ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3323

Я.А. Смородинский, Е.Л. Сурков

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967 г.

P2 - 3323

Я.А. Смородинский, Е.Л. Сурков

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Направлено в ЯФ

§ 1. Введение

В квантовой теории рассеяния используется известное разложение плоской волны на сферические волны. Его можно интерпретировать как разложение решения уравнения Пуассона по неприводимым представлениям группы вращений. Естественно также написать аналогичное разложение релятивистской плоской волны $\exp(-ipx)$ и других решений уравнения Клейна-Гордона по неприводимым представлениям группы Лоренца. В этой заметке получены соответствующие интегральные преобразования, связанные как с уравненнем Клейна-Гордона $(\hat{p}^2 - m^2)\phi = 0$, так и с уравнением Даламбера $\hat{p}^2 \psi = 0$. Эти преобразования проще всего получить с помошью орисферного преобразования Гельфанда-Граева, связывающего гиперболоид $p^2 = 1$ с конусом $k^2 = 0$.

Заметим, что эта связь может быть использована и при разложении амплитуды рассеяния, так как амплитуду четыреххвостки можно интерпретировать как функцию одного из ее концов. Так, например, амплитуду Комптон-эффекта можно считать функцией электронного конца, соответственно заданной на гиперболоиде $p^2 = m^2$, или же функцией фотонного конца, заданной на конусе $k^2 = 0$.

Этот случай может служить хорошей иллюстрацией двух разных реализаций представлений группы Лоренца - на конусе и гиперболоиде.

§ 2. Уравнение Клейна-Гордона

Начнем с очевидного замечания. Преобразование Фурье переводит решения волнового уравнения Клейна-Гордона в координатном пространстве

$$(\Box_x + 1)\ \phi(x) = 0 \tag{1}$$

в функции $f(p)$, заданные на гиперболоиде $p^2=1$

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ipx}f(p)\,\theta(p_0)\,\delta(p^2-1)\,d^4p \qquad (2)$$

$$f(p)\,\theta(p_0)\,\delta(p^2-1)=\int e^{ipx}\,\phi(x)\,d^4x \qquad (2')$$

(здесь и в дальнейшем мы положим для простоты $m=1$ и рассмотрим положительно-частотные решения (1)).

С точки зрения представлений группы Лоренца проще изучать (в частности, разлагать на неприводимые компоненты) функции, заданные на конусе $k^2=0$. Орисферное преобразование Гельфанда-Граева /1/, уже применявшееся /2/ при инвариантном разложении релятивистских амплитуд, позволяет перейти с гиперболоида $p^2=1$ на конус $k^2=0$:

$$F(k)=\int\delta(kp-1)\,f(p)\,\theta(p_0)\,\delta(p^2-1)\,d^4p \qquad (3)$$

$$f(p)=-\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=1}\int\delta(kp-t)\,F(k)\,\theta(k_0)\,\delta(k^2)\,d^4k\,. \qquad (3')$$

Сделаем еще один шаг. Будем считать, что функция на конусе $F(k)$ есть фурье-образ некоторой волновой функции $\psi(y)$, удовлетворяющей уравнению Клейна-Гордона с нулевой массой

$$\Box_y\,\psi(y)=0\,. \qquad (4)$$

Таким образом, у нас есть четыре пространства: (x), (p), (k), (y), связанных тремя парами преобразований $(x)\to(p)$, $(p)\to(k)$, $(k)\to(y)$.

В § 3 мы приведем оставшиеся три пары интегральных преобразований, непосредственно связывающих $(x)\to(k)$, $(y)\to(p)$, $(x)\to(y)$ друг с другом.

В § 4 мы проведем обобщенный анализ Фурье в пространстве (x) (в (p) и (k) он проделан в /1/), то есть разложим $\phi(x)$ на компоненты, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы Лоренца. И, наконец, в § 5 мы доведем это разложение до конца в некоторых системах координат.

