ЯФ, 1967, т. 6, в. 5, с. 1058-1061

16.VI 1967.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3301

Л.И. Лапидус

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ АМПЛИТУД КОМПТОН-ЭФФЕКТА

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1967.

Р2 - 3301

Л.И. Лапидус

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ АМПЛИТУД КОМПТОН-ЭФФЕКТА

Направлено в ЯФ

A b s t r a c t

Sum rules resulting from dispersion relations (d.r.) without substracting for spin-dependent amplitudes of the nucleon Compton-effect at $Q^2 = 0$ have been considered. D.r. without subtracting (5) for the function F_2 determined in (4) result in the known [5,1,2] sum rule (7) for the square of the magnetic moment. D.r. without subtracting (11) for the function F_3 determined in (8) result in sum rule (12) by using (10). From (12) and (7) we obtain the sum rule (13). Unitarity relation (17) binds the integrand with the differences of partial cross sections of pion photoproduction. D.r. without subtracting (19) for the function F_4 determined in (18) result in sum rule (21). Relation (22) by means of (18) and (8) is reduced to relation (23) for invariant amplitudes. The determinations of the invariant amplitudes T_i and the amplitudes in the centre of mass system R_i are given in the Appendix.

As has been noted by Goldberger [7], the low energies theorem (2') for the function F_1 determined in (2) makes it necessary to subtract in d.r. for F_1. Since the imaginary parts of the functions $F_{2,3,4}$ are expressed by the differences of partial photoproduction cross sections, d.r. without subtracting and the exact sum rules related to them may turn out to be valid for these functions.

1. В последнее время правила сумм для квадрата магнитного момента нуклонов и ядер рассматриваются в литературе с различных точек зрения [1,2].

Существование точного правила сумм, основанного на предположении о наличии дисперсионного соотношения (д.с.) без вычитания для зависящей от спина амплитуды нуклонного комптон-эффекта вперед [x)]

$$M = (R_1 + R_2)|_{Q^2=0} (\vec{e}\vec{e}') + i(R_3 + R_4 + 2R_5 + 2R_6)|_{Q^2=0} (\vec{\sigma}[\vec{e}'\vec{e}]) \qquad (1)$$

было отмечено и кратко обсуждено в [5].

В пределе малых энергий [6] при $\nu \to 0$ функция

$$F_1(\nu) = \frac{1}{2}[T_1 - T_3 - \nu(T_2 - T_4)]_{Q^2=0} = \frac{W}{M}(R_1 + R_2)|_{Q^2=0} \qquad (2)$$

переходит в ($W = \sqrt{s}$ – полная энергия в с.ц.и.)

$$F_1(0) = -\frac{e^2}{M}. \qquad (2')$$

Как отметил в 1955 году Гольдбергер [7], д.с. для $F_1(\nu)$ с необходимостью требует вычитания, так как в противном случае

$$F_1(0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\nu_t}^{\infty} \sigma(\nu)\, d\nu > 0 \qquad (3)$$

(ν_t – порог фоторождения пионов) и (3) противоречит (2').

---

x) Обозначения здесь те же, что и в более ранних работах [3,4,5] $R_1, \ldots, R_6$ – амплитуды в с.ц.и.

Поскольку мнимая часть $F_2(\nu)$

$$F_2(\nu)=\nu T_6 \Big|_{Q^2=0} = \frac{W}{M}(R_3+R_4+2R_5+2R_6)\Big|_{Q^2=0} \tag{4}$$

связана с разностью сечений взаимодействия при разных поляризациях фотонов, то для $F_2(\nu)$ можно предположить существование д.с. без вычитания

$$\mathrm{Re}\, F_2(\nu_0) = \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, F_2(\nu)}{\nu^2-\nu_0^2}\, d\nu\,. \tag{5}$$

Из теоремы Лоу

$$\lim_{\nu_0\to 0} F_2(\nu_0) = -2\mu_\alpha^2\nu_0 = -2\left(\frac{e}{2M}\lambda\right)^2 \nu_0\,, \tag{6}$$

так что

$$-\mu_\alpha^2 = -\left(\frac{e}{2M}\right)^2\lambda^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, F_2(\nu)}{\nu^2}\, d\nu = \frac{1}{\pi}\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, T_6}{\nu}\, d\nu \tag{7}$$

и это правило сумм имеет место как для нуклонов, так и для ядер произвольного спина (в общем случае ν_t –порог неупругих процессов).

