ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3250

Г.И. Кузнецов , Я.А. Смородинский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ АМПЛИТУД И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

P2 - 3250

Г.И. Кузнецов*, Я.А. Смородинский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ АМПЛИТУД И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

* Институт атомной энергии им. И.В.Курчатова.

§ 1. Введение

1. В работе Виленкина и Смородинского /1/ были рассмотрены различные варианты интегральных разложений скалярной функции по неприводимым (бесконечномерным) унитарным представлениям группы Лоренца. Однако вне рамок этой работы оставался вопрос об условиях сходимости появляющихся интегралов. Естественно, что условия сходимости интегралов существенны для задачи. Сходимость интегралов, прежде всего, означает, что интегральное разложение практически возможно, т.е. что мы можем связать преобразования Лоренца для исходной функции с известными преобразованиями ее неприводимых компонент.

Таким образом, условия сходимости следует считать следствием релятивистской инвариантности. Это утверждение надо понимать в следующем смысле.

Рассмотрим, например, амплитуду упругого рассеяния. Она является функцией двух переменных, которые, как это показано в /1/, можно считать пробегающими поверхность верхней полости двухполостного гиперболоида вращения $u^2 = 1$ (u – 4 – скорость одной из частиц).

Тогда операторы сдвига на этой поверхности (которые, очевидно, реализуют собственную группу Лоренца) могут быть использованы для преобразования амплитуды рассеяния от одного значения переменных к другому.

Мы будем называть расширенным условием релятивистской инвариантности возможность перехода от одного значения амплитуды рассеяния к другому с помощью операторов сдвига на гиперболоиде.

Заметим, что обычное условие инвариантности состоит лишь в том, что амплитуда зависит от инвариантных параметров s, t.

Такое расширение определения инвариантности, необходимое для введения разложений, приводит естественным путем к условиям поведения функций при больших значениях аргументов. По-видимому, такие условия должны быть в конце концов эквивалентными асимптотическим условиям, получаемым из условий аналитичности по теореме Померанчука [2].

Примеры такой связи между условием сходимости и асимптотическими теоремами и составляют предмет настоящей работы.

2. Мы будем исходить из разложения амплитуд по собственным функциям оператора Лапласа на гиперболоиде, полученного в работе [1], используя только разложение в сферической системе координат.

$$f(E,\theta,\phi)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\ell m}(-)^{\ell}\rho^{2}\,\frac{a_{\ell m}(\rho)\,\Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-\ell)}\,\frac{P^{-1/2-\ell}_{-1/2-i\rho}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}}\,Y_{\ell m}(\theta,\phi)\,d\rho\,, \quad (1)$$

где $E=\mathrm{ch}\,a$, θ – угол рассеяния, угол ϕ записан для полноты, ρ характеризует представление группы Лоренца.

$$\frac{a_{\ell m}(\rho)\,\Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-\ell)}=\frac{a_{\ell m}(-\rho)\,\Gamma(i\rho)}{\Gamma(i\rho-\ell)}\,. \quad (2)$$

Условия (2) отображают симметрию подинтегральной функции относительно ρ (см. [3]). Коэффициенты $a_{\ell m}(\rho)$ определяются по формуле:

$$a_{\ell m}(\rho)=\frac{(-)^{\ell}(2\pi)^{3/2}\Gamma(i\rho)}{2\Gamma(i\rho-\ell)}\int f(a,\theta,\phi)\,\frac{P^{-1/2-\ell}_{-1/2+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}}\,Y^{*}_{\ell m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sh}^{2}a\,da\,d\Omega\,. \quad (3)$$

Функция, для которой справедливы прямое и обратное преобразование (1), (3), должна удовлетворять следующим условиям:

а) быть квадратично интегрируемой:

$$\int|f(x)|^{2}\,dx<\infty \quad (4)$$

(здесь x – совокупность переменных a, θ, ϕ, а

$dx=\mathrm{sh}^{2}a\sin\theta\,da\,d\theta\,d\phi$ – элемент объема);

б) реализовать регулярное представление T_g группы движений на гиперболоиде, изоморфной группе Лоренца[4]:

$$T_g \, f(x) = f(g^{-1} x). \tag{5}$$

Это и есть то условие, о котором говорилось во введении.

Пусть $E \to \infty$ при фиксированном θ. Тогда если подинтегральная функция в (1) есть равномерно сходящаяся функция относительно ρ к предельной $\phi = \underset{z \to \infty}{f(\rho, z)}$ и интеграл (1) равномерно сходится относительно E, то вместо предела интеграла можно рассматривать предел подинтегральной функции (что обычно и делается[2,5]).

