ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3270

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К. Волков

МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ

1967.

P2 - 3270

М.К. Волков

МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ

Направлено в "Physics Letters"

В работах[1,2] автором была построена унитарная релятивистская перенормируемая модель квантовой теории поля с лагранжианом, приводящим к спектральным функциям быстрого роста (растущим быстрее любого полинома). Эта область квантовой теории поля в последнее время привлекает к себе внимание многих авторов[3-8]. Наша модель построена на лагранжиане взаимодействия

$$L_{вз} = \Delta m :\bar{\Psi}(x)\tau_3\, e^{-i2g\tau_1\phi(x)}\,\Psi(x): , \qquad (1)$$

родственном лагранжиану

$$L_{вз} = -g :\bar{\Psi}(x)\tau_1\gamma_\nu\Psi(x)\partial_\nu\phi(x): - \Delta m :\bar{\Psi}(x)\tau_3\Psi(x): \qquad (2)$$

(если не относить знак нормального произведения к операторам $\phi(x)$, то (1) получается из (2) унитарным преобразованием $\Psi'(x)=\Psi(x)e^{ig\tau_1\phi(x)}$). Здесь τ_1 и τ_3 – матрицы изотопического спина, γ_ν – матрицы Дирака, $\Psi(x)$ и $\phi(x)$ – операторы соответственно спинорного и скалярного поля.

В предыдущих работах были найдены двухточечные функции Грина, через которые выражаются все физические величины в теории. Построены спектральные представления таких функций и определены интегралы от их произведений. Теория оказалась унитарной и свободной от ультрафиолетовых расходимостей.

Нами был исследован случай, когда массы покоя всех частиц равны нулю, так как он наиболее удобен для исследования ввиду простого вида пропагаторов. Однако, поскольку в лагранжиан взаимодействия входит Δm – разность масс нуклонов в двух различных состояниях, то представляет интерес обобщить теорию на случай отличных от нуля масс покоя спинорных частиц. Этому вопросу и посвящается настоящая работа. Рассмотрим спинорную функцию Грина $\Psi(p)$

$$\Psi(p)=\int d^4x\, S^{\circ}(x)\exp i[\,px-(2g)^2\Delta^{\circ}(x)], \qquad (3)$$

где $S^{\circ}(x)$ и $\Delta^{\circ}(x)$ – пропагаторы соответственно спинорного и скалярного полей. Масса покоя скалярной частицы равна нулю, а спинорной – отлична от нуля. Чтобы на более простом примере продемонстрировать наш метод, мы вместо выражения (3) рассмотрим функцию $R(p)$:

$$R(p)=\int d^4x\,\Delta^{\circ}_{m}(x)\exp i[px-(2g)^2\Delta^{\circ}(x)], \qquad (4)$$

где $\Delta^{\circ}_{m}(x)$ – скалярный пропагатор с массой покоя, отличной от нуля. Расчёты, проделанные для (4), без труда переносятся на интеграл (3).

Рассмотрим (4) в физической области $p^2>0$. Этот интеграл сводится к интегралу в импульсном пространстве от произведения двух функций $\Delta^{c}_{m}(p-k)$ и $\Phi_{\delta}(k)$

$$R(p)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\Phi_{\delta}(k)}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}, \qquad (5)$$

где

$$\Phi_{\delta}(k)=i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)-i8(\pi\kappa)^2\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}dz\,\frac{e^{-i\pi z}(k^2+i\epsilon)^{z-2}}{\sin\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}f_{\delta}(z), \qquad (6)$$

$0\le a<1$, $\kappa=\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $f_{\delta}(z)$ – регуляризованная функция. В полосе $0\le \operatorname{Re}z<2$ она имеет представление

$$f_{\delta}(z)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}d\lambda\,\lambda^{z}\left[\frac{e^{\frac{\kappa}{\lambda+i\delta}}}{(\lambda+i\delta)^3}+\frac{e^{\frac{\kappa}{\lambda-i\delta}}}{(\lambda-i\delta)^3}\right]. \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$R(p)=\frac{1}{m^2-p^2-i\epsilon}+\frac{\kappa^2}{2\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}dz\,\frac{e^{-i\pi z}f_{\delta}(z)}{\sin\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}d_z(p), \qquad (8)$$

$$d_z(p)=\int d^4k\,(k^2+i\epsilon)^{z-2}\,[(p-k)^2-m^2+i\epsilon]^{-1}, \qquad (9)$$

в области $0<p^2<m^2$ $d_z(p)$ равно

$$d_z(p)=-i\pi^3 m^{2(z-1)}\frac{e^{i\pi z}}{\sin\pi z}\sum_0^{\infty}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n\frac{\Gamma(z)\Gamma(z-1)}{n!(n+1)!\,\Gamma(z-n)\Gamma(z-n-1)}. \qquad (10)$$