2. Как отмечено, например, в /5/ для

$$F_3(\nu_0) = \frac{\nu_0}{2M}(T_1+T_3)\Big|_{Q^2=0} = \left(\frac{W_0}{M}\right)^2 (R_3-R_4)\Big|_{Q^2=0} \tag{8}$$

имеет место д.с., которое при одном вычитании имеет вид

$$\mathrm{Re}\, F_3(\nu_0) = \nu_0\, \mathrm{Re}\, F_3'(0) + \frac{2\nu_0^3}{\pi}\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, F_3(\nu)}{\nu^2(\nu^2-\nu_0^2)}\, d\nu \tag{9}$$

и в силу теоремы Лоу

$$\mathrm{Re}\, F_3'(0) = \lim_{\nu\to 0}\frac{dF_3(\nu)}{d\nu} = 2\left[\mu^2-\left(\frac{e}{2M}\right)^2\right] = 2\left(\frac{e}{2M}\right)^2(\lambda^2+2\lambda)\,. \tag{10}$$

Если предположить, что для $F_3(\nu)$ имеет место д.с. без вычитания, то

$$\mathrm{Re}\, F_3(\nu_0) = \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, F_3(\nu)}{\nu^2 - \nu_0^2}\, d\nu \qquad (11)$$

и при $\nu_0 \to 0$ из (10) и (11) имеем

$$\left(\frac{e}{2M}\right)^2 (\lambda^2 + 2\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, F_3(\nu)}{\nu^2}\, d\nu = \frac{1}{2\pi M} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(T_1 + T_3)}{\nu}\, d\nu. \qquad (12)$$

Складывая (7) и (12), получаем[x)] для аномального магнитного момента нуклона

$$\left(\frac{e}{2M}\right)^2 \lambda = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(F_2 + F_3)}{\nu^2}\, d\nu, \qquad (13)$$

где

$$F_2 + F_3 = \frac{W}{M}(R_3 + R_4 + 2R_5 + 2R_6) + \left(\frac{W}{M}\right)^2 (R_3 - R_4). \qquad (14)$$

Если воспользоваться тем, что для $Q^2 = 0$ амплитуды в лабораторной системе $(R_3 + R_4 + 2R_5 + 2R_6)^{л}$ и $(R_3 - R_4)^{л}$ связаны с аналогичными величинами в с.ц.м. соотношениями

$$(R_3 + R_4 + 2R_5 + 2R_6)^{л} = \frac{W}{M}(R_3 + R_4 + 2R_5 + 2R_6) \qquad (15)$$

и

$$(R_3 - R_4)^{л} = \left(\frac{W}{M}\right)(R_3 - R_4), \qquad (15')$$

можно привести правило сумм (13) к другому виду

$$\left(\frac{e}{2M}\right)^2 \lambda = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_t}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(R_3 + R_5 + R_6)^{л}}{\nu^2}\, d\nu. \qquad (16)$$

---

x) Близкий, но не совпадающий результат получили недавно Бег[/8/] и Каварабаяши и Вада[/9/]. Полученные ими правила сумм относятся к изовекторным частям магнитных моментов.

При ограничении состояниями с моментами $J \le 3/2$

$$\mathrm{Im}(F_2+F_3)=\nu\{|E_1|^2+|M_1|^2+\frac{1}{3}|E_2|^2+$$

$$+\frac{1}{3}|M_2|^2-|E_3+\frac{1}{2}M_2|^2-|M_3+\frac{1}{2}E_2|^2+\frac{W}{M}[|E_1|^2- \tag{17}$$

$$-|M_1|^2+|M_3-\frac{1}{2}E_2|^2-|E_3-\frac{1}{2}M_2|^2]\},$$

где использованы обозначения работ /3,4,5/ для парциальных сечений фоторождения пионов.

3. Дисперсионное соотношение без вычитания для $F_4(\nu)$ при $Q^2=0$

$$F_4(\nu)=\frac{1}{2}(T_1-T_3)=\frac{W^2}{M\nu}(R_3+R_4)-\frac{2W}{M+W}(R_1+R_2) \tag{18}$$

имеет вид

$$\mathrm{Re}\,F_4(\nu_0)=\frac{2}{\pi}\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{\nu\,d\nu}{\nu^2-\nu_0^2}\,\mathrm{Im}\,F_4(\nu). \tag{19}$$

С помощью (18) и теоремы Лоу

$$F_4(0)=\frac{e^2}{2M}(\lambda^2+2\lambda). \tag{20}$$

Таким образом, правило сумм для F_4 имеет вид

$$\frac{e^2}{2M}(\lambda^2+2\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}\,\mathrm{Im}\,F_4(\nu). \tag{21}$$

Сравнение (21) и (12) показывает, что

$$\frac{\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}\,\mathrm{Im}\,F_4(\nu)}{\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu^2}\,\mathrm{Im}\,F_3(\nu)}=2M. \tag{22}$$

С помощью (18) и (8) нетрудно привести соотношение (22) к виду

$$\int_{\nu_t}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}\,\mathrm{Im}(T_1+2T_3)=0. \tag{23}$$

Насколько известно автору, правила сумм (13), (16) и (22), (23) в литературе еще не обсуждались.