Воспользовавшись асимптотическим представлением $P^{\mu}_{\nu}(z)$ присоединенной функции Лежандра

$$P^{-\frac{1}{2}-\ell}_{-\frac{1}{2}-i\rho}(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ \frac{\Gamma(-i\rho)\, e^{-i\rho \ln 2z}}{\Gamma(-i\rho+\ell+1)} + \frac{\Gamma(i\rho)\, e^{i\rho \ln 2z}}{\Gamma(i\rho+\ell+1)} \right\}, \tag{6}$$

получаем

$$f_{\text{асим.}}(E,\theta) = \frac{\text{const}}{\sqrt{E\sqrt{E^2-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(\theta,\rho)\, e^{i\rho \ln 2E} + A(\theta,-\rho)\, e^{-i\rho \ln 2E} \right\} d\rho, \tag{7}$$

где

$$A(\theta,\rho) = \sum_{\ell} (-)^{\ell} \frac{|\Gamma(i\rho)|^2 \, a_{\ell}(\rho) \cdot \rho^2 P_{\ell}(\theta)}{\Gamma(-i\rho-\ell)\,\Gamma(i\rho+\ell+1)}, \tag{8}$$

причем $A(\theta,-\rho) \neq A^*(\theta,\rho)$!.

Поскольку $\ln 2E \to \infty$ при θ фиксированном, то из-за осцилляций в экспоненте интегрироваие по ρ в (7) должно фактически ограничиваться областью малых значений ρ.

Заметим, что если мы используем условие равномерной сходимости подинтегральной функции и интеграла, т.е. осуществляем перенос символа предела под знак интеграла, то интегрирование в (7) должно производиться в конечных пределах.

Из выражения (7), как следствие гармонического анализа, вытекает "соотношение неопределенностей"

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\pi}\right) \Delta \xi \approx 1 , \qquad (9)$$

здесь $\xi = \ln 2E$.

3. Получим соотношения между амплитудами рассеяния $f(E,\theta)$ и $\tilde{f}(E,\theta)$ частицы и античастицы соответственно на одной и той же мишени.

Нам будет удобнее пользоваться лабораторной системой координат и выбрать в качестве переменных E , θ энергию рассеянной частицы и угол рассеяния, которые есть координаты $a, \theta\ (\operatorname{ch} a = E)$ точки на гиперболоиде.

Выпишем связь между мандельстамовскими переменными s, t, u и переменными E , θ для реакции

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4 , \qquad (10)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2(1 + E_2),$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = 2(1 - E_4),$$

$$t = (p_2 - p_4)^2 = 2 - 2E_2E_4 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4|\cos\theta , \qquad (11)$$

$$p_1^2 = 1 , \ p_1 = (1,0,0,0).$$

Поскольку $E = E_4 \to \infty$, то это возможно лишь за счет стремления к бесконечности энергии налетающей частицы E_2 . Условие же $\cos\theta = \text{const} \neq 1$ требует также бесконечно большого переданного импульса, т.е. E_3 и E_4 стремятся к бесконечности по одному и тому же закону, только с различными коэффициентами.

Переход в u-канал ($s \to u$) соответствует в амплитуде замене $E \to -E$. Используя условие кросс-симметрии в форме[6],

$$\tilde{f}(E + io, \theta) = f(-E - io, \theta) = f^*(-E + io, \theta) \tag{12}$$

и выражение (7), получаем

$$\mathrm{Re}\,\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\{-[A_1(\rho)e^{\pi\rho} + A_1(-\rho)e^{-\pi\rho}]\cos\rho\ln 2E + [A_2(\rho)e^{\pi\rho} - A_2(-\rho)e^{-\pi\rho}]\sin\rho\ln 2E\}d\rho, \tag{13}$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\{[A_1(\rho)e^{\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{-\pi\rho}]\sin\rho\ln 2E + [A_2(\rho)e^{\pi\rho} + A_2(-\rho)e^{-\pi\rho}]\cos\rho\ln 2E\}d\rho. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{f}$ – амплитуда рассеяния античастицы. $A_1 = \mathrm{Re}\,A$; $A_2 = \mathrm{Im}\,A$.

Напишем выражения типа (13), (14) для амплитуды рассеяния частицы $f(E, \theta)$:

$$\mathrm{Re}\,f = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\{[A_1(\rho) + A_1(-\rho)]\cos\rho\ln 2E - [A_2(\rho) - A_2(-\rho)]\sin\rho\ln 2E\}d\rho, \tag{15}$$

$$\mathrm{Im}\,f = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\{[A_1(\rho) - A_1(-\rho)]\sin\rho\ln 2E + [A_2(\rho) + A_2(-\rho)\cos\rho\ln 2E\}d\rho. \tag{16}$$

Поскольку интегрирование (13) – (16) ограничивается малыми значениями ρ, то $e^{\pm\pi\rho} \approx 1$, а это означает, что

$$\mathrm{Im}\,\tilde{f}_{\text{асим.}} \cong \mathrm{Im}\,f_{\text{асим.}}, \tag{17}$$

$$\mathrm{Re}\,\tilde{f}_{\text{асим.}} \cong -\mathrm{Re}\,f_{\text{асим.}}, \tag{18}$$

т.е.

$$|\tilde{f}_{\text{асим.}}(E, \theta)| \cong |f_{\text{асим.}}(E, \theta)|. \tag{19}$$

Равенство амплитуд рассеяния при $\theta = 0$ впервые было получено Померанчуком с помощью дисперсионных соотношений и требования постоянства полного сечения[2].

