Березин. Метод вторичного квантования, "Наука", М., 1965.

8. S.Hori. Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1962).

9. W.E.Thirring. Ann. Phys., 9, 91 (1958).

10. V.Glaser. Nuovo Cim., IX, n.6 (1958).

11. H.Umezawa, Y.Takahashi. Prog. Theor. Phys., 9, n.5 (1953).

12. Д.А. Киржниц. ЖЭТФ, 41, вып. 2 (8) 551 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 мая 1967 г.