В области $p^2>m^2$

$$d_z(p)=-i\pi^2p^{2(z-1)}\sum_0^{\infty}\Big\{\frac{e^{i\pi z}\pi}{\sin\pi z}\left(\frac{m^2}{p^2}\right)^{n+1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z-1)}{n!(n+1)!\,\Gamma(z-n)\Gamma(z-n-1)}+$$

$$+\left(1-\frac{m^2}{p^2}\right)^{2z+n-1}\frac{\Gamma(n+z)\Gamma(n+z-1)}{n!\,\Gamma(n+2z)}\Big\}. \qquad (11)$$

Подставим полученные выражения для $d_z(p)$ в (8) и повернем контур интегрирования так, чтобы он шел сверху и снизу от реальной положительной оси. $f_{\delta}(z)$ легко продолжается аналитически на всю правую полуплоскость за исключением реальной оси /9/. Сделав под интегралами в $f_{\delta}(z)$ повороты контуров так, чтобы в экспонентах знак стал отрицательным, можно перейти к пределу $\delta\to 0$ и затем вычислить (6) как сумму вычетов в полюсах. Получаем ответ в виде хорошо сходящегося двойного ряда.

В области $0<p^2<m^2$ $R(p)$ равно

$$R(p)=\frac{(\kappa m)^2}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(\kappa m^2)^k}{(k+2)!}\sum_0^{k}\frac{\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n}{n!(n+1)!(k-n)!(k-n+1)!}\{\pi^2+\Psi'(k+3)+ \qquad (12)$$

$$+\Psi'(k-n+2)+\Psi'(k-n+1)-[\ln\kappa m^2-\Psi(k+3)-\Psi(k-n+2)-\Psi(k-n+1)]^2\}+$$

$$+\frac{1}{m^2}\sum_0^{\infty}\frac{(\kappa m^2)^k}{k!}\sum_k^{\infty}\frac{\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n(n-k)!(n-k+1)!}{n!(n+1)!}-\kappa\sum_0^{\infty}\frac{(\kappa p^2)^n}{n!(n+1)!(n+1)!}[\ln\kappa m^2-\Psi(n+1)-2\Psi(1)].$$

Здесь $\Psi(n)$ – пси-функция Эйлера.

В области $p^2 > m^2$ мы приведем только $\operatorname{Im} R(p)$

$$\operatorname{Im} R(p) = \pi \Big\{ \delta(p^2 - m^2) + \kappa\Big(1 - \frac{m^2}{p^2}\Big) + \kappa^2 p^2 \Big(1 - \frac{m^2}{p^2}\Big)^3 \sum_0^\infty \frac{(p^2\kappa)^k}{k!(k+1)!(k+2)!} \sum_{2k}^\infty \frac{\Big(1 - \frac{m^2}{p^2}\Big)^n (n-k)!(n-k+1)!}{(n+3)!(n-2k)!} \Big\}. \tag{13}$$

Из условия унитарности [1] следует, что мнимая часть $R(p)$ должна равняться

$$\operatorname{Im} R(p) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^n}{n!} \Omega_{n+1}(p^2), \tag{14}$$

где $\Omega_{n+1}(p^2)$ – фазовый объём $n+1$ частиц. n частиц имеют массу покоя, равную нулю, а у одной частицы масса покоя не равна нулю. Такие фазовые объемы вычислены в работе [10]. Подставляя их значение в (14), убеждаемся в справедливости (13). Итак, полученная нами функция удовлетворяет условию унитарности.

В заключение заметим, что интеграл (4) можно вычислить, не переходя в импульсное пространство, а используя следующее интегральное представление для пропагатора $\Delta_m^0(x)$:

$$\Delta_m^0(x) = \frac{m^2}{\pi 2^5} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz \frac{e^{i\pi z}\left[\frac{m^2}{4}(x^2 - i\epsilon)\right]^{z-2}}{\sin^2 \pi z\, \Gamma(z-1)\Gamma(z)} \quad (0 \le a < 1). \tag{15}$$

Автор глубоко благодарен проф. Д.И.Блохинцеву за внимание к работе и ценные дискуссии.

Литература

1. М.К.Волков. Препринт ОИЯИ, Р2-3114, Дубна, 1967.
2. М.К.Волков. Препринт ОИЯИ, Е-3266, Дубна, 1967.
3. W. Guttinger, Fortschritte der Physik, 14, 8/9 (1966).
4. T. Pradhau. Nucl. Phys., 43, 11 (1963).
5. B. Klaiber. Nuovo Cim., 36, 165 (1965).
6. B. Schroer. J. Math. Phys., 5, 1361 (1964).

7. G.V. Efimov. Nucl. Phys., 74, 657 (1965).
8. E. S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
9. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, 1. ГИФМЛ, Москва, 1959.
10. В.А.Колкунов. ЖЭТФ, 43, 1448 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1967 года.