§ 3. Интегральные преобразования $(x)\to(k),(y)\to(p),(x)\to(y)$

3.1. С помощью (2) и (3) мы получаем интегральное преобразование с ядром $G(k,x)$, которое переводит функцию $F(k)$, заданную на конусе $k^2=0$, в решение уравнения Клейна-Гордона: (относительно ограничений на $F(k)$ см. /1/)

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int G(k,x)\,F(k)\,\frac{d^3k}{2k_0}$$

$$G(k,x)=\frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=i}\int e^{-ipx}\delta(kp-t)\frac{d^3p}{2p_0}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=i}\frac{1}{kx}\,e^{-\frac{i}{2}\left[\frac{kx}{t}+\frac{tx^2}{kx}\right]} \tag{5}$$

При этом, конечно, $G(k,x)$ удовлетворяет волновому уравнению (1):

$$(\Box_x+1)\,G(k,x)=0,\quad k^2=0.$$

Обратное преобразование сводится к одномерному преобразованию Фурье на конусе $x^2=0$ в (x) в направлении вектора k :

$$F(k)=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{\infty}e^{it}\,\phi(tk)\,dt\;;\quad \phi(tk)\equiv\phi(tk_0,t\vec{k}). \tag{5'}$$

Таким образом, решения уравнения Клейна-Гордона можно разлагать не только по плоским волнам, но и по "фотоноподобным" функциям $G(k,x)$, фотоноподобным в том смысле, что они заданы на конусе $k^2=0$.

Из (5) и (5') также следует, что, зная волновую функцию на световом конусе $x^2=0$, мы можем восстановить ее значения во всем координатном пространстве:

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2 i}\int G(k,x)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(tk)\,e^{it}dt\,\frac{d^3k}{2k_0}.$$

3.2. Пространство решений волнового уравнения (4) с нулевой массой связано с гиперболоидом $p^2=1$ с помощью интегрального преобразования с ядром $G(p,y)$

$$\psi(y)=-\frac{1}{(2\pi)^5}\int G(p,y)\,f(p)\,\frac{d^3p}{2p_0} \tag{6}$$

$$f(p)=4\pi\int t^2e^{it}\,\psi(tp)\,dt\;; \tag{6'}$$

где

$$G(p,y)=-\frac{1}{2\pi}\int e^{-iky}\delta(kp-1)\frac{d\,k}{2k_0}=e^{-ipy}\frac{\sin[(py)^2-y^2]^{1/2}}{[(py)^2-y^2]^{1/2}}$$ *

$$\Box_y G(p,y)=0\,;\ p^2=1\,.$$

3.3. Интегральное преобразование, переводящее решение $\phi(x)$ волнового уравнения с массой, равной единице, в решение $\psi(y)$ уравнения Клейна-Гордона без массы (4) легко получается с помощью (5') и (6')

$$\psi(y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ixy}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{it}\,\phi(tx)\,dt\Big]\theta(x_0)\delta(x^2)\,d^4x\,. \tag{7}$$

Здесь интегрирование ведется сначала вдоль луча tx, лежащего на световом конусе, а затем по верхней поле конуса $x^2=0$. Обратное преобразование очень похоже: сначала интегрируем вдоль луча ty, затем y пробегает верхнюю полу двуполого гиперболоида $y^2=1$

$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi^3}\int e^{-ixy}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{it}\psi(ty)\,dt\Big]\,\theta(y_0)\delta(y^2-1)\,d^4y. \tag{7'}$$

3.4. Приведем еще одну интересную функцию, которая удовлетворяет одновременно двум волновым уравнениям – с массой и без массы:

$$(\Box_x+1)F(x,y)=0\,,\ \Box_y F(x,y)=0$$

$$F(x,y)=\int e^{-iky}\frac{1}{kx}\,e^{\frac{i}{2}\left[kx+\frac{x^2}{kx}\right]}\frac{d^3k}{2k_0}=\pi^2[(xy)^2-x^2y^2]^{-1/2}\{H_0^{(1)}(\sqrt{z_+})-H_0^{(1)}(\sqrt{z_-})\}$$

здесь
$$z_\pm=x^2-2xy\pm2[(xy)^2-x^2y^2]^{1/2}.$$

Отметим, что произвольная функция вида

$$\psi(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(xy)^2-x^2y^2}}\,\Phi(z_\pm)$$

является решением уравнения

$$\Box_y\psi(x,y)=0.$$

---

x) В системе, где $y=(0,y)$, аргумент есть просто $|p|\,|y|$.