Обобщение полученных результатов на случай частиц произвольного спина проводится аналогично тому, как это сделано в /1/ для правила сумм (7). При этом существенно обобщение теоремы Лоу на случай частиц произвольного спина /10/.

Автор благодарен В.Б. Берестецкому за стимулировавшее обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для справок напомним, что амплитуды в с.ц.и. $R_1 \dots R_6$ определены таким образом, что амплитуда комптон-эффекта имеет вид

$$\frac{M}{W} e'_\mu N_{\mu\nu} e_\nu = R_1 (\vec{e}\vec{e}') + R_2 (\vec{s}\vec{s}') + i R_3 (\vec{\sigma}[\vec{e}'\vec{e}]) +$$

$$+ i R_4 (\vec{\sigma}[\vec{s}'\vec{s}]) + i R_5 [(\vec{\sigma}\vec{k})(\vec{s}'\vec{e}) - (\vec{\sigma}\vec{k}')(\vec{s}\vec{e}')] +$$

$$+ i R_6 [(\vec{\sigma}\vec{k}')(\vec{s}'\vec{e}) - (\vec{\sigma}\vec{k})(\vec{s}\vec{e}')],$$

где $\vec{s} = [\vec{k}\vec{e}]$, $\vec{s}' = [\vec{k}'\vec{e}']$ а $\vec{e}$, $\vec{k}$ и $\vec{e}'$, $\vec{k}'$ – единичные векторы поляризации и импульса фотона до и после рассеяния, соответственно.

Для определения инвариантных амплитуд $T_1, \dots, T_6$ введем ортогональные 4- векторы

$$K = \frac{1}{2}(q + q'), \quad Q = \frac{1}{2}(q' - q) = \frac{1}{2}(p - p'), \quad P = \frac{1}{2}(p + p')$$

$$\mathcal{P}' = P - K(PK)/K^2; \quad N_\mu = i\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \mathcal{P}'_\nu K_\sigma Q_\rho$$

построенные на p, p' и q, q' 4-импульсах нуклона и γ -квантов до и после рассеяния, соответственно. При этом $(\hat{K} = \gamma_\mu K_\mu)$

$$e'_\mu N_{\mu\nu} e_\nu = \frac{(e'\mathcal{P}')(e\mathcal{P}')}{\mathcal{P}'^2}(T_1 + i\hat{K}T_2) + \frac{(e'N)(eN)}{N^2}(T_3 + i\hat{K}T_4) -$$

$$- \frac{(e'\mathcal{P}')(eN) - (e'N)(e\mathcal{P}')}{(\mathcal{P}'^2 N^2)^{1/2}} \, i\gamma_5 T_5 +$$

$$+ \frac{(e'\hat{\mathcal{P}}')(eN) + (e'N)(e\mathcal{P}')}{(\mathcal{P}'^2 N^2)^{1/2}} \, \gamma_5 \hat{K} T_6 ,$$

а дифференциальное сечение в с.ц.и. равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\text{спины}} \left| \frac{M}{W} N \right|^2 .$$

В основном тексте рассмотрены $T_i(\nu, Q^2 = 0)$.

Литература

1. С.Б. Герасимов. ЯФ, 2, 598 (1965).
2. S.D.Drell,A.C.Hearn Phys.Rev.,Lett., 16, 908, 1966.
3. Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан -чжао. ЖЭТФ 37, 1714, (1959); 38, 201 (1960).
4. Л.И. Лапидус, Чжоу Гаун-чжао. ЖЭТФ, 41, 294, 491 (1961).
5. Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ 41, 1546 (1961).
6. F.Low Phys. Rev., 96, 1428, 1954. M.Gell-Mann, M.L.Goldberger Phys Rev., 96, 1433, 1954.

   Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао . ЖЭТФ 41, 492 (1961).
7. M.L.Goldberger Phys.Rev., 99, 979, 1955.
8. M.A.B.Beg Phys.Rev., 150, 1276, 1966. Phys.Rev. Lett., 17, 333, 1966.
9. Ken Kawarabayashi, W.Wada Phys.Rev., 152 , 1276, 1966. Ken Kawarabayashi, M.Suzuki Phys.Rev., 152,1383, 1966.

9a. См. также M.Gourdin Nuovo Cimento XVII A, 145, 195, 1967.

10. Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ 39, 1286 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 апреля 1967 г.