Для ненулевого угла рассеяния равенство (19) получено Мейманом [5] (где приведены ссылки на другие работы этого же автора) при использовании принципа причинности и локальности, а также Логуновым и др. в [7,8] с помощью теоремы Фрагмена–Линделефа.

Для $\tilde{\tilde{f}}(E,\theta)$ можно записать представление (7), где вместо функций $A(\theta,\rho)$ будут стоять новые функции $B(\theta,\rho)$, а также легко написать выражение для действительных и мнимых частей.

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{f}} = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{[B_1(\rho)+B_1(-\rho)]\cos\rho\ln 2E - [B_2(\rho)-B_2(-\rho)]\sin\rho\ln 2E\}\,d\rho\,, \tag{20}$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{f}} = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{[B_1(\rho)-B_1(-\rho)]\sin\rho\ln 2E + [B_2(\rho)+B_2(-\rho)]\cos\rho\ln 2E\}\,d\rho\,. \tag{21}$$

Из (13), (14) и (20), (21) получаем алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} B_1(\rho) + B_1(-\rho) = -A_1(\rho)e^{\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{-\pi\rho} \\ B_1(\rho) - B_1(-\rho) = A_1(\rho)e^{\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{-\pi\rho}\,, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} B_2(\rho) + B_2(-\rho) = A_2(\rho)e^{\pi\rho} + A_2(-\rho)e^{-\pi\rho}\,, \\ -B_2(\rho) + B_2(-\rho) = A_2(\rho)e^{\pi\rho} - A_2(-\rho)e^{-\pi\rho}\,, \end{cases} \tag{23}$$

решение которых дает связь между коэффициентами B и A:

$$\begin{aligned} B_1(\pm\rho) &= -A_1(\mp\rho)e^{\mp\pi\rho}\,, \\ B_2(\pm\rho) &= A_2(\mp\rho)e^{\mp\pi\rho}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, теорема о равенстве амплитуд может быть получена из условия сходимости интегральных разложений на группе. При этом аналитические свойства функций явно не используются. Теорема оказывается следствием, на наш взгляд, более физического условия, что амплитуда рассеяния определяется своим значением и всеми производными в какой-либо одной точке пространства (гиперболоида). Такое свойство функции эквивалентно (по крайней мере с физической точки зрения) условию причинности.

Квадратичная интегрируемость $f(E,\theta)$ требует, чтобы на бесконечности $|f(E,\theta)|$ убывала быстрее, чем $1/E$. Если отказаться от квадратичной интегрируемости функций, то парциальные амплитуды $A(\rho,\theta)$ станут обобщенными функциями типа приведенных в таблице, например, для $\theta = 0$.

Авторы выражают свою признательность Н.Н. Мейману за полезные советы и обсуждение результатов работы.

$f(E)$	$\rho\, a(\rho)$
$\frac{1}{E\,\ln E}$	$\theta(t) - \theta(-t)$
$\frac{1}{E}$	$= \frac{1}{2i}\left(\delta_-(\rho) - \delta_+(\rho)\right) = P\frac{1}{\rho}$
$\frac{\ln E}{E}$	$= \delta'(\rho)$
$\frac{\ln^2 E}{E}$	$= \frac{1}{2i}\left(\delta''_-(\rho) - \delta''_+(\rho)\right) = P\frac{1}{\rho^3}$
$\frac{\ln^{2n} E}{E}$	$= P\frac{1}{\rho^{2n+1}}$
$\frac{\ln^{2n+1} E}{E}$	$= \delta^{(2n+1)}(\rho)$

Л и т е р а т у р а

1. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
2. И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 34, 725 (1958).
3. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
4. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. Изд-во "Наука", 1965.
5. Н.Н. Мейман. Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", 4, Ереван, 1964,
6. В.Б. Берестецкий. УФН, XXVI , 25 (1962).
7. А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т. Тодоров, О.А. Хрусталев. ЖЭТФ, 46, 1079 (1964).
8. A.A. Logunov, Nguyen Van Hieu, I. T. Todorov, Preprint E-1520, Dubna, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1967 г.