§ 4. Разложение на неприводимые компоненты

Решения уравнения Клейна–Гордона образуют, очевидно, представление группы Лоренца, поэтому $\phi(x)$ необходимо разложить на компоненты, преобразующиеся по ее неприводимым представлениям.

Проще всего такое разложение выглядит на конусе $k^2=0$: если $F(k)$ – функция на конусе, то $F(k,\sigma)$, ее однородная компонента степени однородности σ ($F(tk,\sigma)=t^{\sigma}F(k,\sigma)$) будет преобразовываться по неприводимому представлению $(1+\sigma,\ 1+\sigma)$ группы Лоренца /1/

$$F(k,\sigma)=\int_0^{\infty}F(tk)t^{-\sigma-1}dt \tag{8}$$

$$F(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}F(k,\sigma)\,d\sigma. \tag{8'}$$

При $\sigma=-1+i\rho$ представление будет унитарным. С помощью преобразований (5), связывающих (x) с конусом $k^2=0$ и (8), мы можем разложить $\phi(x)$ на неприводимые компоненты $F(k,\sigma)$:

$$F(k,\sigma)=(2\pi)^3\Gamma(\sigma+1)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(tk)(-it)^{-\sigma-1}dt. \tag{9}$$

$$\phi(x)=\frac{i}{8\pi^5}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}d\sigma\ e^{-\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)}\sigma(\sigma+1)(\sqrt{x^2})^{\sigma+1}H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2})\cdot \tag{9'}$$

$$\cdot\int_{\Gamma}(kx)^{-\sigma-2}F(k,\sigma)d^2k.$$

Здесь $\arg\sqrt{x^2}=-\frac{\pi}{2}$ при $x^2<0$, $\arg kx=-\pi$ при $kx<0$, d^2k – инвариантная мера на контуре $\Gamma(k)=1$, пересекающем каждую образующую конуса $k^2=0$, так что $k_0^{-1}d^3k=d\Gamma\ d^2k$. С помощью (9) нетрудно получить k,σ –компоненту плоской волны

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\ ;\ F(k,\sigma)=(kp)^{\sigma}.$$

§ 5. Системы координат

Разложение на неприводимые компоненты (9) доведем до конца в некоторых системах координат, выбирая различные контуры Γ.

5.1. Сферическая система координат: контур Γ – сечение конуса плоскостью $k_0 = 1$; $F(k, \sigma)$ зависит от единичного вектора $\vec{k}$ и ее можно разложить по сферическим функциям:

$$F(\vec{k}, \sigma) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m}(\sigma)\, Y_{\ell m}(\vec{k}). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), (9'), получаем после некоторых вычислений разложение $\phi(x)$ на неприводимые компоненты в сферической системе координат:

$$\phi(x) = \frac{i}{2(2\pi)^{7/2}} \sum_{\ell, m} \frac{1}{|\vec{x}|} Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)}(\sigma+1)\Gamma(-\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-\ell-1)\Gamma(-\sigma+\ell)}$$

$$H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2})\, Q_{\ell}^{-\sigma-1}\left(\frac{x_0}{|\vec{x}|}\right) a_{\ell m}(\sigma)\, d\sigma ; \tag{11}$$

$$a_{\ell m}(\sigma) = (2\pi)^3\, \Gamma(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\vec{n}\, (-it)^{-\sigma-1}\, Y^*_{\ell m}(\vec{n})\, \phi(tn) \tag{11'}$$

$$n_0 = 1, \quad \vec{n}^2 = 1, \quad d\vec{n} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi, \quad \text{в (11) при } x^2 < 0$$

$$x_0 = x_0 - i\epsilon, \quad \arg\sqrt{x^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

5.2. Приведем, наконец, разложение плоской волны $\exp(-ipx)$ на неприводимые компоненты в сферической системе координат:

$$e^{-ipx} = -2\pi i \sum_{\ell, m} \frac{1}{|x||p|} Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right) \cdot$$

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sin\pi\sigma\; e^{-\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)} H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2})\, Q_{\ell}^{-\sigma-1}\left(\frac{x_0}{|x|}\right) Q_{\ell}^{\sigma+1}\left(\frac{p_0}{|p|}\right) d\sigma .$$

5.3. Разложения, подобные (11) (11'), можно провести и в остальных системах координат на конусе, перечисленных в /2/, – они сводятся к вычислению при различных Γ

$$\int (k\,x)^{-\sigma-2}\, F(k,\sigma)\, d^2k\,.$$

При $x^2>0$ эти интегралы посчитаны в /2/, при $x^2<0$ в /3/, поэтому мы приведем здесь только результаты для $x^2=0$. В этом случае разложение (9) принимает вид:

$$\phi(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^6}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma\,\Gamma(\sigma+1)\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)}(2)^{\sigma+1}\int_{\Gamma}(k\,x)^{-\sigma-2}\,F(k,\sigma)\,d^2k\,d\sigma \tag{9''}$$

5.4. В орисферической системе координат на конусе $x^2=0$

$$k_0 = 1+\rho^2,\quad k_1 = 2\rho\sin\alpha,\quad k_2 = 2\rho\cos\alpha,\quad k_3 = -1+\rho^2;\quad d^2k = 4\rho\, d\rho\, d\alpha$$

$$0\le\alpha\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le\infty$$

$$x_0 = q(1+R^2),\quad x_1 = 2qR\sin A,\quad x_2 = 2qR\cos A,\quad x_3 = q(-1+R^2)$$

$$0\le A\le 2\pi,\quad 0\le R\le\infty,\quad -\infty\le q\le\infty$$

$$F(k,\sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\kappa,\theta,\sigma)\, e^{i\kappa\rho\cos(\theta-\alpha)}\,\kappa\, d\kappa\, d\theta$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^5}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma\int_0^{\infty}\kappa\, d\kappa\int_0^{2\pi} d\theta\,\sigma\,\Gamma(-\sigma-1)\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)}(q)^{-\sigma-2}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2(\sigma+1)} e^{i\kappa R\cos(\theta-A)}\,\Phi(\kappa,\theta,\sigma)$$

$\arg(q) = -\pi$ при $q<0$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\Phi(\kappa,\theta,\sigma) = 8\pi\,\Gamma(\sigma+1)\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{\infty}\rho\, d\rho\,(-it)^{-\sigma-1}\, e^{-i\kappa\rho\cos(\theta-\alpha)}\,\phi(tk)$$

5.5. В цилиндрической системе

$$k_0 = \operatorname{ch} b,\quad k_1 = \operatorname{sh} b,\quad k_2 = \sin\alpha,\quad k_3 = \cos\alpha,\quad d^2k = db\, d\alpha$$

$$-\infty < b < +\infty;\qquad 0\le\alpha\le 2\pi$$

$$x_0 = q\,\mathrm{ch}\,B\,,\quad x_1 = q\,\mathrm{sh}\,B\,,\quad x_2 = q\sin A\,,\quad x_3 = q\cos A\,;$$

$$-\infty < B < \infty\,,\quad 0 \le A \le 2\pi\,,\quad -\infty \le q < \infty$$

$$F(k,\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int a_m(r,\sigma)\, e^{i(m\alpha+br)}\, dr\,;$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^5} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dr\; e^{-\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)}\, \sigma\,\Gamma(-\sigma-1)(2)^{2(\sigma+1)}\,.$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+\sigma+ir}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+\sigma-ir}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\sigma+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\sigma-ir}{2}\right)}\,(q)^{-\sigma-2}\, e^{i(mA+rB)}\, a_m(r,\sigma)\,;$$

$$a_m(r,\sigma) = 2\pi\,\Gamma(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dB \int_0^{2\pi} dA\,(-it)^{-\sigma-1}\, e^{i(mA+rB)}\,\phi(tk)\,.$$

Литература

1. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Обобщенные функции , выпуск 5.
2. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ 46, 1793 (1964).
3. Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. ЯФ, 2, 383 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 мая 1967 г.